INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYPOČÍTEJTE BEZ KALKULÁTORU 1

Popis aktivity

Určení hodnoty goniometrické funkce úpravou podle vhodného součtového vzorce a s využitím vztahů mezi goniometrickými funkcemi.

Předpokládané znalosti

Hodnoty znamének goniometrických funkcí na intervalu $\langle 0; 2\pi)$. Úpravy výrazů s odmocninami.

Potřebné pomůcky

Tabulky goniometrických vzorců, pracovní list pro žáka

Zadání

Bez výpočtu velikosti úhlu a bez použití kalkulátoru určete hodnoty goniometrických funkcí na intervalu $\langle 0; 2\pi)$, víte-li, že platí: $\sin\beta = -\frac{4}{5}$ a přitom $\operatorname{tg}\beta > 0$.

Úkoly:

1. Určete hodnoty dalších goniometrických funkcí pro stejný argument: $\cos\beta, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{cotg}\beta$.
2. Určete hodnoty těchto funkcí pro dvojnásobný argument: $\sin 2\beta, \cos 2\beta, \operatorname{tg} 2\beta, \operatorname{cotg} 2\beta$.
3. Určete hodnoty těchto funkcí pro poloviční argument: $\sin\frac{\beta}{2}, \cos\frac{\beta}{2}, \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$.

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Vzhledem k zadání úlohy platí, že $\beta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Pro každé $x \in R$ platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = \underline{\underline{-\frac{3}{5}}}$$

Pro každé $x \in R - \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right\}, k \in Z$ platí: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

Pro každé $x \in R - \left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}, k \in Z$ platí: $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cotg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

2. Vzorce pro dvojnásobný argument:

Pro každé $x \in R$ platí: $\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x \quad ; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$\Rightarrow \quad \sin 2\beta = 2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta = 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \underline{\underline{\frac{24}{25}}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \underline{\underline{-\frac{17}{25}}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,2\beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{17}{25}} = \underline{\underline{-\frac{24}{17}}} \quad ; \quad \mathrm{cotg}\,2\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\,2\beta} = \frac{1}{-\frac{24}{17}} = \underline{\underline{-\frac{17}{24}}}$$

3. Vzorce pro poloviční argument:

Pro každé $x \in R$ platí: $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad ; \quad \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

Vzhledem k zadání platí, že $\frac{\beta}{2} \in \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{10}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}} \quad ; \quad \cos\frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{5}}{5}}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{-\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = \underline{\underline{-2}} \quad ; \quad \mathrm{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{1}{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Doplňkové aktivity

1. Žáci (skupiny) mohou měnit zadané funkce, jejich hodnoty, nebo jen jejich znaménka (tedy polohu v konkrétním intervalu – kvadrantu).
2. Žáci (skupiny) mohou cvičně ověřit správnost úprav výpočtem velikosti úhlu pomocí kalkulátoru.

Literatura	Archiv autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser.
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.