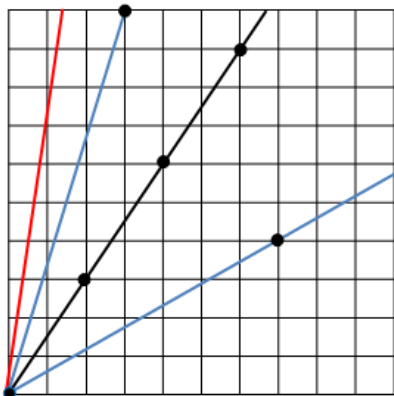
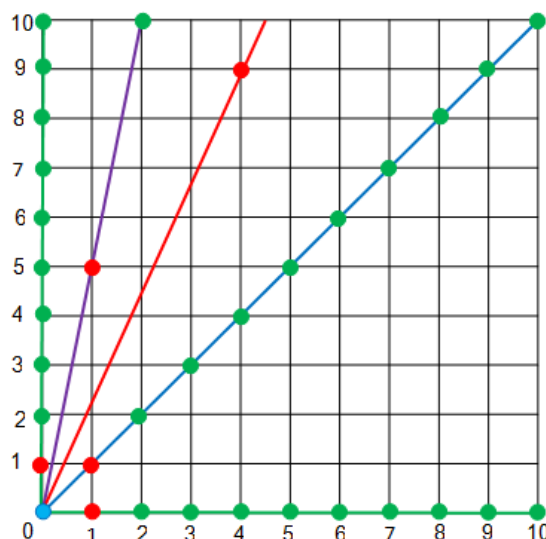


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

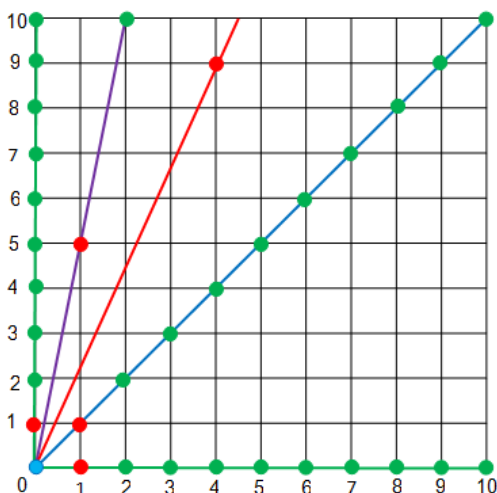
ČÁRY A BODY 2 – ŘEŠENÍ



A)
Červená čára nevyhovuje zadání, neboť protíná jedinou svíslou přímku mezi dvěma mřížovými body, kterými neprochází.
Obě modré přímky vyhovují zadání



B) Na každé čáře najdeme kromě mřížového bodu v počátku ještě alespoň jeden další mřížový bod. Vyznačíme červeně první z nich (tj. nejbližší k počátku). Čtvercová síť je osově souměrná podle úhlopříčky procházející počátkem soustavy souřadnic. Situaci si proto zjednodušíme rozdělením čtvercové sítě úhlopříčkou na dvě části a nadále se budeme zabývat jen čarami a mřížovými body v první části ohraničené svíslou zelenou čarou a modrou úhlopříčkou.



Kromě mřížových bodů na těchto dvou hraničních přímkách, napočítáme v jedné části ještě dalších 45 mřížových bodů.

Výpočet:

$$1 + 2 + \dots + 9 = 45$$

nebo

$$(10 \cdot 10 - 10) : 2 = 45$$

Rozlišíme dva typy čar, čaru procházející více než dvěma mřížovými body (I) a čaru procházející právě dvěma mřížovými body (II).

I. Např. na fialové čáře je nejbližší mřížový bod se souřadnicemi [1; 5]. Ve dvojnásobné vzdálenosti od počátku je další mřížový bod.

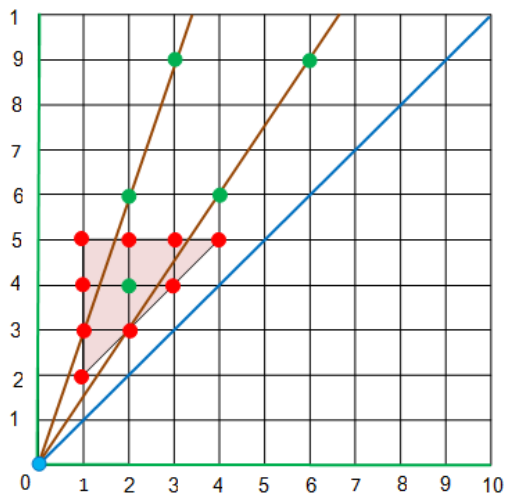
II. Naopak na červené čáře má první mřížový bod souřadnice [4; 9], další mřížový bod ve dvojnásobné vzdálenosti od počátku by byl vně čtvercové sítě.

