ZAHRAJME SI KULEČNÍK

Popis aktivity

Určení souřadnic bodů v rovině, ověření rovnoběžnosti pomocí vektorů.

Předpokládané znalosti

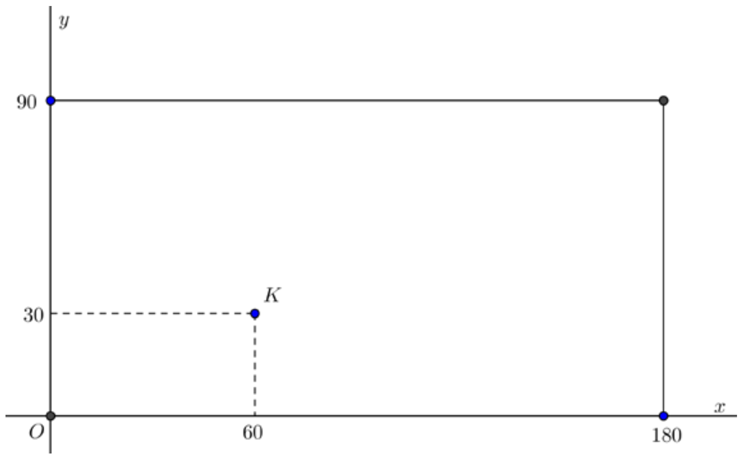
Souřadnice bodů v rovině, úhel dopadu a úhel odrazu, vlastnosti středové souměrnosti

Zadání

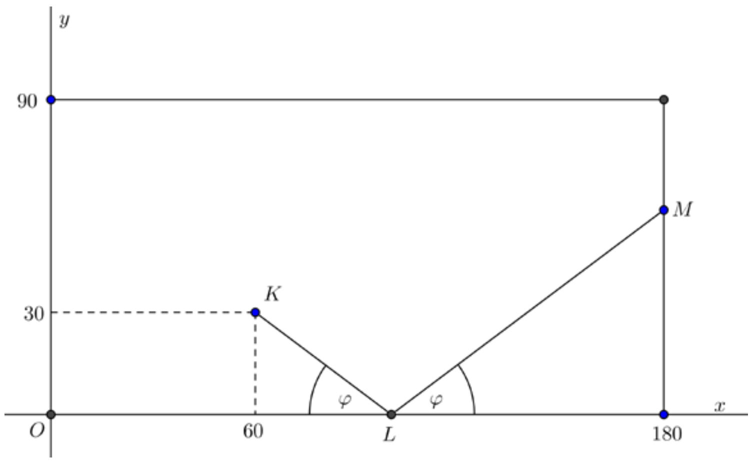
Na kulečníkovém stole typu Karambol 180 s rozměry hrací plochy 180cm x 90cm je umístěna koule. Po třech odrazech na sousedních mantinelech stolu se koule vrátí do výchozího bodu. Ukažte, že dráha koule je hranicí rovnoběžníka a určete souřadnice všech bodů odrazu, jestliže počáteční poloha koule je dána souřadnicemi.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Hrací plochu stolu znázorníme v soustavě souřadnic podle obrázku a úlohu budeme řešit s konkrétními hodnotami pro počáteční polohu koule K .

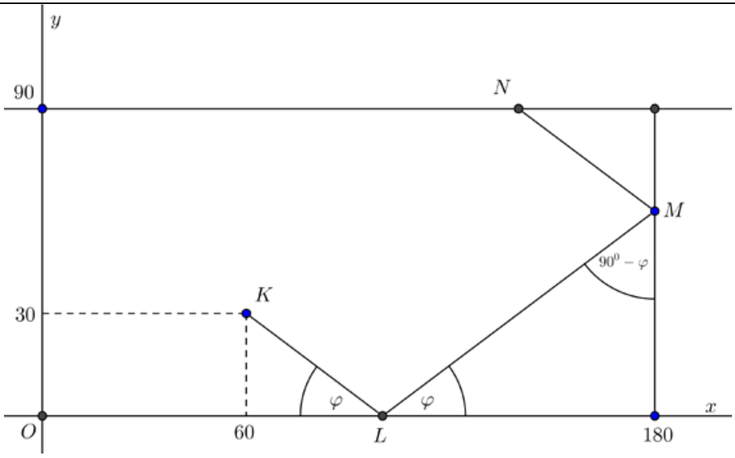


Po prvním „šťouchu“ od mantinelu dostaneme tuto situaci (úhel odrazu je roven úhlu dopadu):

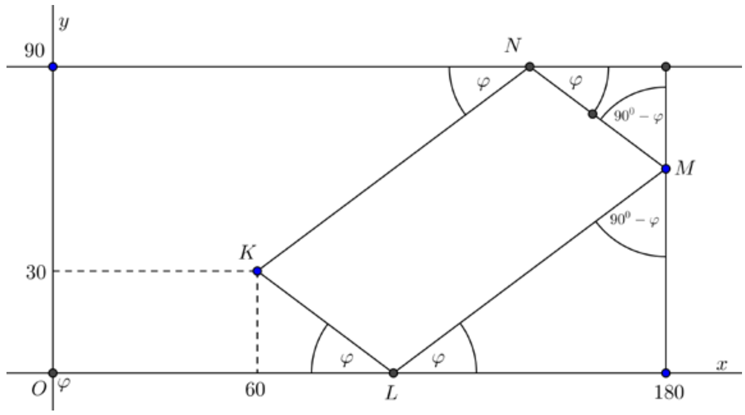


Jestliže jsme úhel prvního odrazu označili φ, pak ve vzniklém pravoúhlém trojúhelníku s přeponou LM má zbývající ostrý úhel velikost $90^0 - \varphi$. Dalšímu kroku odpovídá následující obrázek:

