APOLLONIOVY ÚLOHY V NAVIGACI

ŠÁRKA VORÁČOVÁ

Abstrakt. Nejnovější technologie pro vyhodnocení rádiové i satelitní lokalizace mají společný geometrický princip. Je to úloha, jež byla formulována a vyřešena již ve starověkém Řecku Apolloniem z Pergy. V průběhu staletí se jejím řešením zabývali významní vědci, je znám bezpočet přístupů a konstrukcí. S rozvojem nových možností pro navigaci objektů je tento problém velmi aktuální. Pro vývoj nových algoritmů se ukazuje výhodné využít geometrického přístupu, uvažovat o průnicích prostorových objektů namísto pouhého statistického vyhodnocení řešení lineární aproximace. V článku se zaměříme na souvislost známé Apolloniovy úlohy s družicovým polohovým systémem a s multilateračními systémy radiové navigace, známými pod zkratkou MLAT.

Úvod

Pod pojmem navigace rozumíme umění nalézt cestu k danému cíli, neztratit se na dlouhých cestách a znát svou polohu na moři i na souši. V průběhu věků se postupy zásadním způsobem měnily a spolu s novými přístroji a technologiemi se proměňovaly až do dnešní podoby. Mnohé mají historické i současné metody společné – klíčová role určení času, využití nebeských těles či významných bodů a odvození polohy použitím geometrických metod.

Astronavigace a nautické spočtení byly na otevřeném oceánu hlavní navigační metody až do druhé světové války [9]. Teprve až s objevem radiových vln přišly nové, spolehlivější metody. Během druhé světové války se radar stal běžnou součástí protivzdušné obrany a postupem času se jeho využití rozšířilo i pro civilní účely. V současné době radary hrají zatím nezastupitelnou úlohu v letecké, lodní i pozemní dopravě, i když jsou postupně vytlačovány globálním družicovým polohovým systémem (GNSS – Global Navigation Satellite System).

V současnosti je na světě více než 500 miliónů přijímačů, většina z nich je v mobilních telefonech. Přesnější přístroje využívající dvou přijímačů pracují s přesností 1 cm, levné přístroje v mobilních telefonech pracují se střední odchylkou okolo 15 m. S plným využitím GNSS druhé generace by mělo dojít k zpřesnění na 30 cm [8].

Ačkoliv mají radiová i satelitní navigace rozdílné technologie, geometricky se jedná o stejný problém. Již Isaac Newton ukázal, že Apolloniův problém nalézt kružnici, jež se dotýká tří daných kružnic je ekvivalentní nalezení rozdílu vzdáleností od tří daných bodů, což je základní úloha hyperbolické navigace.

Date: 31. 1. 2019.

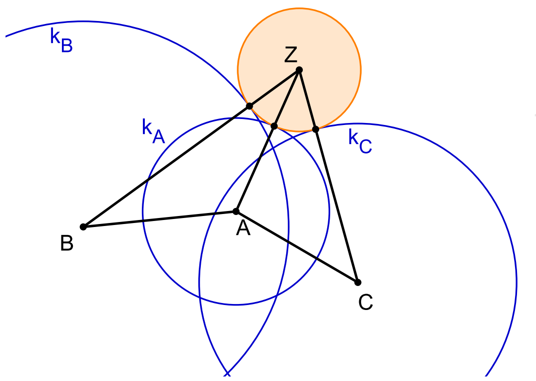
1991 *Mathematics Subject Classification.* 97G40.

Key words and phrases. Apolloniovy úlohy, GPS, GNSS, Hyperbolická navigace, MLAT, Pasivní radiolokace.

1. Apolloniovy úlohy

Apollonius z Pergy (262-190) formuloval svůj známý problém v knize ve spisu $E\pi\alpha\varphi\alpha\iota$ (O tečných kruzích), jehož původní řecká verze se nedochovala. V současné době se tento problém zobecňuje nahrazováním kružnic body a přímkami, my jej uvedeme jen v základním znění, jež koresponduje s aplikacemi GNSS.

> V rovině jsou dány tři kružnice. Sestrojte kružnici, která se daných kružnic dotýká.



