



evropský
sociální
fond v ČR



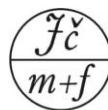
EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenčeschopnost



Jednota českých
matematiků a fyziků

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GONIOMETRICKO-EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE - ŘEŠENÍ

V dané rovnici

$$2^{4 \cdot \cos^2 x + 1} + 16 \cdot 2^{4 \cdot \sin^2 x - 3} = 20$$

upravíme exponent $4 \cdot \cos^2 x + 1$ na tvar:

$$4 \cdot \cos^2 x + 1 = 4 \cdot (1 - \sin^2 x) + 1 = -4 \cdot \sin^2 x + 5 = -(4 \cdot \sin^2 x - 3) + 2$$

a dosadíme jej do zadané rovnice:

$$2^{-(4 \cdot \sin^2 x - 3) + 2} + 16 \cdot 2^{4 \cdot \sin^2 x - 3} = 20$$

Použijeme substituci:

I) $4 \cdot \sin^2 x - 3 = y$

Vzniká nová rovnice:

$$2^{-y+2} + 16 \cdot 2^y = 20$$

$$2^{-y} \cdot 2^2 + 16 \cdot 2^y = 20$$

$$\frac{1}{2^y} \cdot 2^2 + 16 \cdot 2^y = 20$$

Při jejím řešení můžeme opět použít substituci:

II) $2^y = z$

V rovnici s neznámou z $\frac{1}{z} \cdot 2^2 + 16 \cdot z = 20$

odstraníme zlomek

$$2^2 + 16 \cdot z^2 = 20 \cdot z$$

Rovnice je kvadratická $16 \cdot z^2 - 20 \cdot z + 4 = 0$

a její základní tvar je:

$$4 \cdot z^2 - 5 \cdot z + 1 = 0$$

Diskriminant $D = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$

Kořeny $z_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{4}$

Ze substituce II) $2^y = z$ získáme řešením dvou exponenciálních rovnic kořeny y_1 a y_2 :

$$2^y = 1 \Rightarrow y_1 = 0$$

$$2^y = \frac{1}{4} \Rightarrow y_2 = -2$$

Ze substituce I) získáme řešením goniometrických rovnic neznámé $x \in (0; \pi)$:

$$4 \cdot \sin^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow |\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$4 \cdot \sin^2 x - 3 = -2 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow |\sin x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$$