

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

JAK SI USNADNIT VÝPOČET 2

Popis aktivity

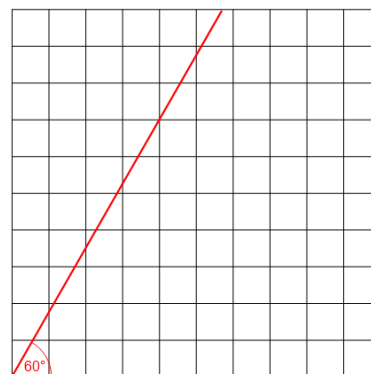
Vyslovení hypotézy, přímý důkaz.

Předpokládané znalosti

Operace s čísly, goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku

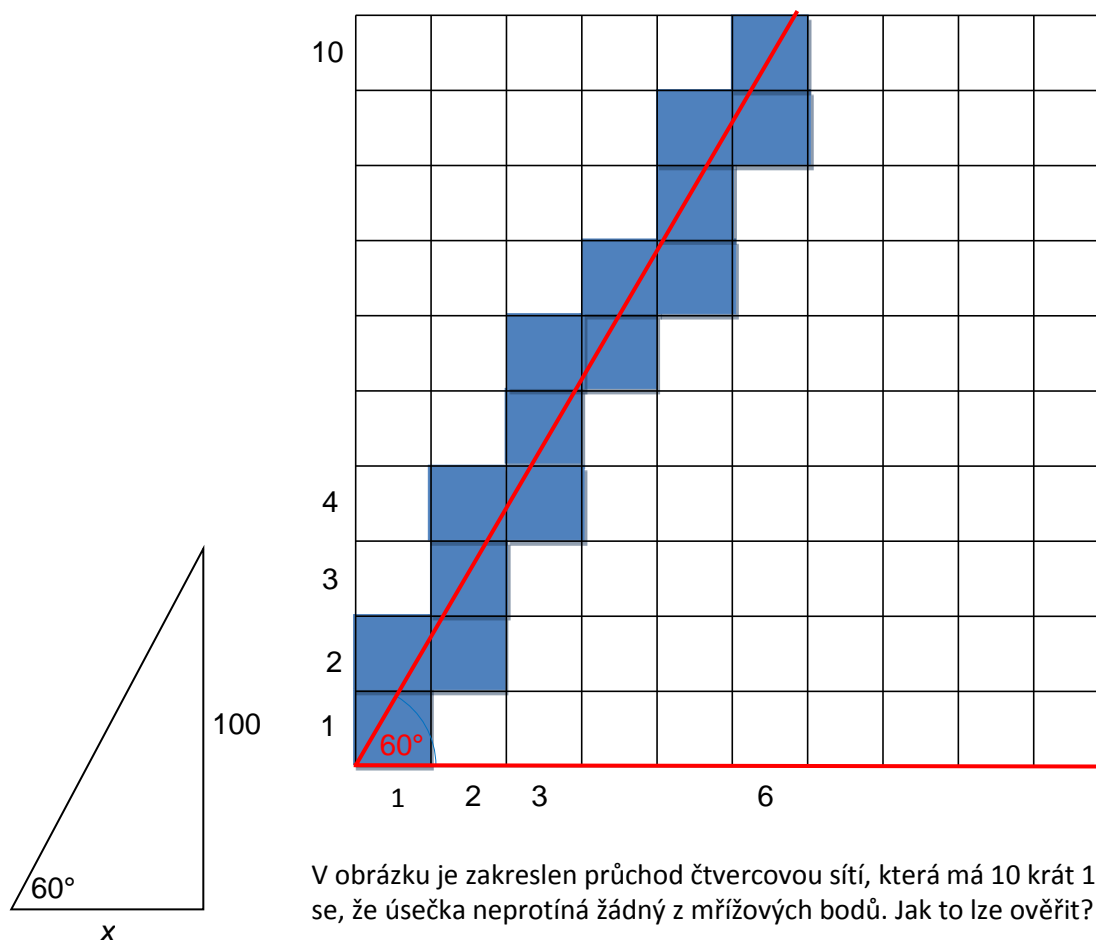
Zadání

Čtvercová síť má 10 krát 10 polí. Sestrojíme dvě úsečky, které se protínají v počátku. Jedna úsečka je sestrojena ve směru kladné části osy x , druhá úsečka s ní svírá úhel 60° . Vodorovná úsečka prochází 11 mřížovými body, druhá úsečka kromě počátku žádným z mřížových bodů neprochází.



Čtvercovou síť je možné neomezeně rozšiřovat. Kolika polí projde šikmá úsečka, než se trefí do některého z mřížových bodů?

Možný postup řešení, metodické poznámky



V obrázku je zakreslen průchod čtvercovou sítí, která má 10 krát 10 polí. Zdá se, že úsečka neprotíná žádný z mřížových bodů. Jak to lze ověřit?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Čára tvoří přeponu pravoúhlého trojúhelníku s vnitřním úhlem 60° . Pokud protíná k -tou vodorovnou čáru, svíslá odvěsna má délku x , kde za k lze postupně dosadit všechna celá čísla od 1 do 10. Platí: $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{k}{x}$, tedy $x = \frac{k}{\operatorname{tg} 60^\circ}$. Pro všechna uvedená k lze ověřit, že hodnota x není celé číslo., tedy čára nemůže protnout hranici v mřížovém bodě.

Např. pro $k = 5$ je $x = \frac{5}{\operatorname{tg} 60^\circ} \doteq 2,9$.

Obdobně můžeme pokračovat i s většími celými čísly a stále získáváme hodnoty x , které nejsou celými čísly. Podezření, že se nikdy k žádnému celému číslu nedopracujeme ani při neomezeném rozšíření čtvercové sítě, však musíme dokázat.

Platí:

$$x = \frac{k}{\operatorname{tg} 60^\circ}, \text{ kde } x \in \mathbf{N}$$

$$x = \frac{k}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{k}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = k \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{k}{3} \cdot \sqrt{3}$$

Hodnotu x získáme tak, že racionální číslo $\frac{k}{3}$ násobíme iracionálním číslem $\sqrt{3}$, tedy výsledkem je iracionální číslo. Tím je dokázáno, že čára nemůže nikdy procházet mřížovým bodem.

Doplňkové aktivity

Ve čtvercové síti 50 krát 50 polí najděte takový úhel, aby čára procházela mřížovým bodem až při příchodu do padesátého pole.

Řešení

Existuje celá škála řešení, např. mřížový bod při vstupu do pole [2; 50], resp. [4; 48] apod.

Platí:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{49}{1}, \text{ tedy } \alpha \doteq 88,83^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{47}{3}, \text{ tedy } \alpha \doteq 86,35^\circ$$

Pozor! Pokud by se vstupovalo přes mřížový bod např. do pole [3; 49] nebo [26; 26] apod., čára bude procházet mřížovým bodem dříve než před 50. polem!

Obrazový materiál

Dílo autora