

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### ČTVEREC A PŘÍMKA

#### Popis aktivity

Určení vzdálenosti.

#### Předpokládané znalosti

Goniometrické vzorce, úpravy goniometrických výrazů

#### Potřebné pomůcky

Psací a rýsovací potřeby, pracovní list pro žáka

#### Zadání

Je dán čtverec o straně 1 jednotka. Středem čtverce ved' libovolnou přímku  $p$  tak, aby přímka  $p$  nebyla osou souměrnosti čtverce. Urči součet druhých mocnin (čtverců) všech vzdáleností přímky  $p$  od vrcholů čtverce.

#### Možný postup řešení, metodické poznámky

1) Znázorníme situaci na obrázku.

2) V pravoúhlém trojúhelníku  $XBS$ , kde známe

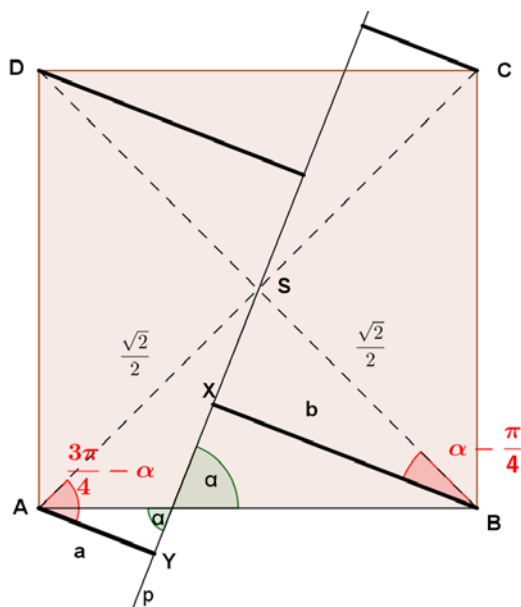
přeponu, vyznačíme vnitřní úhel  $\alpha - \frac{\pi}{4}$  a

vyjádříme hledanou vzdálenost  $b$  pomocí goniometrické funkce:

$\Delta XBS$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

Úhlopříčka čtverce  $u = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ .



3) Upravujeme pomocí goniometrických vzorců:

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\alpha\right) = \frac{1}{2} \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)$$

4) Podobně postupujeme i v trojúhelníku  $AYS$ , kde též známe přeponu. Vyznačíme-li vnitřní úhel

$\frac{3\pi}{4} - \alpha$ , vyjádříme hledanou vzdálenost  $a$  pomocí goniometrické funkce:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

5) Opět upravujeme pomocí goniometrických vzorců:

$\Delta AYS$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\alpha \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\alpha\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-\cos\alpha + \sin\alpha) \end{aligned}$$

6) Pro součet druhých mocnin vzdáleností přímky  $p$  od vrcholů čtverce platí:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (a^2 + b^2) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \frac{1}{4} \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha)^2\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin^2\alpha - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha) + \frac{1}{2} \cdot (\sin^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos^2\alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos^2\alpha = \\ &= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Součet druhých mocnin vzdáleností přímky  $p$  od vrcholů čtverce je roven 1 jednotce.

**Doplňkové aktivity**

Žáci mohou úlohu sestrojít a provést kontrolu měření.

<b>Literatura</b>	Archiv autora
<b>Obrazový materiál</b>	GeoGebra – dílo autora