evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

DVĚ KRUŽNICE 2

Popis aktivity

Sestrojení středů stejnolehlosti dvou kružnic a jejich společných tečen. Výpočet vzdálenosti dvou bodů na základě podobnosti trojúhelníků.

Předpokládané znalosti

Stejnolehlost dvou kružnic. Podobnost trojúhelníků podle věty „uu“.

Potřebné pomůcky

Rýsovací pomůcky, pracovní list pro žáka

Zadání

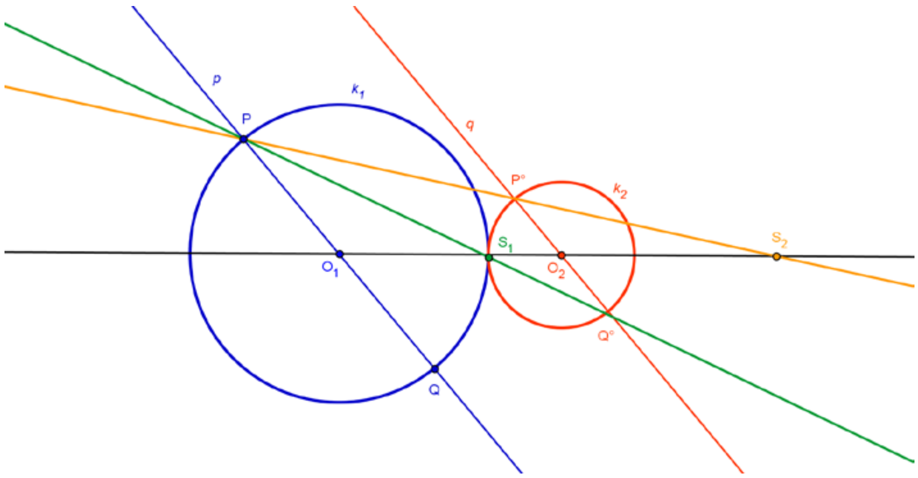
Jsou dány dvě kružnice $k_1 = (O_1; r_1 = 7\text{ cm})$, $k_2 = (O_2; r_2 = 3\text{ cm})$ a vzdálenost jejich středů $|O_1O_2| = 10\text{ cm}$.

Úkoly

1. Narýsujte jejich vnější a vnitřní střed stejnolehlosti. Popište postup konstrukce.
2. Narýsujte jejich společné tečny. Popište postup konstrukce.
3. Vypočtěte vzdálenost středů stejnolehlosti těchto dvou kružnic.
4. Vypočtěte vzdálenost bodů dotyku jejich vnějších společných tečen.

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. a)



Narýsujeme zadání úlohy - $|O_1O_2|$, k_1, k_2.

b) Středem O_1 vedeme přímku p libovolně různoběžnou se střednou (tj. přímkou $\overleftrightarrow{O_1O_2}$).

c) Středem O_2 vedeme přímku q rovnoběžnou s přímkou p.

d) Průsečíky s kružnicemi označme P, P' a Q, Q' jednotně v téže polorovině k přímce $\overleftrightarrow{O_1O_2}$.

e) Sestrojíme přímky $\overleftrightarrow{PQ}$ a $\overleftrightarrow{PQ'}$.

f) Vnitřní střed stejnolehlosti těchto kružnic S_1 je průsečíkem přímek $\overleftrightarrow{PQ'}$ a $\overleftrightarrow{O_1O_2}$. Je vlastně dotykovým bodem těchto dvou kružnic.

g) Vnější střed stejnolehlosti těchto kružnic S_2 je průsečíkem přímek $\overleftrightarrow{PQ}$ a $\overleftrightarrow{O_1O_2}$.

