INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYPOČÍTEJTE BEZ KALKULÁTORU 2

Popis aktivity
Určení hodnoty goniometrické funkce úpravou podle vhodného součtového vzorce a s využitím vztahů mezi goniometrickými funkcemi.
Předpokládané znalosti
Hodnoty znamének goniometrických funkcí na intervalu $\langle 0;2\pi)$. Úpravy výrazů s odmocninami
Potřebné pomůcky
Tabulky goniometrických vzorců, pracovní list pro žáka
Zadání

Bez výpočtu velikosti úhlu a bez použití kalkulátoru určete hodnoty goniometrických funkcí na intervalu $\langle 0;2\pi)$, víte-li, že platí: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \wedge \cos\alpha > 0$.

Úkoly:

1. Určete hodnoty dalších goniometrických funkcí pro stejný argument: $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{cotg}\alpha$.
2. Určete hodnoty těchto funkcí pro dvojnásobný argument: $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \operatorname{tg} 2\alpha, \operatorname{cotg} 2\alpha$.
3. Určete hodnoty těchto funkcí pro poloviční argument: $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Vzhledem k zadání úlohy platí, že $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Pro každé $x \in R$ platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Pro každé $x \in R - \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right\}, k \in Z$ platí: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$\frac{6}{9} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$$
$$2 - 2\cdot\sin^2\alpha = 3\cdot\sin^2\alpha$$
$$5\cdot\sin^2\alpha = 2$$
$$|\sin\alpha| = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$
$$\underline{\underline{\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{15}{25}}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$$
$$\underline{\underline{\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}}}$$

Pro každé $x \in R - \left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}, k \in Z$ platí: $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}}$

2. Vzorce pro dvojnásobný argument:

Pro každé $x \in R$ platí: $\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x \quad \wedge \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser.
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

$$\Rightarrow \quad \sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{\sqrt{15}}{5} = 2\cdot\frac{\sqrt{150}}{25} = \frac{10\sqrt{6}}{25} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{6}}{5}}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{15}{25} - \frac{10}{25} = \frac{5}{25} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{2\sqrt{6}}} \quad \wedge \quad \mathrm{cotg}\,2\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,2\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{12}}}$$

3. Vzorce pro poloviční argument:

Pro každé $x \in R$ platí: $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad \wedge \quad \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

Vzhledem k zadání platí, že $\frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{15}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{15}}{10}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{10\left(5-\sqrt{15}\right)}}{10}}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{15}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{15}}{10}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{15}\right)}}{10}}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{10\left(5-\sqrt{15}\right)}}{10}}{\frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{15}\right)}}{10}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}}} = \sqrt{\frac{40-10\sqrt{15}}{10}} = \underline{\underline{\sqrt{4-\sqrt{15}}}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{15}}}\cdot\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{4+\sqrt{15}}} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{16-15}} = \underline{\underline{\sqrt{4+\sqrt{15}}}}$$

Doplňkové aktivity

1. Žáci (skupiny) mohou měnit zadané funkce, jejich hodnoty, nebo jen jejich znaménka (tedy polohu v konkrétním intervalu – kvadrantu).
2. Žáci (skupiny) mohou cvičně ověřit správnost úprav výpočtem velikosti úhlu pomocí kalkulátoru.