Obrázek 1. Jedno řešení Apolloniovy úlohy

Dle úryvků ze spisů Pappa z Alexandrie (290–350) se domníváme, že eukleidovskou konstrukci obecného případu znal už Apollonius.

Obecně existuje takových řešení osm a liší se v tom, které ze zadaných kružnic leží uvnitř výsledné kružnice. Podrobný rozbor problému a nejrůznějších postupů konstrukcí je podán např. v [3, 1].

Apolloniovými úlohami se zabývalo mnoho významných matematiků, François Viète popsal roku 1600 předpokládané Apolloniovo řešení užitím dilatace, Isaac Newton zjednodušil Roomenovo[1] řešení pomocí průsečíku hyperbol.

Isaac Newton uveřejnil v roce 1687 v první knize známého díla *Principia* [6] kontroverzní Lemmu XVI, ve které popisuje eukleidovské řešení Apolloniovy úlohy převedením na problém známý z hyperbolické navigace a multilateračních naváděcích systémů.

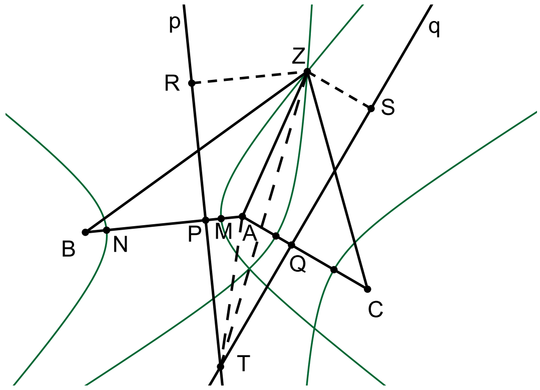
Podstatou Newtonovy konstrukce je využití Apolloniovy definice kuželoseček pomocí číselné výstřednosti udávající poměr vzdálenosti od ohniska a řídící přímky. Možná proto je sporné, zda je Newton autorem řešení. Uveďme si zde zřejmě první český překlad spolu s Newtonovým řešením.

Lemma (XIV)**.** *Z daných tří bodů sestrojte čtvrtý bod, jsou-li rozdíly vzdáleností od daných bodů nulové nebo zadané.*

Nechť jsou zadané tři body A, B, C. Našim úkolem je sestrojit bod Z, známe-li rozdíly vzdáleností $|AZ|$, $|BZ|$ a $|CZ|$ viz. Obr. 2.

Případ 1. Vzdáleností $|AZ|$, $|BZ|$ a $|CZ|$ jsou navzájem různé. Množina bodů s konstantním rozdílem vzdáleností $||AZ| - |BZ||$ od dvou pevně daných různých

[1] Adriaan van Roomen: In Archimedis Circuli Dimensionem Expositio et Analysis, 1597.



Obrázek 2. Newtonovo řešení Apolloniovy úlohy

bodů A, B je hyperbola s ohnisky v bodech A, B. Hlavní osa je rovna rozdílu vzdálenosti $||AZ|-|BZ||$. Označme hlavní vrcholy M, N. Řídící přímka p hyperboly pro ohnisko A je kolmice k hlavní ose procházejícím bodem P, pro nějž

$$|MA| : |MP| = |AB| : |MN|.$$

Kuželosečka je množina bodů s konstantním poměrem vzdáleností od ohniska A a řídící přímky p. Z bodu Z spustíme kolmici na řídící přímku p, patu kolmice označme R. Potom $|AZ| : |ZR| = |AB| : |MN|$.

Podobně bod Z musí ležet na druhé hyperbole s ohnisky v bodech A a C, hlavní osou o velikosti $||AZ|-|CZ||$, řídící přímkou q a číselnou výstředností danou poměrem $|AC| : ||AZ| - |CZ||$. Pro hledaný průsečík Z jsou tedy známy poměry vzdáleností $|AZ| : |ZS|$ a $|AZ| : |ZR|$ a také vzájemný poměr $|ZS| : |ZR|$.

