

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GONIOMETRICKO-EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Popis aktivity
Řešení goniometrické rovnice.
Předpokládané znalosti
Řešení goniometrických a exponenciálních rovnic, substituční metoda
Potřebné pomůcky
Kalkulátor
Zadání
<p>V intervalu $(0; \pi)$ řeš rovnici:</p> $2^{4 \cdot \cos^2 x + 1} + 16 \cdot 2^{4 \cdot \sin^2 x - 3} = 20$
Možný postup řešení, metodické poznámky
<p>V dané rovnici</p> $2^{4 \cdot \cos^2 x + 1} + 16 \cdot 2^{4 \cdot \sin^2 x - 3} = 20$ <p>upravíme exponent $4 \cdot \cos^2 x + 1$ na tvar:</p> $4 \cdot \cos^2 x + 1 = 4 \cdot (1 - \sin^2 x) + 1 = -4 \cdot \sin^2 x + 5 = -(4 \cdot \sin^2 x - 3) + 2$ <p>a dosadíme jej do zadané rovnice:</p> $2^{-(4 \cdot \sin^2 x - 3) + 2} + 16 \cdot 2^{4 \cdot \sin^2 x - 3} = 20$ <p>Použijeme substituci:</p> <p>I) $4 \cdot \sin^2 x - 3 = y$</p> <p>Vzniká nová rovnice:</p> $2^{-y+2} + 16 \cdot 2^y = 20$ $2^{-y} \cdot 2^2 + 16 \cdot 2^y = 20$ $\frac{1}{2^y} \cdot 2^2 + 16 \cdot 2^y = 20$ <p>Při jejím řešení můžeme opět použít substituci:</p> <p>II) $2^y = z$</p> <p>V rovnici s neznámou z $\frac{1}{z} \cdot 2^2 + 16 \cdot z = 20$</p> <p>odstraníme zlomek</p> $2^2 + 16 \cdot z^2 = 20 \cdot z$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rovnice je kvadratická $16 \cdot z^2 - 20 \cdot z + 4 = 0$
a její základní tvar je:

$$4 \cdot z^2 - 5 \cdot z + 1 = 0$$

$$\text{Diskriminant } D = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$$

$$\text{Kořeny } z_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{4}$$

Ze substituce II) $2^y = z$ získáme řešením dvou exponenciálních rovnic kořeny y_1 a y_2 :

$$2^y = 1 \Rightarrow y_1 = 0$$

$$2^y = \frac{1}{4} \Rightarrow y_2 = -2$$

Ze substituce I) získáme řešením goniometrických rovnic neznámé $x \in (0; \pi)$:

$$4 \cdot \sin^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow |\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$4 \cdot \sin^2 x - 3 = -2 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow |\sin x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

Doplňkové aktivity

Vyznač řešení na jednotkové kružnici.

Literatura Sběrka úloh z matematiky pro střední školy - František Janeček

Obrazový materiál Microsoft – Klipart