INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ZE TŘÍ ČTYŘI

Popis aktivity

Určení složek vektoru, výpočet velikosti vektoru a využití jeho umístění v rovině a v prostoru.

Předpokládané znalosti

Početní a grafické operace s vektory, umístění vektoru.

Potřebné pomůcky

Kalkulátor, pracovní list pro žáka

Zadání

Jsou dány tři body v prostoru: $A[-2;3;5]$, $B[4;1;-1]$, $C[1;-2;3]$.

Úkoly

1. Ukažte, že body A, B, C neleží v jedné přímce.
2. Určete souřadnice bodu M, aby s danými body A, B, C tvořil rovnoběžník.
3. Vypočtěte obvod tohoto rovnoběžníku.

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Vyřešme úkol pomocí vektorů; ukážeme, že např. vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ jsou lineárně nezávislé.

Poznámka: *Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$, kde $k \in R - \{0\}$.*

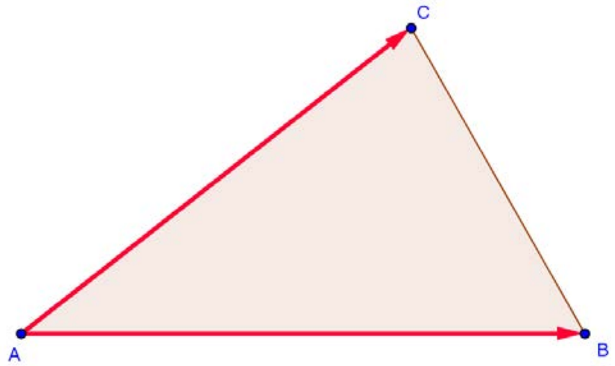
$\overrightarrow{AB} = B - A = (6;-2;-6)$,

$\overrightarrow{AC} = C - A = (3;-5;-2)$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} \neq k \quad ; \quad \frac{6}{3} \neq \frac{-2}{-5} \neq \frac{-6}{-2} \quad \Rightarrow$$

vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ jsou lineárně nezávislé.

Body A, B, C tvoří trojúhelník.



Jiná řešení: Existenci trojúhelníku bylo možné dokázat

a) trojúhelníkovou nerovností (velikostmi vektorů resp. vzdálenostmi dvojic bodů)

b) např. bod C neleží na přímce dané body A, B

c) úhel např. vektorů $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ není roven $0°$ resp. $180°$, neboli $\cos\varphi \neq \pm 1$.

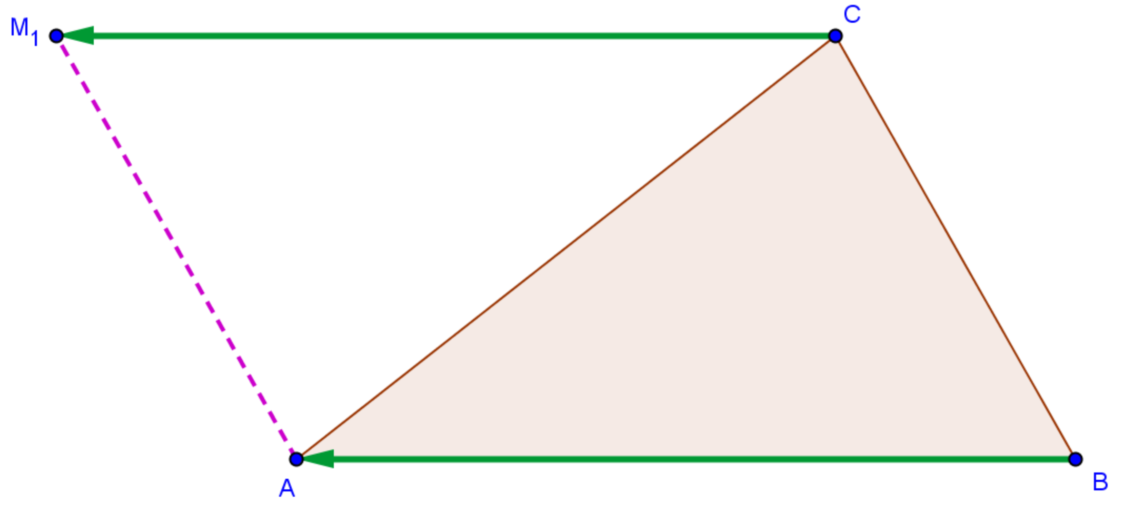
2. Vzhledem k poloze bodů A, B, C a zadání úlohy je nutné uvažovat o třech řešeních úlohy.