Průsečík řídících přímek p, q označme T. Čtyřúhelník $TRZS$ je nyní dán až na podobnost, můžeme sestrojit jeho úhlopříčku, na niž leží hledaný bod Z. Ze znalosti úhlu ZTS známe poměr $|TZ| : |ZS|$, je známa výstřednost $|AZ| : |ZS|$ a tedy i vzájemný poměr $|TZ| : |AZ|$. Trojúhelník TAZ je tak určen stranou TA a dvěma úhly ATZ, AZT a můžeme sestrojit vrchol Z.

Případ 2. Jsou-li dvě vzdáleností stejné, např. $|AZ| = |BZ|$, potom úhlopříčka TZ je osou úsečky AB. Trojúhelník ATZ určíme stejným způsobem jako v předchozím případě.

Případ 3. Jsou-li všechny tři vzdálenosti shodné, pak hledaný bod Z je středem kružnice procházející body A, B a C.

2. Globální navigační systémy

Základní princip satelitní navigace spočívá v trilateraci, tedy nalezení místa ze tří vzdáleností. Praktické určení polohy je ale zkomplikováno různým časem vysílače a přijímače, chybami způsobenými průchodem atmosférou, či špatným aktuálním rozmístěním satelitů. Přepočet vzdálenosti zatížené chybami měření nazýváme pseudovzdáleností.

Každá satelitní stanice vybavena je vybavena atomárními hodinami. Čas přijímače ale se satelitními hodinami synchronizován není, časovou odchylku na hodinách přijímače je třeba spočítat. Z geometrické podstaty problému víme, že pro jednoznačnou 3D lokalizaci je zapotřebí sledovat alespoň čtyři satelity. Ve skutečnosti ale přijímáme signál z alespoň 6 satelitů nad úhlem 5°. Pro přesnost výsledku je důležitý nejenom počet satelitů pozorovaných pod výhodným úhlem, ale i jejich vzájemná poloha.

Geometricky můžeme vyhodnocení pseudovzdáleností formulovat jako Apolloniovu úlohu v°prostoru [4]. Hledáme kulovou plochu, která se dotýká čtyř daných kulových ploch. Polohy satelitů představují středy kulových ploch, pseudovzdálenosti určují jejich poloměry. Neznámá časová odchylka přijímače vůči všem satelitům je stejná a určuje poloměr hledané kulové plochy.

Pokud je úloha řešitelná eukleidovsky, je možno ji zapsat pomocí algebraických rovnic druhého stupně. Algoritmy aplikované v GPS pro vyhodnocení polohy z jednoho přijímače jsou numerické. Prvním krokem je určení pozorovacích rovnic vyjádřením pseudovzdáleností z viditelných satelitů. Pokud známe údaje ze čtyř satelitů neležících v jedné rovině, dává soustava jediné řešení. Dráhy satelitů jsou ale nastaveny tak, že z každého necloněného bodu na Zemi vidíme minimálně 6 satelitů. V takovém případě použijeme metodu vážených nejmenších čtverců. Váhu jednotlivým měřením přiřazujeme podle aktuální geometrické konstelace (větší váhu mají ty satelity, které vidíme pod větším úhlem) nebo Gaussovou metodou [10, 11]. Pro podrobný popis metod používaných v satelitní navigaci doporučuji knihu [5].

Velmi podobných metod zpracování dat pro lokalizaci a následné zpřesnění využívá i současně vyvíjená a stále zdokonalovaná metoda hyperbolické navigace.

3. Hyperbolická navigace

Hyperbolická navigace byla poprvé použita ve zvukových systémech akustické lokalizace. Geometricky na stejném principu pracovaly i radiové systémy LORAN a GEE, nezávisle vyvíjené v USA a Velké Británii během druhé světové války [2].

Základem je vysílání přesně synchronizovaných dvojic majáků. Majáky vysílají ve stejný čas impulsy. Přijímač zjišťuje rozdíl časů mezi přijatými signály od obou majáků. Tento rozdíl umožní na mapě určit hyperbolu (při rovnosti signálů přímku), na které se přijímač nachází. Použitím jiné dvojice vysílačů je možné určit další hyperbolu. Polohu přijímače pak udává jejich průsečík.

