ČÁRY A BODY 2

Popis aktivity

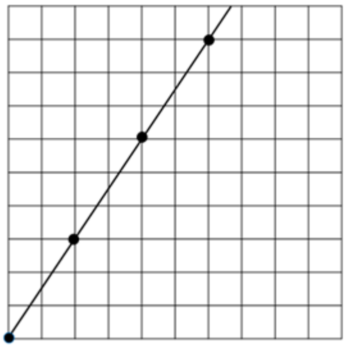
Operace s přirozenými čísly včetně celočíselného dělení (celá část čísla), užití pojmů dělitel, soudělná čísla a vyjádření „právě“ a „alespoň“.

Předpokládané znalosti

Operace s přirozenými čísly. Osová souměrnost.

Potřebné pomůcky

Zadání



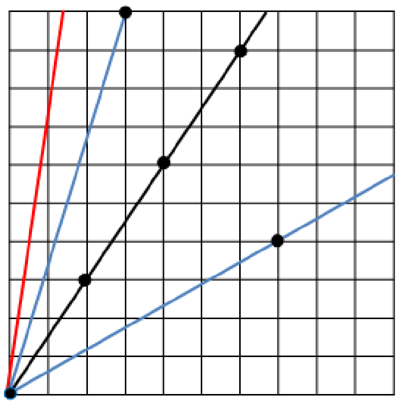
Čtvercová síť má 10 krát 10 polí. Sestrojíme libovolnou polopřímku, která má počáteční bod v levém dolním rohu čtvercové sítě a prochází ještě alespoň jedním z dalších mřížových bodů čtvercové sítě. Vyznačíme čáru (úsečku), která je průnikem polopřímky a čtvercové sítě.

A) Zakreslete alespoň dvě další čáry vyhovující zadání a jednu čáru, která prochází počátkem, ale zadání nevyhovuje.

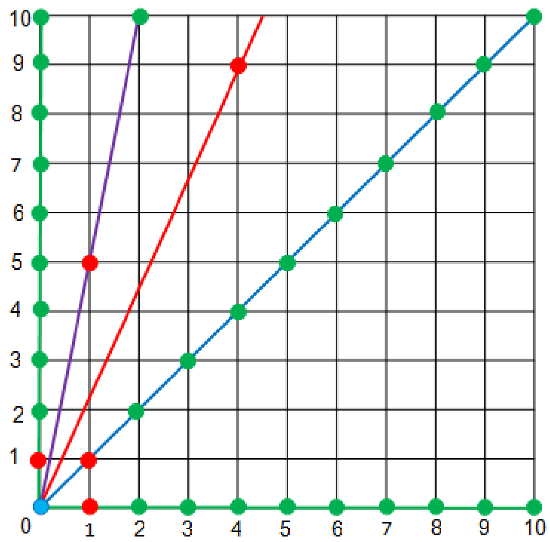
B) Určete počet takových čar vyhovujících zadání, které procházejí **právě dvěma** mřížovými body – počátkem a ještě jedním mřížovým bodem.

C) Určete počet všech čar vyhovujících zadání (tedy procházejí kromě počátku ještě jedním, dvěma až deseti dalšími mřížovými body).

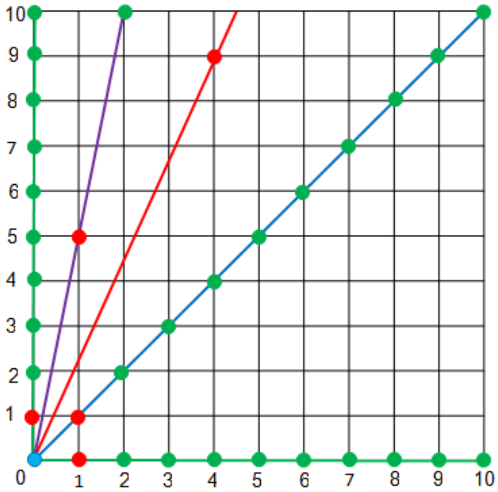
Možný postup řešení, metodické poznámky



A)
Červená čára nevyhovuje zadání, neboť protíná jedinou svislou přímku mezi dvěma mřížovými body, kterými neprochází.
Obě modré přímky vyhovují zadání



