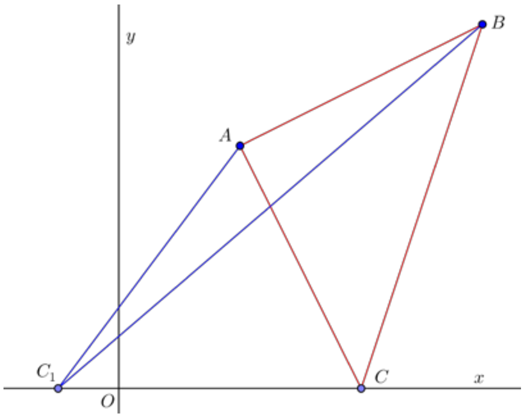
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KAM S TŘETÍM BODEM?

Popis aktivity
Určení třetího vrcholu trojúhelníka tak, aby obsah trojúhelníka nepřesáhl danou mez.
Předpokládané znalosti
Souřadnice vektoru, užití vektorového součinu k výpočtu obsahu trojúhelníka, řešení nerovnice s absolutní hodnotou.
Zadání
V rovině jsou dány body $A[2;4]$, $B[6;6]$. Určete na ose x bod C tak, aby obsah trojúhelníka ABC nebyl větší než $10\ \mathrm{j}^2$.
Možný postup řešení, metodické poznámky

Znázorníme si situaci v soustavě souřadnic v rovině. S měnící se polohou bodu C se bude měnit i obsah trojúhelníka – v případě, že bod C bude ležet na přímce AB, trojúhelník nevznikne.



Jestliže bod C leží na ose x, pak $C[x_C;0]$. Zavedeme vektory $B-A=\vec{u}=(4;2)$ a $C-A=\vec{v}=(x_C-2;-4)$. Obsah trojúhelníka můžeme určit pomocí vztahu $S=\dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2}$, budeme-li uvažovat vektory $\vec{u}=(4;2;0)$, $\vec{v}=(x_C-2;-4;0)$. V našem případě je $\vec{u}\times\vec{v}=(0;0;-12-2x_C)$,

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{0+0+(-12-2x_C)^2}=\sqrt{(12+2x_C)^2}=|12+2x_C|.$$

Nemá-li obsah být větší než $10\ j^2$, pak musí platit:

$$S\le 10 \Leftrightarrow \frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2}\le 10 \Leftrightarrow |\vec{u}\times\vec{v}|\le 20, \text{ tedy}$$

$$|12+2x_C|\le 20 \Leftrightarrow |6+x_C|\le 10.$$

Pomocí geometrické interpretace absolutní hodnoty rozdílu dostáváme

$$|6+x_C|\le 10 \Leftrightarrow |x_C-(-6)|\le 10 \Leftrightarrow x_C\in\langle -16;4\rangle.$$

Z tohoto intervalu musíme vyjmout bod, ve kterém přímka AB protíná osu x - buď určíme rovnici přímky AB a určíme na ní bod, pro který $y=0$, nebo využijeme toho, že mají-li tři body ležet v jedné přímce, pak vektory jimi určené musí být lineárně závislé nebo vyjdeme z toho, že v takovém

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

případě by bylo $S=0$, tedy také $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|12+2x_C\right|=0$. Ve všech případech dostaneme hodnotu $x_C=-6$. Aby obsah trojúhelníka nebyl větší než $10\ j^2$, musí pro první souřadnici bodu C platit: $x_C\in\left\langle -16;-6\right)\cup\left(-6;4\right\rangle$.
Doplňkové aktivity
Využijeme-li Geogebru, můžeme pohybem bodu C určovat různé trojúhelníky a jejich obsahy a odhadnout výsledek.