2. Společné tečny (pokud existují) dvou kružnic procházejí středy stejnolehlosti těchto kružnic.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Jiří Houser.
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

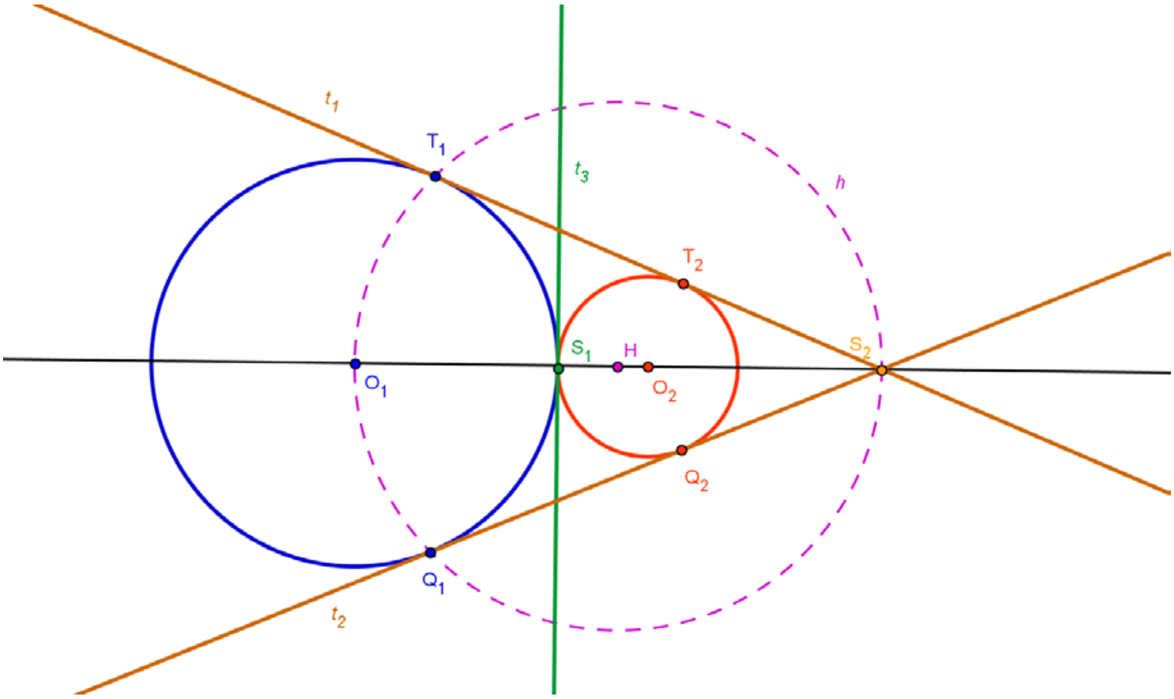
Protože $|O_1O_2| = r_1 + r_2$, existují tři společné tečny těchto dvou kružnic; dvě vnější a jedna vnitřní.

a) Nad průměrem $|O_1S_2|$ sestrojíme Thaletovu kružnici $h = \left(H = \frac{|O_1S_2|}{2}, r_h = \frac{|O_1S_2|}{2}\right)$.

b) Označíme průsečíky (body dotyku) těchto kružnic: $k_1 \cap h = \{T_1, Q_1\}$.

f) Sestrojíme vnější společné tečny těchto kružnic: $t_1 = \overleftrightarrow{T_1S_2}$ a $t_2 = \overleftrightarrow{Q_1S_2}$.

e) Sestrojíme vnitřní společnou tečnu těchto kružnic t_3. Jedná se o kolmou přímku na přímku $\overleftrightarrow{O_1O_2}$, která prochází bodem S_1.



Jiný postup: Pro sestrojení průsečíků T, Q lze použít Thaletovu kružnici vzhledem ke kružnici k_2.

