INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GONIOMETRICKO-EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE - ŘEŠENÍ

V dané rovnici

$$2^{4\cdot\cos^2 x+1}+16\cdot 2^{4\cdot\sin^2 x-3}=20$$

upravíme exponent $4\cdot\cos^2 x+1$ na tvar:

$$4\cdot\cos^2 x+1=4\cdot\left(1-\sin^2 x\right)+1=-4\cdot\sin^2 x+5=-\left(4\cdot\sin^2 x-3\right)+2$$

a dosadíme jej do zadané rovnice:

$$2^{-\left(4\sin^2 x-3\right)+2}+16\cdot 2^{4\sin^2 x-3}=20$$

Použijeme substituci:

I) $4\cdot\sin^2 x-3=y$

Vzniká nová rovnice:

$$2^{-y+2}+16\cdot 2^y=20$$

$$2^{-y}\cdot 2^2+16\cdot 2^y=20$$

$$\frac{1}{2^y}\cdot 2^2+16\cdot 2^y=20$$

Při jejím řešení můžeme opět použít substituci:

II) $2^y=z$

V rovnici s neznámou z $\quad \frac{1}{z}\cdot 2^2+16\cdot z=20$

odstraníme zlomek

$$2^2+16\cdot z^2=20\cdot z$$

Rovnice je kvadratická $16\cdot z^2-20\cdot z+4=0$

a její základní tvar je:

$$4\cdot z^2-5\cdot z+1=0$$

Diskriminant $D=25-4\cdot 4\cdot 1=9$

Kořeny $z_{1,2}=\frac{5\pm 3}{8}\Rightarrow z_1=1, z_2=\frac{1}{4}$

Ze substituce II) $2^y=z$ získáme řešením dvou exponenciálních rovnic kořeny y_1 a y_2:

$$2^y=1\Rightarrow y_1=0$$

$$2^y=\frac{1}{4}\Rightarrow y_2=-2$$

Ze substituce I) získáme řešením goniometrických rovnic neznámé $x\in(0;\pi)$:

$$4\cdot\sin^2 x-3=0\Rightarrow \sin^2 x=\frac{3}{4}\Rightarrow |\sin x|=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3},\quad x_2=\frac{2\pi}{3}$$

$$4\cdot\sin^2 x-3=-2\Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow |\sin x|=\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{6},\quad x_2=\frac{5\pi}{6}$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Soreya Zychová

Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.