(Vektor směřující z počátku soustavy souřadnic do nejbližšího mřížového bodu čáry pojmenujme „mřížový vektor“.)

Jestliže ani jedna souřadnice $[x, y]$ prvního mřížového bodu od počátku nepřekročí hodnotu 5 ($x \leq 5 \wedge y \leq 5$), pak lze na čáře umístit i mřížový bod ve dvojnásobné vzdálenosti od počátku.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

(Vektor směřující od počátku do tohoto bodu je dvojnásobkem „mřížového vektoru“.)



Všechny tyto body jsou ve vyznačeném růžovém trojúhelníku (celkem 10 bodů).

Uvnitř trojúhelníku je jeden (zelený) bod, který je až druhým mřížovým bodem na čáře. Jedná se o bod $[2; 4]$. Na stejné čáře totiž leží i mřížový bod $[1; 2]$.

Souřadnice vektoru $(2; 4)$ jsou soudělná čísla, kdežto vektory směřující do prvních mřížových (červených) bodů na čáře mají nesoudělné hodnoty souřadnic $(x; y)$, tedy $D(x; y) = 1$.

V levé části sítě ($0 < x < y \leq 10$) prochází každá čára počátkem a alespoň jedním dalším mřížovým bodem. Souřadnice prvního (červeného) mřížového od počátku označme $[a; b]$. Platí: $0 < a < b \leq 10$. Jestliže dvojnásobek souřadnice b nepřekročí

hodnotu 10, vejde se na čáru ještě další mřížový bod, a nepřekročí-li k násobek souřadnice b hodnotu 10, na čáře bude kromě počátku ještě k dalších mřížových bodů. Na čáře je tedy kromě počátku ještě $\left\lfloor \frac{10}{b} \right\rfloor$ bodů.

(Zlomek v hranaté závorce znamená, celou část čísla, tedy u výsledku se čísla za desetinnou čárkou ignorují.)

Např. na každé z obou hnědých čar jsou umístěny kromě počátečního bodu ještě 3 další mřížové body ($\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3$). V tabulce jsou uvedeny počty mřížových bodů na čarách v závislosti na umístění prvního mřížového bodu.

b (hodnota druhé souřadnice)	k (počet prvních - červených mřížových bodů se souřadnicí b)	$\left\lfloor \frac{10}{b} \right\rfloor$ (počet mřížových bodů jedné čáry procházející červeným bodem se souřadnicí b)	$k \cdot \left\lfloor \frac{10}{b} \right\rfloor$ (počet mřížových bodů všech čar procházejících červenými body se souřadnicí b)
2	1	$\left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor = 5$	$1 \cdot 5 = 5$
3	2	$\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3$	$2 \cdot 3 = 6$
4	2	$\left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor = 2$	$2 \cdot 2 = 4$
5	4	$\left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor = 2$	$4 \cdot 2 = 8$
Počet mřížových bodů na všech čarách, které obsahují kromě počátku ještě alespoň dva mřížové body.			Celkem 23

Zbývajících 22 bodů první části čtvercové sítě ($45 - 23 = 22$) neleží na čarách s větším počtem mřížových bodů, viz tabulka. Každá přímka procházející některým z těchto mřížových bodů neobsahuje s výjimkou počátku žádný další mřížový bod. Tedy celkem 22 čar jedné části sítě prochází právě dvěma mřížovými body.

Protože je druhá část osově souměrná, hledaných čar je v celé čtvercové síti dvojnásobek.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

V dané čtvercové síti existuje celkem 44 čar procházejících právě dvěma mřížovými body, tj. počátkem a ještě jedním mřížovým bodem.

c)

Červené body ve vyznačeném trojúhelníku leží na čarách s větším počtem mřížových bodů než 2 (včetně počátku). Počet červených bodů trojúhelníku je uveden ve druhém sloupci tabulky. Každým z těchto 9 bodů prochází jiná čára (na každé čáře je právě jeden červený bod). V obou částech čtvercové sítě je těchto čar dvojnásobek, tedy 18. K nim je nutné připočítat ještě dvě čáry na osách souřadnic a jednu úhlopříčku. Všechny tyto čáry společně s dalšími 44 čarami z předchozí části úlohy vyhovují zadání úlohy.

V dané čtvercové síti existuje celkem 65 různých čar, procházejících včetně počátku alespoň dvěma mřížovými body.