

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TĚŽKÁ ÚLOHA

Popis aktivity	
Seznámení se zajímavou vlastností čísel, hledání dalších čísel se stejnou vlastností.	
Předpokládané znalosti	
Vyjádření po sobě jdoucích čísel pomocí proměnné, sestavení rovnice, řešení kvadratické rovnice	
Zadání	
<p>V Treťjakovské státní galerii v Moskvě se nachází obraz malíře Bogdanova-Bělského s názvem Počítání z hlavy. Na obraze je školní tabule, na které je křídou napsáno:</p> $\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$ <p>Před tabulí je učitel se svými žáky – je vidět, že žáci usilovně přemýšlejí. Prý tento učitel učil své žáky počítat z paměti a při výpočtech využívat zajímavých vlastností čísel.</p> <p>V tomto případě je $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$ a $13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$, tedy</p> $\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = \frac{2 \cdot 365}{365} = 2$ <p>Zjistěte, zda existují ještě další pětky po sobě jdoucích čísel, pro která platí, že součet druhých mocnin prvních tří je roven součtu druhých mocnin posledních dvou.</p>	
Možný postup řešení, metodické poznámky	
<p>Hledáme tedy čísla, pro která platí: $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2$.</p> <p>V mnoha příkladech, kde počítáme s čísly, která po sobě následují, je pro výpočty výhodnější označit x ne první, ale prostřední (druhé) hledané číslo. Využijeme-li toho při řešení naší úlohy, pak budeme řešit rovnici $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2$. Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 10x - 11 = 0$, kterou vyřešíme rozkladem na součin. Platí $x^2 - 10x - 11 = 0 \Leftrightarrow (x-11) \cdot (x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 11 \vee x = -1$.</p> <p>Protože tato rovnice má právě dvě řešení, existují právě dvě pětky čísel s výše uvedenou vlastností. Jedna z pětic je ta, která je uvedena na obraze, druhá je tvořena čísly $-2, -1, 0, 1, 2$.</p>	
Doplňkové aktivity	
Můžeme dát žákům za úkol obraz na internetu najít a zjistit o něm více.	
Obrazový materiál	http://officeimg.vo.msecnd.net/en-us/images/MH900332680.jpg