3. Trojúhelník $T_1O_1S_2$ je podobný trojúhelníku $T_2O_2S_2$ podle věty „uu“.

Proto platí: $\frac{r_1}{|O_1S_2|} = \frac{r_2}{|O_2S_2|}$

$$\frac{r_1}{|O_1O_2| + |O_2S_2|} = \frac{r_2}{|O_2S_2|}$$

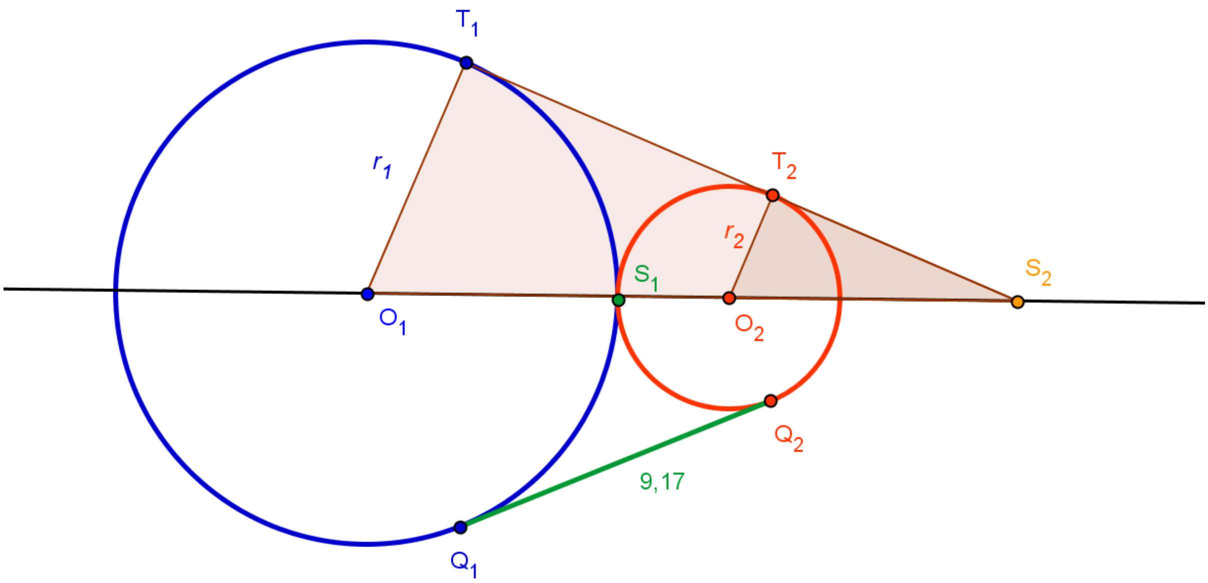
Označme $|O_2S_2| = x$:

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{10 + x} = \frac{3}{x}$$

$$\underline{\underline{x = 7{,}5}}$$

Vzdálenost středů stejnolehlosti daných kružnic je 17,5 cm.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Jiří Houser.
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



4. Vypočteme nejprve např. vzdálenost $|T_1S_2| = \sqrt{17{,}5^2 - 7^2} = \sqrt{257{,}25} \doteq \underline{\underline{16{,}04}}$.

Trojúhelník $T_1O_1S_2$ je podobný trojúhelníku $T_2O_2S_2$ podle věty „uu".

Proto platí: $\dfrac{r_1}{|T_1S_2|} = \dfrac{r_2}{|T_2S_2|}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{7}{16{,}04} = \frac{3}{|T_2S_2|}$$

$$\underline{\underline{|T_2S_2| \doteq 6{,}87}}$$

Vzdálenost bodů dotyku vnějších společných tečen je:

$$|T_1T_2| = |Q_1Q_2| = |T_1S_2| - |T_2S_2| = 16{,}04 - 6{,}87 = 9{,}17\ cm.$$

Ověření správnosti lez provést Pythagorovou větou: $|T_2S_2| = \sqrt{7{,}5^2 - 7^2} = \sqrt{47{,}25} \doteq \underline{\underline{6{,}87}}$.

Doplňkové aktivity	
1. Proveďte diskuzi počtu řešení společných tečen dvou kružnice vzhledem k velikosti poloměrů, vzdálenosti a polohy středů těchto kružnic. 2. Narýsujte některé z úloh, sestrojte středy stejnolehlosti a společné tečny. 3. Žáci (skupiny) mohou měnit velikosti poloměrů kružnice i vzdálenost jejich středů.	
Literatura	Archiv autora
Obrazový materiál	Dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Jiří Houser.
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.