DVA TROJÚHELNÍKY - ŘEŠENÍ

1. Nechť trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku $A'B'C'$ podle věty „sss“.

Podle podmínek úlohy je

$$O = a + b + c = \underline{\underline{48}} \quad \text{a} \quad O' = a' + b' + c' = (a+6) + (b+8) + (c+10) = O + 24 = 48 + 24 = \underline{\underline{72}}$$

Dále platí:

$$O' = k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c = k \cdot (a+b+c) = k \cdot O$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{O'}{O} = \frac{72}{48} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

2. Z podobnosti trojúhelníků plyne:

$$\begin{aligned} a' &= k \cdot a \quad \wedge \quad a' = a + 6 \\ a' &= \frac{3}{2} \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad a + 6 = \frac{3}{2} \cdot a \\ &\Rightarrow \quad \underline{\underline{a = 12\ \text{cm}}} \\ &\Rightarrow \quad \underline{\underline{a' = 18\ \text{cm}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b' &= k \cdot b \quad \wedge \quad b' = b + 8 \\ b' &= \frac{3}{2} \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad b + 8 = \frac{3}{2} \cdot b \\ &\Rightarrow \quad \underline{\underline{b = 16\ \text{cm}}} \\ &\Rightarrow \quad \underline{\underline{b' = 24\ \text{cm}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c' &= k \cdot c \quad \wedge \quad c' = c + 10 \\ c' &= \frac{3}{2} \cdot c \quad \Leftrightarrow \quad c + 10 = \frac{3}{2} \cdot c \\ &\Rightarrow \quad \underline{\underline{c = 20\ \text{cm}}} \\ &\Rightarrow \quad \underline{\underline{c' = 30\ \text{cm}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad O' = a' + b' + c' = 18 + 24 + 30 = \underline{\underline{72\ \text{cm}}}$$

Pro velikost stran trojúhelníku ABC platí: $a = 12\ \text{cm}$, $b = 16\ \text{cm}$, $c = 16\ \text{cm}$.

Pro velikost stran trojúhelníku $A'B'C'$ platí: $a' = 18\ \text{cm}$, $b' = 24\ \text{cm}$, $c' = 30\ \text{cm}$.

3. Vzhledem k vypočteným hodnotám využijeme pro výpočet obsahu trojúhelníků Heronův vzorec:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \sqrt{\frac{O}{2} \cdot \left(\frac{O}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{O}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{O}{2} - c\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{48}{2} \cdot \left(\frac{48}{2} - 12\right) \cdot \left(\frac{48}{2} - 16\right) \cdot \left(\frac{48}{2} - 20\right)} = \sqrt{9216} = \underline{\underline{96\ \text{cm}^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{A'B'C'} &= \sqrt{\frac{O'}{2} \cdot \left(\frac{O'}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{O'}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{O'}{2} - c\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{72}{2} \cdot \left(\frac{72}{2} - 18\right) \cdot \left(\frac{72}{2} - 24\right) \cdot \left(\frac{72}{2} - 30\right)} = \sqrt{46656} = \underline{\underline{216\ \text{cm}^2}} \end{aligned}$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Jiří Houser.
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Koeficient podobnosti pro obsah těchto podobných trojúhelníků: $k_{obsah} = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{216}{96} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$

4. Jsou-li U a U' dva podobné útvary v rovině a koeficient jejich podobnosti je $k \in R^+$, potom pro každou vzdálenost $|XY|$ v útvaru U platí pro odpovídající vzdálenost $|X'Y'|$ v útvaru U':

$$|X'Y'| = k \cdot |XY|.$$

Nechť např. trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné s koeficientem podobnosti $k \in R^+$.

Pro výpočet obsahu trojúhelníku použijme např. klasický vzorec:

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{a' \cdot v_{a'}}{2} = \frac{b' \cdot v_{b'}}{2} = \frac{c' \cdot v_{c'}}{2} = \frac{(ka) \cdot (kv_a)}{2} = \frac{(kb) \cdot (v_b)}{2} = \frac{(kc) \cdot (kv_c)}{2} =$$
$$= \frac{k^2 \cdot (a \cdot v_a)}{2} = \frac{k^2 \cdot (b \cdot v_b)}{2} = \frac{k \cdot (c \cdot v_c)}{2} = \underline{\underline{k^2 \cdot S_{ABC}}}$$

<u>Závěr:</u> Jsou-li U a U' dva podobné útvary v rovině a koeficient jejich podobnosti je $k \in R^+$, potom pro poměr velikosti jejich obsahů platí: $\frac{S_{U'}}{S_U} = k^2 \quad \Leftrightarrow \quad S_{U'} = k^2 \cdot S_U$.

V této úloze platí:

$$S_{ABC} = 96\,\mathrm{cm}^2$$
$$S_{A'B'C'} = 216\,\mathrm{cm}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{216}{96} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = k^2}}$$
$$k = \frac{3}{2}$$

Daný vztah pro obsahy podobných trojúhelníků, jejich obsahy a koeficient podobnosti platí.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Jiří Houser.
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.