

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### DVĚ FUNKCE

#### Popis aktivity

Sestrojení grafu funkce, určení definičního oboru a oboru hodnot. Nalezení funkce inverzní k funkci, která je ve svém definičním oboru prostá.

#### Předpokládané znalosti

Pojem funkce, definiční obor funkce, obor hodnot funkce, funkce prostá, funkce inverzní

#### Potřebné pomůcky

Program pro tvorbu grafu funkce

#### Zadání

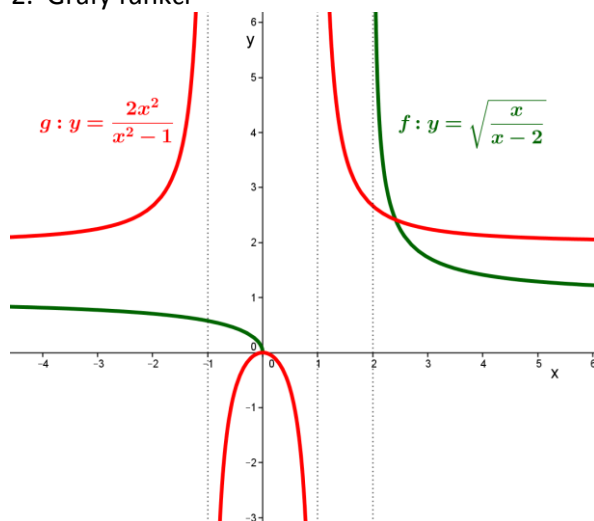
Žáci dostali za domácí cvičení od svého učitele následující úkol:

Jsou dány dvě funkce  $f: y = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$  a  $g: y = \frac{2x^2}{x^2-1}$ .

1. Určete jejich definiční obory a sestrojte na počítači jejich graf.
2. Z grafu určete jejich obory hodnot.
3. Dokažte, že jsou tyto funkce inverzní.

#### Možný postup řešení, metodické poznámky

1. a) Funkce  $f$  je definována pro  $\frac{x}{x-2} \geq 0$ , proto je její definiční obor  $D(f) = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ , což dostaneme řešením soustavy nerovnic  $(x \geq 0 \wedge x > 2) \vee (x \leq 0 \wedge x < 2)$ .  
b) Funkce  $g$  je definována pro  $x^2 - 1 \neq 0$ , proto je její definiční obor  $D(g) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ .
2. Grafy funkcí



Z grafu je patrné, že obor hodnot funkce  $f: y = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ ,  $H(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$  a obor funkce

$g: y = \frac{2x^2}{x^2-1}$ ,  $H(g) = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obě funkce jsou inverzní pouze za předpokladu, že  $D(f)=(2;+\infty)$ ,  $H(f)=(1;+\infty)$  a  $D(g)=(1;+\infty)$ ,  $H(g)=(2;+\infty)$ .

3. Pokusíme se najít k funkci  $f$  funkci inverzní.

Ve funkci  $y = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$  zaměníme proměnné. Dostaneme vztah  $x = \sqrt{\frac{y}{y-2}}$ , který dále upravíme:

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{y}{y-2} \\x^2 \cdot (y-2) &= y \\x^2 \cdot y - 2 \cdot x^2 &= y \\x^2 \cdot y - y &= 2 \cdot x^2 \\y \cdot (x^2 - 1) &= 2 \cdot x^2 \\y &= \frac{2x^2}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

Funkce  $f$  a  $g$  jsou inverzní. Platí, že  $D(f)=H(g)$  a  $D(g)=H(f)$ .

**Doplňkové aktivity**

Učitel může třídu rozdělit do skupin a každé skupině zadat jinou funkci. Úkolem žáků bude sestavit grafy daných funkcí a rozhodnout, kdy jsou dané funkce prosté a určit jejich definiční obor, obor hodnot a najít rovnici funkce inverzní.

**Obrazový materiál**

Dílo autora