TO NEŘEŠ

Popis aktivity

Řešení algebraických nerovnic užitím grafů mocninných funkcí.

Předpokládané znalosti

Vlastnosti mocninných funkcí, grafy mocninných funkcí

Zadání

Na základě grafů mocninných funkcí řešte nerovnice:

a) $x^2 < x$

b) $x^3 < x^2$

c) $x^4 < x^3$

.

.

.

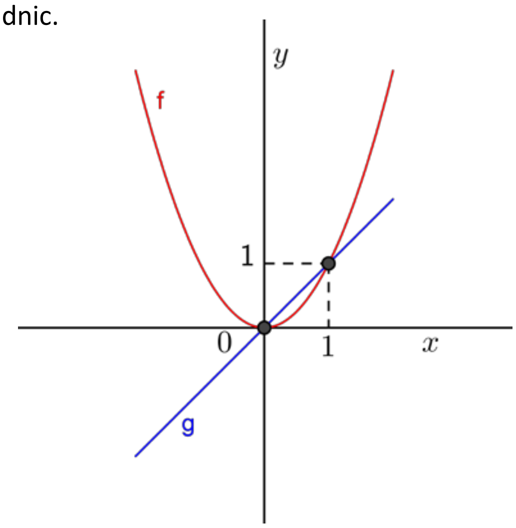
Obecně: $x^{2n} < x^{2n-1}$, $n \in N$

$x^{2n+1} < x^{2n}, n \in N$

Výsledky ověřte numericky.

Možný postup řešení, metodické poznámky

a) Budeme uvažovat funkci $f: y = x^2$ a funkci $g: y = x$ a načrtneme grafy těchto funkcí v téže soustavě souřadnic.

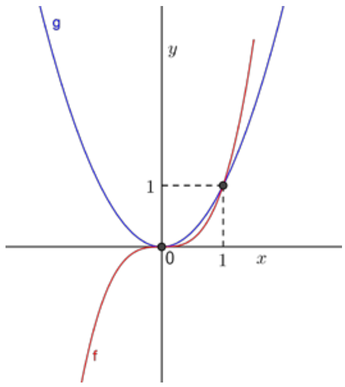


Definičními obory obou funkcí je množina R. Hledáme všechna $x \in R$, pro která je hodnota funkce f menší, než hodnota funkce g - tedy interval, ve kterém je graf „červené“ funkce „pod“ grafem „modré“ funkce. Z grafického znázornění vidíme, že se jedná o interval $(0;1)$.

Numerické řešení: $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (0;1)$

b) Budeme postupovat stejně, tentokrát $f: y = x^3$, $g: y = x^2$.

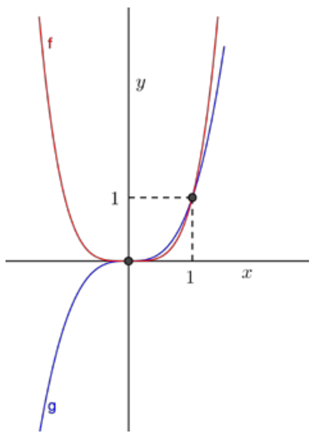
Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



Grafické řešení ukazuje výsledek – graf „červené“ funkce je pod grafem „modré“ funkce $\forall\ x \in (-\infty;0) \cup (0;1)$.

Numerické řešení: $x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0) \cup (0;1)$.

c) Situaci pro $f: y = x^4$, $g: y = x^3$ ukazuje následující obrázek, ze kterého opět vidíme výsledek $(0;1)$.



Numerické řešení výsledek potvrdí: $x^4 < x^3 \Leftrightarrow x^4 - x^3 < 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (0;1)$.

Výsledky získané řešením konkrétních příkladů můžeme zobecnit – oborem hodnot mocninných funkcí se sudým přirozeným exponentem je množina nezáporných reálných čísel, grafy těchto funkcí se rozkládají nad osou x. Oborem hodnot mocninných funkcí s lichým přirozeným exponentem je množina všech reálných čísel, jejich grafy se rozkládají pod osou x i nad osou x. Všechny funkce mají stejné hodnoty v bodech $x = 0$ a $x = 1$. Grafy těchto funkcí (kromě funkce $f: y = x$) pak mají podobný průběh pro sudý exponent a podobný průběh pro lichý exponent a řešením všech nerovnic typu $x^{2n} < x^{2n-1}$, $n \in N$ bude tedy vždy $(0;1)$ a řešením nerovnic typ $x^{2n+1} < x^{2n}, n \in N$ bude vždy $(-\infty;0) \cup (0;1)$.

Doplňkové aktivity
Lze měnit znaménko nerovnosti a opět hledat grafické řešení příslušných nerovnic.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.