Doc. Vlastimil Pech z výzkumného pracoviště Československé lidové armády se hyperbolickým navigačním systémem inspiroval, jen úlohu přijímače a vysílače otočil. V 60. letech vyvinul první pasivní radiolokátor Kopáč, následovaly další modely Ramona a Tamara, až v roce 1995 byl vyvinut první funkční prototyp světoznámého radiolokátoru Věra.

3.1. **Věra.** Věra patří mezi tzv. pasivní radiolokátory, to znamená, že pouze přijímá elektromagnetickou energii z okolí a sám žádnou nevysílá. Věra se skládá nejméně ze tří časově synchronizovaných přijímacích stanic, které zároveň zjišťují polohu letounu. Pro jednoduchost formulujme problém v rovině.

Vzdálenost cíle od přijímací stanice jsou přímo úměrné době, po jakou signál putoval. Pokud by dvě stanice přijaly signál ve stejný okamžik, pak leží sledovaný cíl na ose spojnic těchto stanic. Pokud je mezi příjmem signálů časový posun, je geometrickým místem bodů hyperbola. Na základě rozdílu v příjmu signálů z letadla na dvě stanice určíme hyperbolu, jejíž ohniska jsou dána polohou stanic. Další dvojice určí stejným způsobem druhou hyperbolu a poloha sledovaného cíle je v průsečíku hyperbol.

Jelikož Věra neurčuje vzdálenost cíle na základě odrazu signálu, je úspěšnější i při odhalování tzv. neviditelných letadel. Pokud ale letadlo vypne svůj letový radar, je pro Věru také neviditelné.

Mocnějším nástupcem Věry může být systém "Silent Guard"vyvinutý v°roce 2013. Jeho technologie PCL (Passive Coherent Location) nespoléhá na radiový signál vysílaný cílem, ale pouze parazituje na stávajícím televizním a°radiovém vysílání [7, 12].

Na principu zjištění rozdílu času přijetí signálu mezi jednotlivými stanicemi (TDOA - Time Difference Of Arrival) pracuje i nově zaváděná technologie k detekci polohy letadel používaná pro řízení provozu na letišti pod zkratkou MLAT.

3.2. **Multilaterace.** V terénu jsou rozmístěny časově synchronizované přijímače signálů z palubních odpovídačů. V určitém okamžiku vyšle sledovaný cíl impulsní signál, jenž se rychlostí světla šíří směrem k přijímacím stanicím. Časovému rozdílu v příjmu signálů odpovídá v rovině hyperbola s ohnisky v poloze přijímacích stanic, jejichž časový posun je vyhodnocován. Při 2D navigaci stačí vyhodnotit příjem na tři stanice. Analogicky pro prostorovou navigaci uvažujeme množinu poloh na rotačním dvoudílném hyperboloidu a pro určení polohy vyhodnocuje příjem minimálně čtyř stanic. Nejednoznačnost polohy řeší použitý software, například pro danou dvojici přijímačů neuvažujeme obě části hyperboloidu, protože víme, ke které stanici dorazil signál dříve.

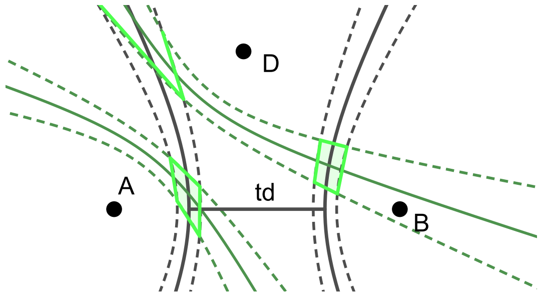
MLAT systémy dávají možnost zvýšení kapacity a propustnosti vzdušného prostoru a zároveň poskytují větší přesnost, než jaké je možné dosáhnout s jinými současně využívanými zařízeními pro sledování nebo navigaci. Česká republika je v oblasti multilaterace na světové špičce vývoje, podnik Řízení letového provozu patří mezi průkopníky MLAT [13]. Systém byl spuštěn v roce 1999 a od roku 2002 je schopný plně nahradit tradiční sekundární radary.