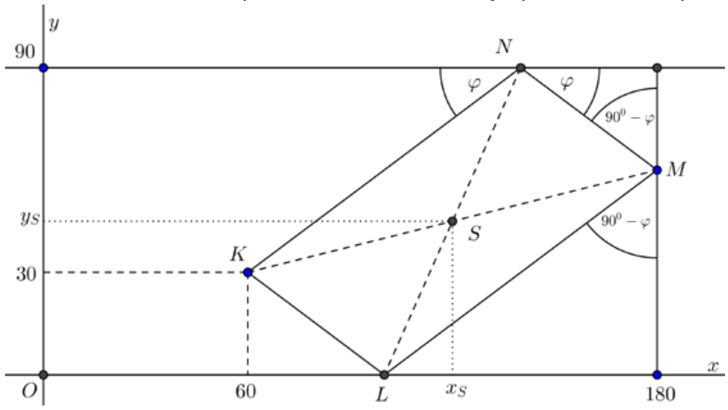
Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou MN má úhel při vrcholu M velikost $90^0 - \varphi$, úhel při vrcholu N má tedy velikost φ. Jestliže se po posledním „šťouchu“ koule dostane opět do bodu K, musí být spojnice NK rovnoběžná s úsečkou LM. Čtyřúhelník $KLMN$ musí být tedy rovnoběžník.



Rovnoběžník je útvar středově souměrný, střed souměrnosti je průsečík úhlopříček.



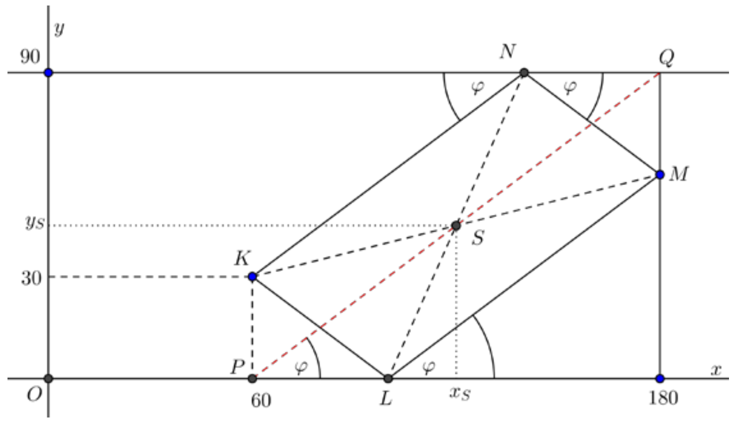
Protože střed úsečky KM je středem úsečky LN a souřadnice středu úsečky jsou aritmetickým průměrem souřadnic krajních bodů, je $S[120;45]$.

Známe-li souřadnice bodů K a S, můžeme určit souřadnice bodu M. Opět využitím aritmetického

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

průměru získáváme $M[180;60]$.

Z vlastností středové souměrnosti dále vyplývá, že přímky, které procházejí body LM a KN musí být rovnoběžné s přímkou PQ.



Směrnice těchto přímek $k = tg\varphi = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}$. Pro bod $N[x_N;90]$, který leží na přímce dané bodem $K[60;30]$ a směrnicí tedy musí platit: $y - y_N = k \cdot (x - x_N)$, po dosazení $30 - 90 = \frac{3}{4} \cdot (60 - x_N)$, tedy $x_N = 140$.

K určení souřadnic bodu $L[x_L;0]$ můžeme využít toho, že vektory $M - L$ a $N - K$ jsou stejné, tedy $180 - x_L = 140 - 60 \Rightarrow x_L = 100$.

Souřadnice bodů L, M, N tedy jsou: $L[100;0]$, $M[180;60]$, $N[140;90]$.

Protože jsme ukázali, že čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník, můžeme nyní pomocí vektorů zkontrolovat, že dvojice protějších stran jsou rovnoběžné a mají stejnou velikost.

Tak např. $K - L = (-40;30) \Rightarrow |K - L| = \sqrt{(-40)^2 + (30)^2} = 50$

$$N - M = (-40;30) \Rightarrow |N - M| = \sqrt{(-40)^2 + (30)^2} = 50$$

Doplňkové aktivity

Můžeme požadovat také konstrukční řešení – využijeme středové souměrnosti a přímky PQ. Žáci mohou zkusit načrtnout situace, kdy se koule poprvé odráží od jiného mantinelu resp. diskutovat možnosti pro umístění bodu K.

Úlohu můžeme řešit i obecně – vyjdeme z kulečníkového stolu s rozměry hrací plochy a, b a umístění bodu $K[x_0; y_0]$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.