

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ZKUSTE SI TO

Popis aktivity
Určování hodnot výrazů dosazováním, porovnávání hodnot, úpravy výrazů.
Předpokládané znalosti
Mocninné funkce, binomická věta, výrazy, zaokrouhlování, přibližná hodnota
Zadání
<p>Matematika je sice přesná věda, v praxi a v aplikacích se však někdy spokojíme s výsledky zaokrouhlenými, přibližnými.</p> <p>Podle binomické věty platí $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$:</p> $(1+x)^n = 1 + n \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n,$ <p>Ize však ukázat, že pokud číslo x v absolutní hodnotě bude velmi malé, pak výraz na pravé straně můžeme nahradit výrazem $1 + nx$ (tedy můžeme vynechat všechny členy, které obsahují kvadratický člen a vyšší, protože nemohou výsledek „příliš ovlivnit“) - viz aktivitu Náhradníci.</p> <p>Pokud vztah $(1+x)^n \approx 1 + nx$ rozšíříme i na celá čísla, můžeme pro $n = -1$ psát:</p> $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} \approx 1 - x.$ <p>a) Zapište obdobný vztah pro $(1-x)^{-1}$ a oba vztahy ověřte pro zvolené hodnoty x.</p> <p>b) Pokuste se zdůvodnit, že $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ a vztah opět ověřte dosazením konkrétních hodnot x.</p>
Možný postup řešení, metodické poznámky
<p>a) Obdobně můžeme zapsat: $(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} \approx 1 + x$. Nyní oba vztahy ověříme např. pro $x = 0,01$.</p> $\frac{1}{1+0,01} = \frac{1}{1,01} = \frac{100}{101} = 0,9900$ $1 - 0,01 = 0,99$ <p>Skutečně $\frac{1}{1+0,01} \approx 1 - 0,01$.</p> <p>Obdobně $\frac{1}{1-0,01} = \frac{1}{0,99} = \frac{100}{99} = 1,01$</p> $1 + 0,01 = 1,01.$ <p>Takže $\frac{1}{1-0,01} \approx 1 + 0,01$</p>

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

b) Jestliže $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ pro $|x| < 1$, pak jistě

$$1+x \approx \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2, \text{ tedy } 1+x \approx 1+x + \frac{1}{4}x^2 \text{ a pokud vynecháme kvadratický člen,}$$

pak $1+x \approx 1+x$ platí a tedy platí i výše uvedený vztah.

Zkusíme dosadit např. $x = -0,1$. Pak $\sqrt{1-0,1} = \sqrt{0,9} \doteq 0,9487$,

$1 + \frac{1}{2} \cdot (-0,1) = 1 - 0,05 = 0,95$. Vidíme opět výsledek, který se „příliš neliší“, lze tedy psát,

že $\sqrt{1-0,1} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot (-0,1)$.

Doplňkové aktivity

V tabulkách mohou žáci najít další „užitečné“ aproximace – např. $e^x \approx 1+x$, $e^{-x} \approx 1-x$, $\ln(1+x) \approx x$, $\sin x \approx x$ a mohou je ověřovat dosazováním nebo náčrtky grafů.