INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ČTYŘI BODY

Popis aktivity
Určit rovnici roviny danou třemi body. Napsat rovnici přímky v prostoru. Aplikovat výpočet vzdálenosti bodu od roviny.
Předpokládané znalosti
Vektor v prostoru, vektorový součin, normálový a směrový vektor, výpočet obsahu obecného trojúhelníku, řešení soustavy rovnic.
Potřebné pomůcky
Kalkulátor, tabulky, pracovní list pro žáka
Zadání
V prostoru jsou dány body: $A[0;-1;1]$, $B[4;-2;-1]$, $C[-3;-1;2]$, $D[2;3;-2]$. 1. Napište obecnou rovnici roviny $\rho = ABC$. 2. Vypočtěte vzdálenost bodu D od roviny ρ. 3. Napište rovnici přímky d, která je kolmá k rovině ρ a prochází bodem D. 4. Vypočtěte objem trojbokého jehlanu $ABCD$.
Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Obecná rovnice roviny v prostoru má tvar: $ax+by+cz+d=0$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla a alespoň jedno z čísel a, b, c je různé do nuly. Přitom je $\vec{n}=(a;b;c)$ normálový (kolmý) vektor této roviny, $[x;y;z]$ jsou souřadnice bodů ležících v této rovině a konstanta d charakterizuje posunutí roviny v normálovém směru.

- Body ABC tvoří rovinu, pokud neleží v jedné přímce. Ověření lze provést několika způsoby:

a) určit rovnici přímky dvěma body např. A, B a ukázat, že bod C na ní neleží;

b) vypočítat souřadnice vektorů např. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ a ověřit jejich lineární nezávislost;

c) určit souřadnice dvou vektorů např. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ a vypočítat jejich úhel.

Proveďme ověření podle bodu c):

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(4;-1;-2) \quad \wedge \quad \overrightarrow{AC}=C-A=(-3;0;1)$$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{4\cdot(-3)+(-1)\cdot 0+(-2)\cdot 1}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+0^2+1^2}}=\frac{-14}{\sqrt{210}}\doteq -0{,}9661$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha \doteq 165°2'}}$$

Vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ svírají tupý úhel, proto body ABC neleží v přímce a vytvoří rovinu ρ.

- Normálový vektor roviny ρ vypočtěme pomocí vektorového součinu lineárně nezávislých vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left((-1)\cdot 1-(-2)\cdot 0;(-2)\cdot(-3)-4\cdot 1;4\cdot 0-(-1)\cdot(-3)\right)=(-1;2;-3)=\overrightarrow{n_\rho}$$

- Konstantu d vypočteme z rovnice $-x+2y-3z+d=0$ dosazením souřadnic některého bodu, který v této rovině leží.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Jiří Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Zvolme např. bod $A[0;-1;1]$: $(-1)\cdot 0+2\cdot(-1)-3\cdot 1+d=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{d=5}}$

Po jednoduché úpravě je rovnice roviny $\rho: x-2y+3z-5=0$.

Správnost celého výpočtu můžeme ověřit dosazením souřadnic každého bodu do vypočtené rovnice:

$A:\quad 1\cdot 0-2\cdot(-1)+3\cdot 1-5=0$

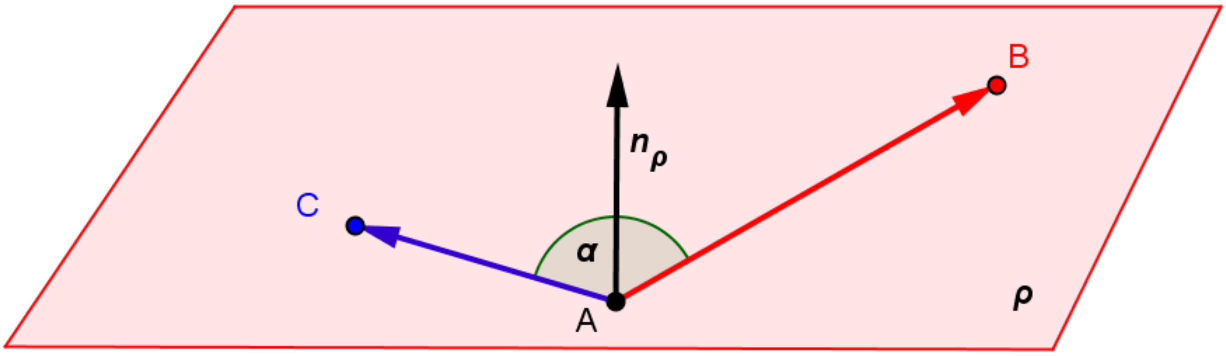
$0=0 \quad \Rightarrow \quad A\in\rho$

$B:\quad 1\cdot 4-2\cdot(-2)+3\cdot(-1)-5=0$

$0=0 \quad \Rightarrow \quad B\in\rho$

$C:\quad 1\cdot(-3)-2\cdot(-1)+3\cdot 2-5=0$

$0=0 \quad \Rightarrow \quad C\in\rho$



Body ABC tvoří rovinu ρ.