Největší slabinou systému je nedodržení časové synchronizace, protože chyba času $1\mu s$ vyvolá chybu v řádech metrů. Aby bylo možné využít MLAT pro prostorovou navigaci, je potřeba vyhodnotit odchylku v závislosti na konstelaci stanic vůči sledovanému cíli. Přesnost multilaterace je určována, podobně jako GPS, pomocí koeficientu PDOP (Position Dilution of Precision), což je poměr standardních odchylek výsledné vzdálenosti a°naměřeného času. Hodnoty PDOP jsou dány výlučně geometrickým rozmístěním stanic vůči cíli, jeho určení je odhadováno numericky, podobně jako u GPS [8]. Je zřejmé, že pokud se hyperboly protínají kolmo, je při stejné odchylce naměřeného času oblast nepřesnosti menší, než při průniku pod ostrým úhlem – viz Obr. 3.

Explicitní odvození vztahu pro PDOP geometrickou cestou je ale komplikované. Například na letišti Václava Havla je v současnosti 15 stanic, je třeba započítat okolní terén, rušivé odrazy a stínění budov.

Závěr

Během posledních dvaceti let se díky satelitním technologiím podstatným způsobem změnil náš přístup k řešení navigačních problémů. S novými technologiemi navigace přicházejí nové možnosti pro vzájemné využívání stávajících i nových systémů, řeší se kombinace satelitní a pozemní navigace spolu s optimalizačními problémy, jež je potřeba vyhodnotit pro velké objemy dat v reálném čase. Využití vztahu mezi Apolloniovým problémem a algebraickými rovnicemi pro pseudovzdálenosti se z výhodou využívá k vývoji nových algoritmů. Navíc nám geometrický



Obrázek 3. Vliv chyby měření času na výslednou lokalizaci - PDOP

nadhled a znalost nejrůznějších přístupů k řešení problémů umožňuje odvození okrajových podmínek pro danou situaci. Současné technologie používají výhradně statistické metody pro určení vlivu vzájemné polohy satelitů na přesnost lokalizace, s nástupem GNSS druhé generace je aktuální vývoj nových algoritmů. Podobným způsobem se řeší vyhodnocení důvěryhodnosti sledování cílů v multilateračních systémech. Otevřeným problémem zůstává využití geometrie staticky rozmístěných přijímačů s ohledem na terén a budovy v daném místě.

Reference

[1] L. Boček, J. Zhouf: *Máte rádi kružnice*, Prometheus, Praha, 1995
[2] W. T. Dickinson: *The LORAN-C System Of Navigation*, Washington, Dc: Jansky & Bailey, 1962
[3] J. Holubář: O methodách rovinných konstrukcí (Apolloniova úloha a úlohy příbuzné),In: Jednota československých matematiků a fysiků, http://dml.cz/dmlcz/402960, Praha, 1949
[4] J. Hoshen: "The GPS equations and the Problem of Apollonius"in *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, no. 3, pp. 1116-1124, 1996
[5] E. D. Kaplan, Ch. J. Hegarty: *Understanding GPS: Principles and Applications*, Arctech House, 2006
[6] I. Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London, Royal Society,1687, English transl. A. Motte: *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, Daniel Adee, New York, p. 129-130, přístupné online, 1846
[7] Z. Seiner: "Po Tamaře a Věře sestrojili Češi další unikátní radar", In: *Právo*, přístupné online, září 2012
[8] N. Sirola: *A Method for GPS Positioning Without Current Navigation Data*, Diplomová práce, Tampere University of Technology, 2001
[9] P. Scheirich: "Jak se neztratit na moři, námořní navigace ve staletích před GPS", in *Vesmír* 97/570, 2018
[10] D. Štumpf: *Jak funguje GPS*, bakalářská práce MFF UK, 2017
[11] G. Taylor, G. Blewitt: *Intelligent Positioning: GIS-GPS Unification*, John Wiley & Sons, Ltd, 2006
[12] Tisková zpráva: "Český Tichý strážce vidí i neviditelná letadla", In: *Armádní noviny*, přístupné online 15. 5. 2013
[13] M. Ujcová: Model multilateračního systému pro řízení letového provozu v ČR, Disertační práce VŠB - TUO, Ostrava, 2014

Ústav aplikované matematiky, Fakulta dopravní ČVUT v Praze, Česká republika
E-mail address: voracova@fd.cvut.cz