a) Uvažujme nejprve rovnoběžník $ABCM_1$. Potom vektor $\overrightarrow{CM_1}$ je umístěním vektoru $\overrightarrow{BA}$ nebo že vektor $\overrightarrow{AM_1}$ je umístěním vektoru $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA} = A - B = (-6;2;6) \quad \Rightarrow \quad M_1 = C + \overrightarrow{BA} \quad \Rightarrow \quad M_1 = [-5;0;9]$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-3;-3;4) \quad \Rightarrow \quad M_1 = A + \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad M_1 = [-5;0;9]$

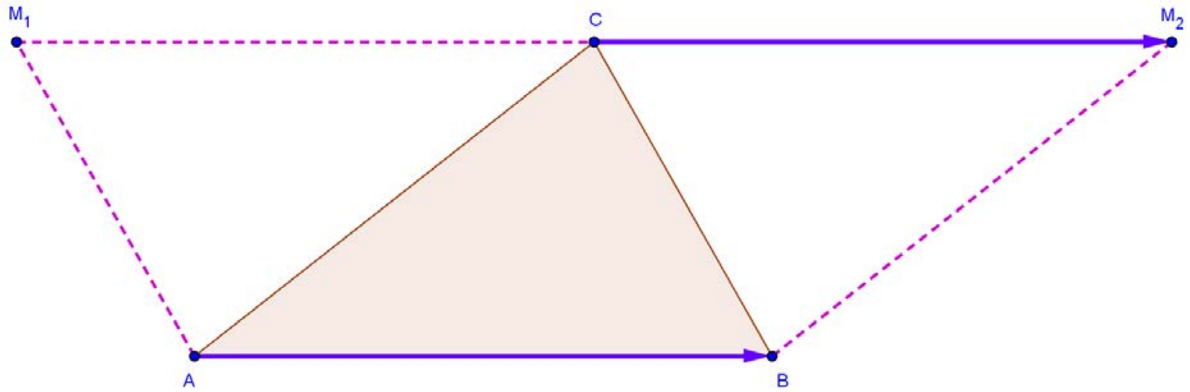
Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



b) Vyšetřeme rovnoběžník ABM_2C. Úkol lze řešit opět umístěním vektoru; např. vektor $\overrightarrow{AB}$ umístíme do bodu C.
Využijme výsledek předchozí úlohy a) a ukažme další způsob – pro toto řešení je bod C středem dvojice bodů M_1 a M_2. Proto platí:

$$C = \frac{M_1 + M_2}{2} \quad \Rightarrow \quad M_2 = 2 \cdot C - M_1 \, .$$

Řešení pro hledaný bod je $M_2 = [7; -4; 3]$.



c) Třetí planimetrické řešení rovnoběžníku AM_3BC lze řešit opět umístěním vektoru; např. umístíme vektor $\overrightarrow{CA}$ do bodu B, nebo vektor $\overrightarrow{CB}$ do bodu A, nebo s využitím řešení předchozích úloh umístíme vektor $\overrightarrow{M_1A}$ do bodu A, resp. vektor $\overrightarrow{M_1B}$ umístíme do bodu B.
Stejně jako v úloze b) lze využít výpočet souřadnic bodu M_3 pomocí středu dvojice bodů:

