

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

DVA TROJÚHELNÍKY

Popis aktivity
Výpočet velikosti stran na základě podobnosti trojúhelníků. Výpočet koeficientu podobnosti pro obvod a obsah dvou podobných trojúhelníků
Předpokládané znalosti
Podobnost trojúhelníků podle věty „sss“
Potřebné pomůcky
Rýsovací pomůcky, pracovní list pro žáka
Zadání
Jsou dány dva podobné trojúhelníky. Obvod prvního je 48 cm. Strany druhého trojúhelníku jsou postupně o 6 cm, 8 cm a 10 cm větší. Úkoly
<ol style="list-style-type: none"> 1. Vypočtete obvod obou trojúhelníků a určete koeficient podobnosti pro velikosti jejich obvodů. 2. Vypočtete velikost stran obou podobných trojúhelníků. 3. Vypočtete obsah obou trojúhelníků a určete koeficient podobnosti pro velikosti jejich obsahů. 4. Dokažte platnost vztahu pro dva podobné trojúhelníky obecně a ověřte ji v této úloze.
Možný postup řešení, metodické poznámky
<p>1. Necht' trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku $A'B'C'$ podle věty „sss“.</p> <p style="padding-left: 40px;">Podle podmínek úlohy je</p> $O = a + b + c = \underline{48} \quad \text{a} \quad O' = a' + b' + c' = (a + 6) + (b + 8) + (c + 10) = O + 24 = 48 + 24 = \underline{72}$ $O' = k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c = k \cdot (a + b + c) = k \cdot O$ <p>Dále platí: $\Rightarrow k = \frac{O'}{O} = \frac{72}{48} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$</p> <p>2. Z podobnosti trojúhelníků plyne:</p> $\begin{array}{ll} a' = k \cdot a \quad \wedge \quad a' = a + 6 & b' = k \cdot b \quad \wedge \quad b' = b + 8 \\ a' = \frac{3}{2} \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad a + 6 = \frac{3}{2} \cdot a & b' = \frac{3}{2} \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad b + 8 = \frac{3}{2} \cdot b \\ \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = 12 \text{ cm}}} & \Rightarrow \quad \underline{\underline{b = 16 \text{ cm}}} \\ \Rightarrow \quad \underline{\underline{a' = 18 \text{ cm}}} & \Rightarrow \quad \underline{\underline{b' = 24 \text{ cm}}} \end{array}$ $\begin{array}{l} c' = k \cdot c \quad \wedge \quad c' = c + 10 \\ c' = \frac{3}{2} \cdot c \quad \Leftrightarrow \quad c + 10 = \frac{3}{2} \cdot c \\ \Rightarrow \quad \underline{\underline{c = 20 \text{ cm}}} \\ \Rightarrow \quad \underline{\underline{c' = 30 \text{ cm}}} \end{array}$ $\Rightarrow O' = a' + b' + c' = 18 + 24 + 30 = \underline{\underline{72 \text{ cm}}}$ <p>Pro velikost stran trojúhelníku ABC platí: $a = 12 \text{ cm}$, $b = 16 \text{ cm}$, $c = 16 \text{ cm}$.</p>

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro velikost stran trojúhelníku $A'B'C'$ platí: $a' = 18$ cm, $b' = 24$ cm, $c' = 30$ cm.

3. Vzhledem k vypočteným hodnotám využijeme pro výpočet obsahu trojúhelníků Heronův vzorec:

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{O}{2} \cdot \left(\frac{O}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{O}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{O}{2} - c\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{48}{2} \cdot \left(\frac{48}{2} - 12\right) \cdot \left(\frac{48}{2} - 16\right) \cdot \left(\frac{48}{2} - 20\right)} = \sqrt{9216} = \underline{\underline{96 \text{ cm}^2}}$$

$$S_{A'B'C'} = \sqrt{\frac{O'}{2} \cdot \left(\frac{O'}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{O'}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{O'}{2} - c\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{72}{2} \cdot \left(\frac{72}{2} - 18\right) \cdot \left(\frac{72}{2} - 24\right) \cdot \left(\frac{72}{2} - 30\right)} = \sqrt{46656} = \underline{\underline{216 \text{ cm}^2}}$$

Koeficient podobnosti pro obsah těchto podobných trojúhelníků: $k_{\text{obsah}} = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{216}{96} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$

4. Jsou-li U a U' dva podobné útvary v rovině a koeficient jejich podobnosti je $k \in R^+$, potom pro každou vzdálenost $|XY|$ v útvaru U platí pro odpovídající vzdálenost $|X'Y'|$ v útvaru U' :

$$|X'Y'| = k \cdot |XY|.$$

Nechť např. trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné s koeficientem podobnosti $k \in R^+$.

Pro výpočet obsahu trojúhelníku použijme např. klasický vzorec:

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{a' \cdot v_{a'}}{2} = \frac{b' \cdot v_{b'}}{2} = \frac{c' \cdot v_{c'}}{2} = \frac{(ka) \cdot (kv_a)}{2} = \frac{(kb) \cdot (kv_b)}{2} = \frac{(kc) \cdot (kv_c)}{2}$$

$$= \frac{k^2 \cdot (a \cdot v_a)}{2} = \frac{k^2 \cdot (b \cdot v_b)}{2} = \frac{k \cdot (c \cdot v_c)}{2} = \underline{\underline{k^2 \cdot S_{ABC}}}$$

Závěr: Jsou-li U a U' dva podobné útvary v rovině a koeficient jejich podobnosti je $k \in R^+$, potom

pro poměr velikosti jejich obsahů platí: $\frac{S_{U'}}{S_U} = k^2 \Leftrightarrow S_{U'} = k^2 \cdot S_U$.

$$S_{ABC} = 96 \text{ cm}^2$$

V této úloze platí: $S_{A'B'C'} = 216 \text{ cm}^2 \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{216}{96} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = k^2$

$$k = \frac{3}{2}$$

Daný vztah pro obsahy podobných trojúhelníků, jejich obsahy a koeficient podobnosti platí.

Doplňkové aktivity

1. Ověřte jednotlivé úkoly pro jiné rozdíly mezi délkami stran podobných trojúhelníků.
2. Žáci mohou zvolit podobný trojúhelník s jiným koeficientem podobnosti.
3. Žáci (skupiny) mohou provést konstrukce dalších parametrů trojúhelníku ABC .

Literatura

Archiv autora