Jiný způsob: a) Obecný tvar rovnice roviny bychom mohli získat z parametrického tvaru rovnice této roviny vyloučením parametru.

b) Řešit úkol pomocí soustavy tří rovnic o čtyřech neznámých a, b, c, d, kde do rovnice $ax+by+cz+d=0$ za neznámou hodnotu d zvolíme vhodné nenulové číslo, a pak za proměnné hodnoty x, y, z dosadíme postupně souřadnice každého bodu ABC.

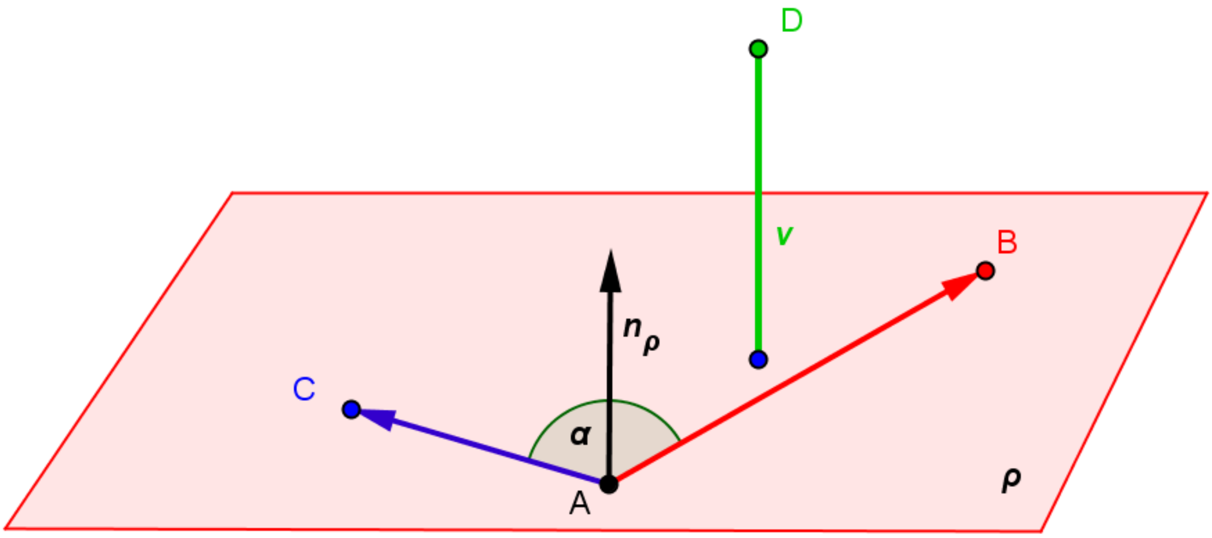
2. Vzdálenost bodu $M[x_0;y_0;z_0]$ od roviny $\alpha: ax+by+cz+d=0$ vypočteme přímo pomocí vzorce: $v=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, kde je v čitateli zlomku obecná rovnice dané roviny a v ní dosazené souřadnice daného bodu, a ve jmenovateli zlomku je výpočet velikosti normálového vektoru této roviny.

- Pro bod D a rovinu ρ tedy platí: $v=\dfrac{|1\cdot 2-2\cdot 3+3\cdot(-2)-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\dfrac{|-15|}{\sqrt{14}}\doteq \underline{\underline{4}}$

Bod D je od roviny ρ vzdálen 4 délkové jednotky.

Jiný způsob: Vypočítat souřadnice průsečíku přímky, která prochází bodem D a je kolmá k rovině ρ, a vzdálenost bodu D od roviny ρ vypočítat jako vzdálenost dvou bodů v prostoru.