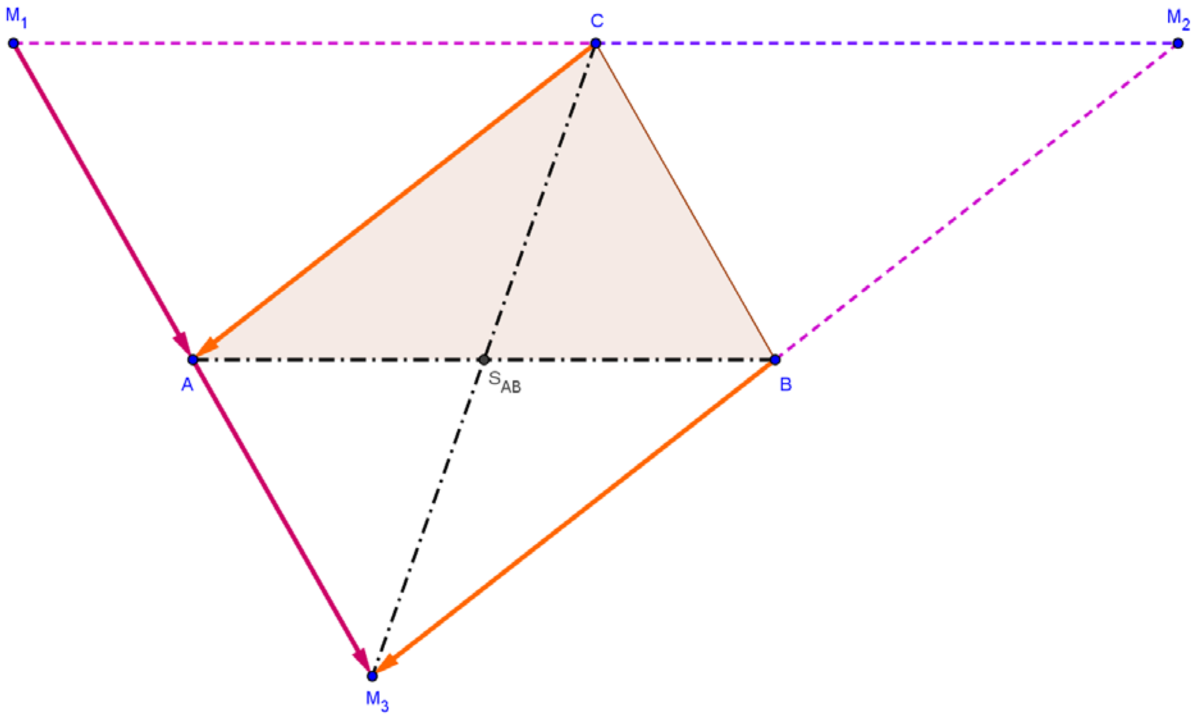
$$M_3 = 2 \cdot A - M_1 = 2 \cdot B - M_2 \, .$$

Proveďme ještě jiný – nezávislý způsob řešení.
Protože se úhlopříčky rovnoběžníku půlí, potom pro souřadnice jejich průsečíku S tohoto rovnoběžníku AM_3BC platí:

$$S = \frac{A+B}{2} = \frac{C+M_3}{2}$$

$$S_{AB} = \frac{A+B}{2} = [1;2;2]$$

$$\Rightarrow \quad M_3 = 2 \cdot S_{AB} - C = [1;6;1]$$



I zde jsme mohli úlohu řešit způsobem umístěním vektoru:

vektor $\overrightarrow{CS_{AB}} = S_{AB} - C = (0;4;-1)$ umístíme do bodu S_{AB}

$$M_3 = \overrightarrow{CS_{AB}} + S_{AB} = [1;6;1]$$

3. Úkol lze řešit pomocí velikostí vektorů nebo výpočtem vzdáleností bodů v prostoru.

a) Výpočet obvodu rovnoběžníku $ABCM_1$ vyřešíme např. pomocí velikosti „sousedních“ vektorů $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$; souřadnice čtvrtého bodu M_1 vlastně ani nepotřebujeme.

$$O_{ABCM_1} = 2 \cdot \left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-6)^2} + \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 4^2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\sqrt{76} + \sqrt{34}\right) \doteq \underline{\underline{29{,}10}}$$

Obvod čtyřúhelníku $ABCM_1$ je asi 29,1 délkových jednotek.

