

NAJDI TŘETÍ VEKTOR

Popis aktivity

Určení složek vektoru, výpočet vektorového součinu a velikosti vektoru, lineární nezávislost vektorů a využití jeho umístění v prostoru.

Předpokládané znalosti

Početní operace s vektory, povrch tělesa

Potřebné pomůcky

Kalkulátor, tabulky, pracovní list pro žáka

Zadání

Jsou dány tři body v prostoru: $X [2; -3; 1]$, $Y [1; 1; -2]$, $Z [-4; -2; 5]$.

Úkoly

1. Ukažte, že body X, Y, Z tvoří trojúhelník.
2. Vypočtete úhel vektorů $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}$.
3. Vypočtete vektorový součin $\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{XP}$.
4. Vypočtete objem trojbokého hranolu $XYZPQR$ s podstavami XYZ a PQR .

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Vyřešme úkol pomocí vektorů; ukážeme, že např. vektory $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}$ jsou lineárně nezávislé.

Poznámka: Vektory \vec{u}, \vec{v} jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$, kde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

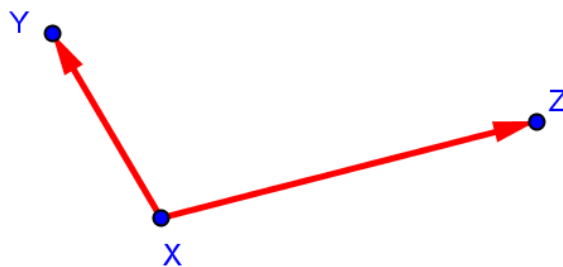
$$\overrightarrow{XY} = Y - X = (-1; 4; -3)$$

$$\overrightarrow{XZ} = Z - X = (-6; 1; 4)$$

$$\frac{\overrightarrow{XY}}{\overrightarrow{XZ}} \neq k; \frac{-1}{-6} \neq \frac{4}{1} \neq \frac{-3}{4} \Rightarrow$$

vektory $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}$ jsou lineárně nezávislé.

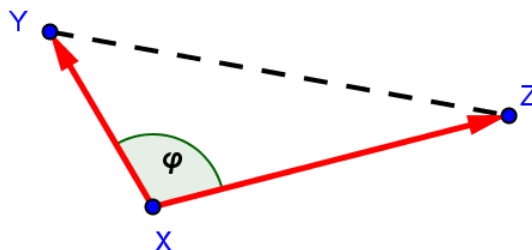
Body X, Y, Z tvoří trojúhelník.



Jiná řešení: Existenci trojúhelníku bylo možné dokázat

- a) trojúhelníkovou nerovností (velikostmi vektorů resp. vzdálenostmi dvojic bodů)
- b) např. bod X neleží na přímce dané body Y, Z
- c) úhel např. vektorů $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}$ není roven 0° resp. 180° , neboli $\cos \varphi \neq \pm 1$.

2. Výpočet úhlu vektorů:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\cos \varphi = \frac{\overline{XY} \cdot \overline{XZ}}{|\overline{XY}| \cdot |\overline{XZ}|} = \frac{-2}{\sqrt{1378}} \doteq -0,0539$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 93^{\circ}05'23''}}$$

3. Vektorový součin: $\overline{XP} = \overline{XY} \times \overline{XZ} = (19; 22; 23)$

4. Objem trojbokého (kolmého) hranolu $XYZPQR$:
Obsah podstavy (trojúhelník XYZ):

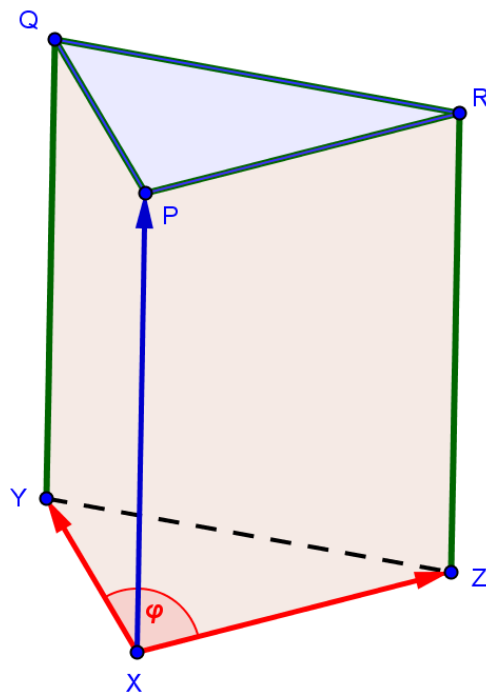
$$S_{XYZ} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{XY}| \cdot |\overline{XZ}| \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{53} \cdot \sin 93^{\circ}05'23'' = \underline{\underline{18,53}}$$

Výška hranolu: $v = |\overline{XP}| = \sqrt{19^2 + 22^2 + 23^2} \doteq \underline{\underline{37,07}}$

Objem hranolu: $V = S_{XYZ} \cdot v \doteq 18,53 \cdot 37,07 \doteq \underline{\underline{686,91}}$

Objem trojbokého hranolu $XYZPQR$
je asi 686,91 objemových jednotek.



Doplňkové aktivity

Žáci mohou rozšířit úlohu o výpočet povrchu hranolu.

Užitím vzorce pro smíšený součin lze počítat objem rovnoběžnostěnu a ukázat vztah mezi hranolem a rovnoběžnostěnem.

Obrazový materiál | Dílo autora