evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

JAK JE TO S VÝROBNÍMI NÁKLADY?

Popis aktivity

Výpočet koeficientů lineární lomené funkce na základě zadaných údajů, čtení grafu příslušné funkce.

Předpokládané znalosti

Lineární lomená funkce a její vlastnosti, řešení soustavy rovnic, řešení nerovnice

Potřebné pomůcky

Zadání

Kalkulace výrobních nákladů nově zaváděných výrobků je dána vztahem $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+5}$, kde $x\geq 0$. $f(x)$ udává náklady v 1000 Kč pro x-tou výrobní jednotku, přitom jednotky jsou produkovány postupně.

a) Určete reálná čísla a,b, budou-li náklady na pátou výrobní jednotku $95\ 000\,\text{Kč}$ a na dvacátou $56\,000\ \text{Kč}$ a načrtněte graf příslušné závislosti.

b) Ukažte, že výrobní náklady v čase klesají.

c) Od které výrobní jednotky budou výrobní náklady na jednu jednotku menší než $40\ 000\ \text{Kč}$?

d) Od kolikáté výrobní jednotky bude rozdíl mezi výrobními náklady dvou po sobě následujících jednotek menší než $10\ 000\ \text{Kč}$?

Možný postup řešení, metodické poznámky

a) Z daných údajů plyne, že musí platit:

$95=\dfrac{5a+b}{5+5}$ a zároveň $56=\dfrac{20a+b}{20+5}$ (náklady jsou v tisících korun).

Úpravou obou rovnic dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

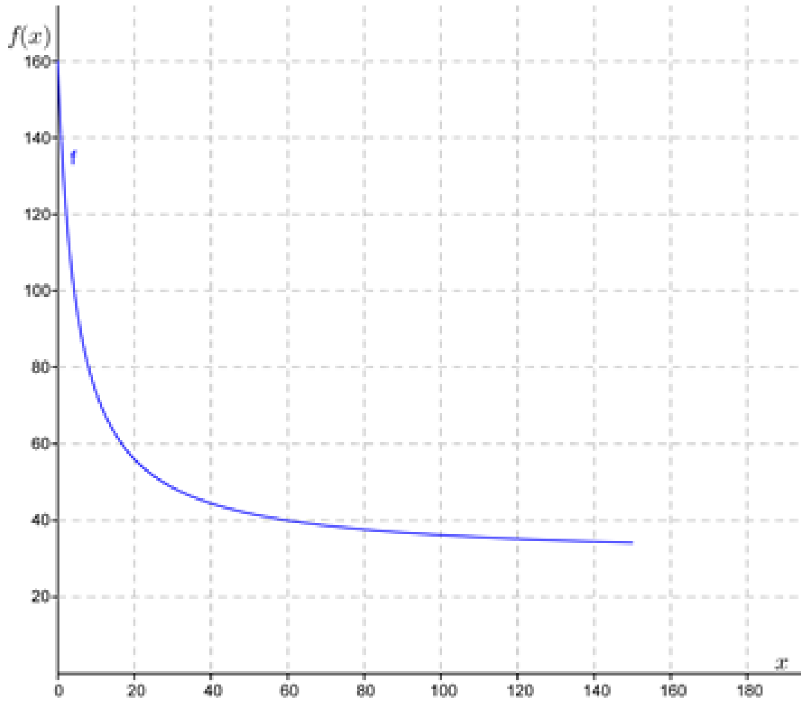
$$950=5a+b$$
$$1400=20a+b$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

$15a=450 \Rightarrow a=30$ tedy $b=800$.

Vztah pro kalkulaci výrobních nákladů za daných podmínek má tedy tvar

$$f(x)=\frac{30x+800}{x+5},\ x\geq 0$$



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá

Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Z grafu můžeme (mimo jiné) usoudit, že již při zahájení výroby se počítá s náklady ve výši $160\,000\,\text{Kč}$ ($f(0)=160$).

b) Pokles výrobních nákladů je vidět na grafu, potvrzuje ho funkční předpis, ale můžeme ho také dokázat pomocí derivace funkce $f(x)=\dfrac{30x+800}{x+5}, x\geq 0$.

$f'(x)=\dfrac{30\cdot(x+5)-(30x+800)}{(x+5)^2}=\dfrac{-650}{(x+5)^2}<0\;\forall x\in R_0^+$ (funkci jsme derivovali jako podíl). Pokud je první derivace pro všechna x z daného intervalu číslo záporné, pak je funkce v tomto intervalu klesající – potvrdili jsme to, co ukazuje graf.

c) Odpověď na tuto otázku dá řešení nerovnice

$\dfrac{30x+800}{x+5}<40$. Protože $x\geq 0 \Rightarrow x+5>0$, můžeme obě strany nerovnice vynásobit jmenovatelem. Řešením nerovnice $30x+800<40\cdot(x+5)$ dostáváme $x>60$.

Od šedesáté výrobní jednotky budou výrobní náklady menší než $40\ 000\ \text{Kč}$.

Výsledek můžeme interpretovat na grafu.

d) Rozdíl výrobních nákladů po sobě následujících výrobních jednotek vyjadřuje zápis $f(x)-f(x+1)$ (víme, že se jedná o funkci klesající, tedy pro $x<x+1$ bude $f(x)>f(x+1)$) a má platit:

$f(x)-f(x+1)<10$, tedy $\dfrac{30x+800}{x+5}-\dfrac{30(x+1)+800}{x+1+5}<10$. Po úpravách dostaneme kvadratickou nerovnici ve tvaru $x^2+11x-620>0$, tedy $(x+31)\cdot(x-20)>0$, vzhledem k podmínce $x\geq 0$ je řešením této nerovnice interval $(20;\infty)$.

Tedy již od dvacáté výrobní jednotky bude rozdíl nákladů mezi po sobě následujícími výrobními jednotkami menší než $10\ 000\ \text{Kč}$.

Doplňkové aktivity	
Žáci mohou sami tvořit další otázky, které se týkají dané problematiky a odpovědi hledat v grafu.	
Obrazový materiál	Dílo autora