B) Na každé čáře najdeme kromě mřížového bodu v počátku ještě alespoň jeden další mřížový bod. Vyznačíme červeně první z nich (tj. nejblíže k počátku). Čtvercová síť je osově souměrná podle úhlopříčky procházející počátkem soustavy souřadnic. Situaci si proto zjednodušíme rozdělením čtvercové sítě úhlopříčkou na dvě části a nadále se budeme zabývat jen čarami a mřížovými body v první části ohraničené svislou zelenou čarou a modrou úhlopříčkou.



Kromě mřížových bodů na těchto dvou hraničních přímkách, napočítáme v jedné části ještě dalších 45 mřížových bodů.
Výpočet:
$1 + 2 + \cdots + 9 = 45$
nebo
$$(10 \cdot 10 - 10) : 2 = 45$$

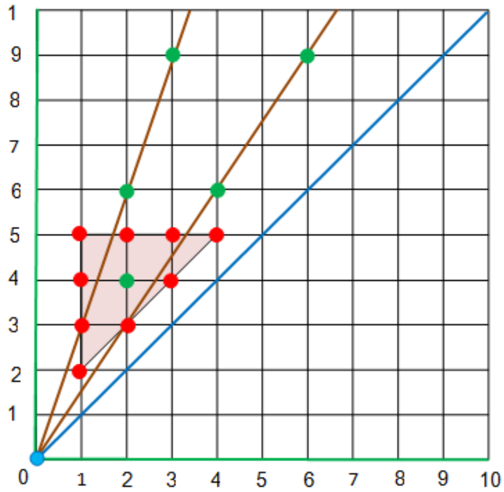
Rozlišíme dva typy čar, čáru procházející více než dvěma mřížovými body (I) a čáru procházející právě dvěma mřížovými body (II).

I. Např. na fialové čáře je nejbližší mřížový bod se souřadnicemi $[1; 5]$. Ve dvojnásobné vzdálenosti od počátku je další mřížový bod.

II. Naopak na červené čáře má první mřížový bod souřadnice $[4; 9]$, další mřížový bod ve dvojnásobné vzdálenosti od počátku by byl vně čtvercové sítě.

(Vektor směřující z počátku soustavy souřadnic do nejbližšího mřížového bodu čáry pojmenujme „mřížový vektor“.)

Jestliže ani jedna souřadnice $[x, y]$ prvního mřížového bodu od počátku nepřekročí hodnotu 5 ($x \leq 5 \wedge y \leq 5$), pak lze na čáře umístit i mřížový bod ve dvojnásobné vzdálenosti od počátku. (Vektor směřující od počátku do tohoto bodu je dvojnásobkem „mřížového vektoru“.)



Všechny tyto body jsou ve vyznačeném růžovém trojúhelníku (celkem 10 bodů).

Uvnitř trojúhelníku je jeden (zelený) bod, který je až druhým mřížovým bodem na čáře. Jedná se o bod $[2; 4]$. Na stejné čáře totiž leží i mřížový bod $[1; 2]$.

Souřadnice vektoru $(2; 4)$ jsou soudělná čísla, kdežto vektory směřující do prvních mřížových (červených) bodů na čáře mají nesoudělné hodnoty souřadnic $(x; y)$, tedy $D(x; y) = 1$.