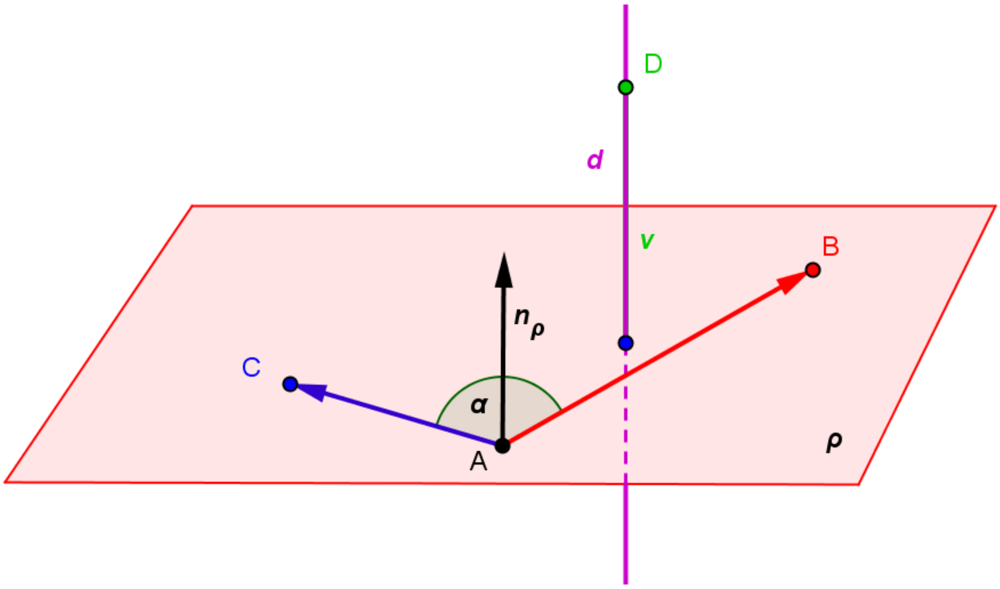
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



3. V prostoru zapíšeme rovnici přímky v parametrickém tvaru. K tomu potřebujme znát její směrový vektor a alespoň jeden její bod.

- Protože přímka d má být kolmá k rovině ρ, za její směrový vektor můžeme zvolit normálový vektor roviny ρ a do rovnice přímky pak dosadíme souřadnice bodu D.

$$d: \quad x = 2 + t$$
$$y = 3 - 2t$$
$$z = -2 + 3t \quad , kde \;\; t \in R$$



4. Pro výpočet objem trojbokého jehlanu použijeme vzorec $V = \frac{1}{3} P v$, kde P je obsah podstavy jehlanu a v je velikost výšky jehlanu.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Jiří Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

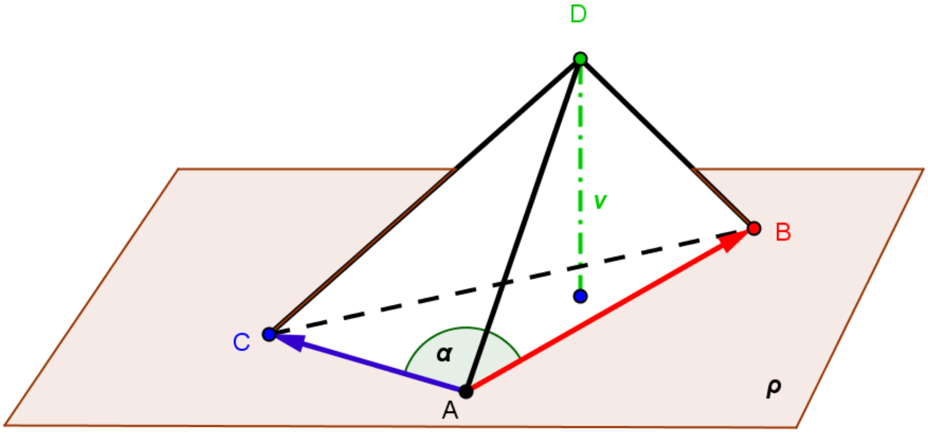
- Za podstavu daného jehlanu $ABCD$ zvolíme např. trojúhelník ABC, výškou pak bude vzdálenost bodu D od roviny ρ.

Pro výpočet obsahu trojúhelníku využijeme již vypočtené hodnoty a vzorec

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{10} \cdot \sin(165°2') \doteq 1{,}87$$

Dosaďme vypočtené hodnoty do uvedeného vzorce pro objem jehlanu: $V = \frac{1}{3} \cdot 1{,}87 \cdot 4 \doteq \underline{\underline{2{,}49}}$

Objem jehlanu $ABCD$ je asi 2,49 krychlových jednotek.



Doplňkové aktivity	
Je možno skupinám určit obecné tvary rovnice roviny pro jinou trojici bodů, vypočítat vzdálenost čtvrtého bodu od této roviny a pak vypočítat objem trojbokého jehlanu a výsledky porovnat.	
Literatura	Archiv autora
Obrazový materiál	Dílo autora