

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

SVÁZANÁ FUNKCE

Popis aktivity

Kreslení grafů funkcí zčásti definovaných (svázaných) některými vlastnostmi a určování jejich dalších vlastností.

Předpokládané znalosti

Vlastnosti funkcí: hodnota funkce v bodě, monotonie, tečna grafu funkce, směrnice tečny, lokální extrém.

Potřebné pomůcky

Rýsovací potřeby

Zadání

Do soustavy souřadnic zakreslete část grafu funkce s následujícími vlastnostmi:
V každém bodě grafu lze sestrojit tečnu. V intervalu $(-6; -4)$ je funkce klesající.
Právě dva body $M[0; 6]$ a $N[4; 6]$ jsou body dotyku grafu funkce a společné tečny ke grafu funkce.
Lokální minimum funkce je v bodě $Q[7; 1]$.

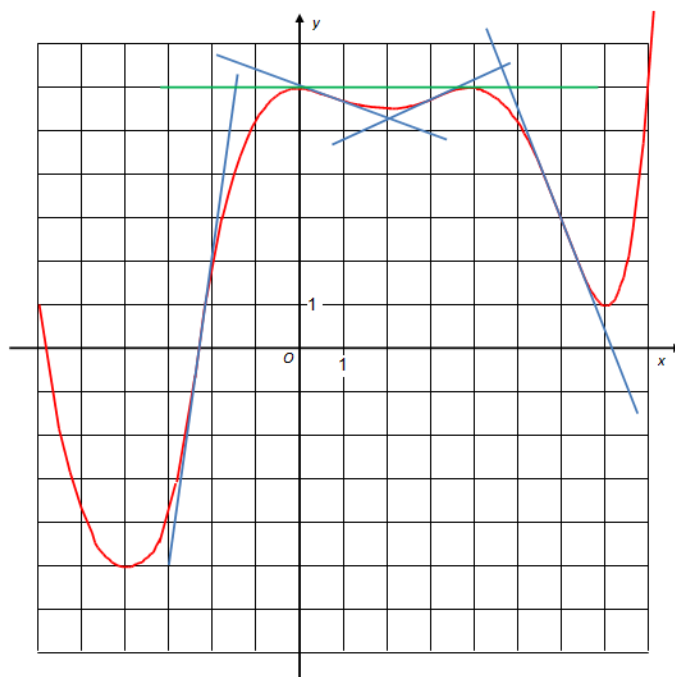
- Jak vypadá graf funkce, v jehož každém bodě lze sestrojit tečnu?
- Určete intervaly monotonie funkce.
- Určete lokální extrémy.
- Popište souvislosti mezi B a C.
- Najděte všechny tečny grafu funkce, které graf funkce v bodě dotyku protínají.
- Zapište intervaly, v nichž je funkce konvexní a konkávní.
- Popište souvislosti mezi E a F.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Funkce není přesně určena, ale je „svázaná“ určitými vlastnostmi.
Jedno z možných řešení:

Vlastnosti sestavené funkce.

- Funkce je spojitá a „hladká“, tj. nemá žádné zuby (v každém bodě existuje derivace funkce).
- Funkce je klesající v intervalech $(-6; -4)$, $(0; 2,2)$, $(4; 7)$. Rostoucí je v intervalech $(-4; 0)$, $(2,2; 4)$, $(7; \dots)$.
- Lokální extrémy jsou v bodech $x = -4$; $x = 0$; $x = 2,2$; $x = 4$.
- Body, v nichž funkce nabývá lokálních extrémů, oddělují intervaly monotonie.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- E. Existují čtyři takové tečny s body dotyku $A[-2,4; 0]$, $B[0,5; 5,7]$, $C[3; 5,7]$, $D[6; 3]$.
- F. Střídají se intervaly, v nichž je funkce konvexní (prohnutá) a konkávní (ohnutá). Jednotlivé intervaly jsou $(-6; -2,4)$, $(-2,4; 0,5)$, $(0,5; 3)$, $(3; 6)$, $(6; \dots)$
- G. První souřadnice bodů dotyku tečen s grafem funkce jsou tzv. inflexní body, v nichž se mění konvexní funkce na konkávní nebo opačně.

Doplňkové aktivity

1. Žáci mohli sestavit i jiný graf funkce s jinými vlastnostmi. Najděte společné vlastnosti u všech těchto funkcí.
2. Jak souvisí monotonie funkce se směrnici tečny?
3. Zakreslete grafy funkcí, které splní jednu, dvě, ..., současně všechny následujících podmínky:
Funkce je monotónní.
Každým bodem grafu lze vést tečnu, která má s grafem funkce konečný počet společných bodů.
Graf prochází body $K[-2; 0]$ a $L[2; 2]$.
Body K, L jsou body dotyku grafu funkce a společné tečny.
Graf protíná přímku KL pouze v bodě K .
Přímka KL je současně asymptotou funkce pro $x \rightarrow \infty$ a pro $x \rightarrow -\infty$.
Uveďte další vlastnosti funkce. Jaký je minimální počet inflexních bodů?

Řešení:

Graf funkce se vine kolem přímky KL . Dva inflexní body jsou v intervalu $(-\infty; -2)$ další je $x = -2$, dva jsou v intervalu $(-2; 0)$ a ještě dva v intervalu $(2; \infty)$. Funkce má tedy minimálně 7 inflexních bodů.

Obrazový materiál

Dílo autora