V levé části sítě ($0 < x < y \leq 10$) prochází každá čára počátkem a alespoň jedním dalším mřížovým bodem. Souřadnice prvního (červeného) mřížového od počátku označme $[a, b]$. Platí: $0 < a < b \leq 10$. Jestliže dvojnásobek souřadnice b nepřekročí hodnotu 10, vejde se na čáru ještě další mřížový bod, a nepřekročí-li k násobek souřadnice b hodnotu 10, na čáře bude kromě počátku ještě k dalších mřížových bodů. Na čáře je tedy kromě počátku ještě $\left[\frac{10}{b}\right]$ bodů.

(Zlomek v hranaté závorce znamená, celou část čísla, tedy u výsledku se čísla za desetinnou čárkou ignorují.)

Např. na každé z obou hnědých čar jsou umístěny kromě počátečního bodu ještě 3 další mřížové body ($\left[\frac{10}{3}\right] = 3$). V tabulce jsou uvedeny počty mřížových bodů na čarách v závislosti na umístění prvního mřížového bodu.

b (hodnota druhé souřadnice)	k (počet prvních - červených mřížových bodů se souřadnicí b)	$\left[\frac{10}{b}\right]$ (počet mřížových bodů jedné čáry procházející červeným bodem se souřadnicí b)	$k \cdot \left[\frac{10}{b}\right]$ (počet mřížových bodů všech čar procházejících červenými body se souřadnicí b)
2	1	$\left[\frac{10}{2}\right] = 5$	$1 \cdot 5 = 5$
3	2	$\left[\frac{10}{3}\right] = 3$	$2 \cdot 3 = 6$
4	2	$\left[\frac{10}{4}\right] = 2$	$2 \cdot 2 = 4$
5	4	$\left[\frac{10}{5}\right] = 2$	$4 \cdot 2 = 8$
Počet mřížových bodů na všech čarách, které obsahují kromě počátku ještě alespoň dva mřížové body.			Celkem 23

Zbývajících 22 bodů první části čtvercové sítě ($45 - 23 = 22$) neleží na čarách s větším počtem mřížových bodů, viz tabulka. Každá přímka procházející některým z těchto mřížových bodů neobsahuje s výjimkou počátku žádný další mřížový bod. Tedy celkem 22 čar jedné části sítě prochází právě dvěma mřížovými body.

Protože je druhá část osově souměrná, hledaných čar je v celé čtvercové síti dvojnásobek.

V dané čtvercové síti existuje celkem 44 čar procházejících právě dvěma mřížovými body, tj. počátkem a ještě jedním mřížovým bodem.

C)

Červené body ve vyznačeném trojúhelníku leží na čarách s větším počtem mřížových bodů než 2 (včetně počátku). Počet červených bodů trojúhelníku je uveden ve druhém sloupci tabulky. Každým z těchto 9 bodů prochází jiná čára (na každé čáře je právě jeden červený bod). V obou částech čtvercové sítě je těchto čar dvojnásobek, tedy 18. K nim je nutné připočítat ještě dvě čáry na osách souřadnic a jednu úhlopříčku. Všechny tyto čáry společně s dalšími 44 čarami z předchozí části úlohy vyhovují zadání úlohy.

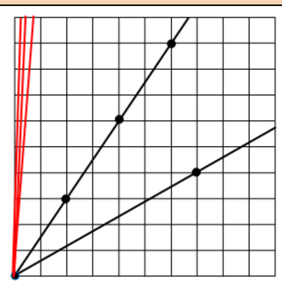
V dané čtvercové síti existuje celkem 65 různých čar, procházejících včetně počátku alespoň dvěma mřížovými body.

Doplňkové aktivity

Ve čtvercové síti je možné sestrojit čáry, které kromě počátku neprocházejí žádným mřížovým bodem a čáry které kromě počátku procházejí ještě alespoň jedním mřížovým bodem. Kterých čar je více?

Řešení

Ve druhé jmenované skupině je konečný počet čar, kdežto v první skupině je nekonečně mnoho čar (např. těch, které procházejí počátkem a neopustí první sloupec čtvercové sítě.



Obrazový materiál	Dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.