b) Obvod rovnoběžníku ABM_2C vypočteme pomocí vektorů $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$:

$$O_{ABM_2C} = 2 \cdot \left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-6)^2} + \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-2)^2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\sqrt{76} + \sqrt{38}\right) \doteq \underline{\underline{29{,}76}}$$

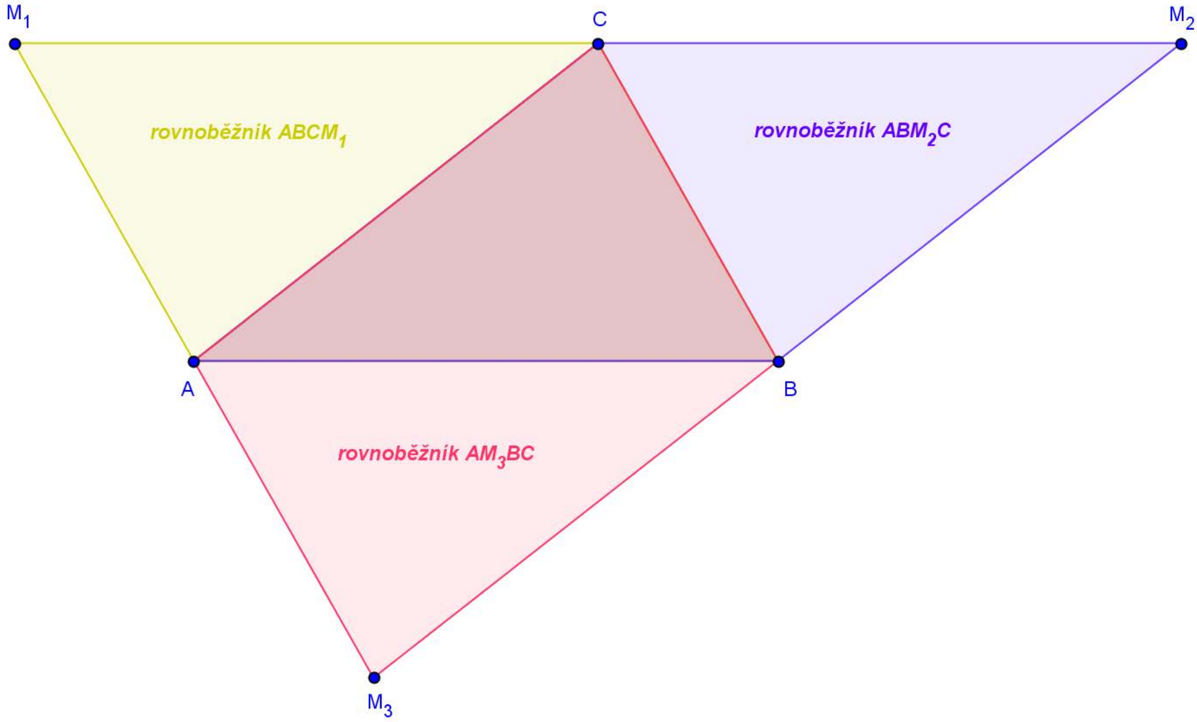
Obvod čtyřúhelníku ABM_2C je asi 29,76 délkových jednotek.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

c) Obvod rovnoběžníku AM_3BC vypočteme pomocí vektorů $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$:

$$O_{AM_3BC} = 2\cdot\left(\left|\overrightarrow{CA}\right| + \left|\overrightarrow{CB}\right|\right) = 2\cdot\left(\sqrt{(-3)^2+5^2+2^2} + \sqrt{3^2+3^2+(-4)^2}\right) =$$
$$= 2\cdot\left(\sqrt{38}+\sqrt{34}\right) \doteq \underline{\underline{23{,}99}}$$

Obvod čtyřúhelníku AM_3BC je asi 23,99 délkových jednotek.



Doplňkové aktivity	
Žáci mohou propojit pomocí vektorů ještě body M_1, M_2, M_3. Dále lze vyřešit v trojúhelníku ABC velikosti vnitřních úhlů. Žáci mohou vypočítat obsah trojúhelníků i čtyřúhelníků vytvářených různými body této úlohy.	
Obrazový materiál	Dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.