DŮKAZ EKVIVALENCE DVOU DEFINIC ELIPSY

JIŘÍ BLAŽEK

ABSTRAKT. Dynamická geometrie otevřela zcela nový přístup k řešení geometrických problémů. Díky jejím rysům je možné experimentovat a získat tak fakta, která významně pomohou při řešení problému. Tento článek je případovou studií, v níž autor, vybaven znalostmi softwaru, synteticky dokazuje ekvivalenci dvou definic elipsy – jako množiny bodů s konstantním součtem vzdáleností od ohnisek a jako množiny bodů s konstantním poměrem vzdáleností od ohniska a řídící přímky.

ÚVOD

Každý nástroj, který člověk ovládne, rozšiřuje postupně jeho možnosti. Objev počítače spadá do poloviny 20. století. Je zbytečné mluvit o tom, co všechno počítače umožnily, stojí na nich naše civilizace. V tomto článku nás bude zajímat pouze jeden jejich aspekt: počítače umožnily matematice, aby se do jisté míry stala experimentální vědou. Pokud nám chybí nápad, můžeme se dívat na empirická data a hledat vzory, které se teprve poté pokusíme zdůvodnit.

Od příchodu softwaru Dynamické Geometrie (DGS) v 80. letech se experimentálním hřištěm stala i eukleidovská geometrie. Studenti nebo i matematici mohou problém zkoumat v prostředí DGS, dynamicky konstrukci měnit a provádět promyšlené i zcela náhodné experimenty v naději, že naleznou něco, co je k řešení problému navede.

Tento článek je subjektivní záznam experimentů v prostředí DGS, které autora navedly k důkazu ekvivalence dvou definic elipsy. Tento důkaz publikoval v časopise [1]. Autorovi není známo, že by zde podaný důkaz byl všeobecně známý. Běžně se problém ekvivalence obou definic elipsy elegantně řeší v prostoru pomocí *Quételet - Dandelinovy* věty [2] z roku 1822.

1. DVĚ DEFINICE ELIPSY

Elipsu je možné definovat dvěma (středoškolskými) způsoby.

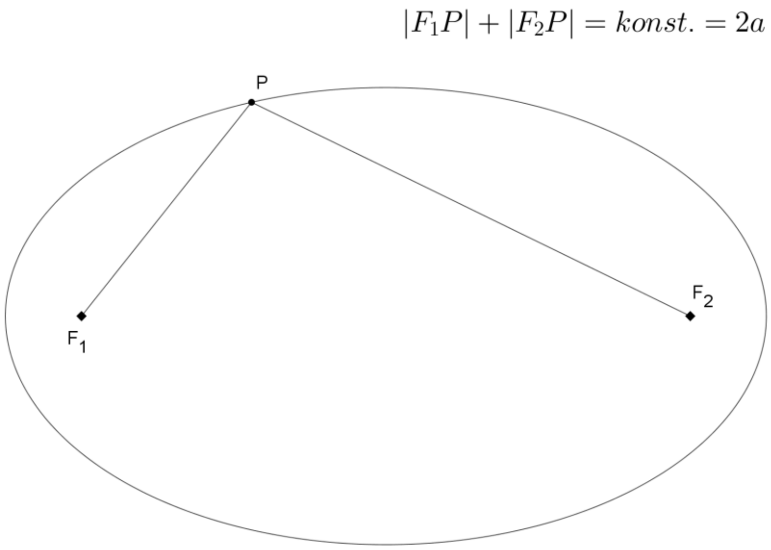
- Ohnisková definice

  Elipsa ρ je množinou bodů P s konstantním součtem vzdáleností $2a$ od dvou daných ohnisek F_1F_2 (obr 1).

Received by the editors 10.02.2020

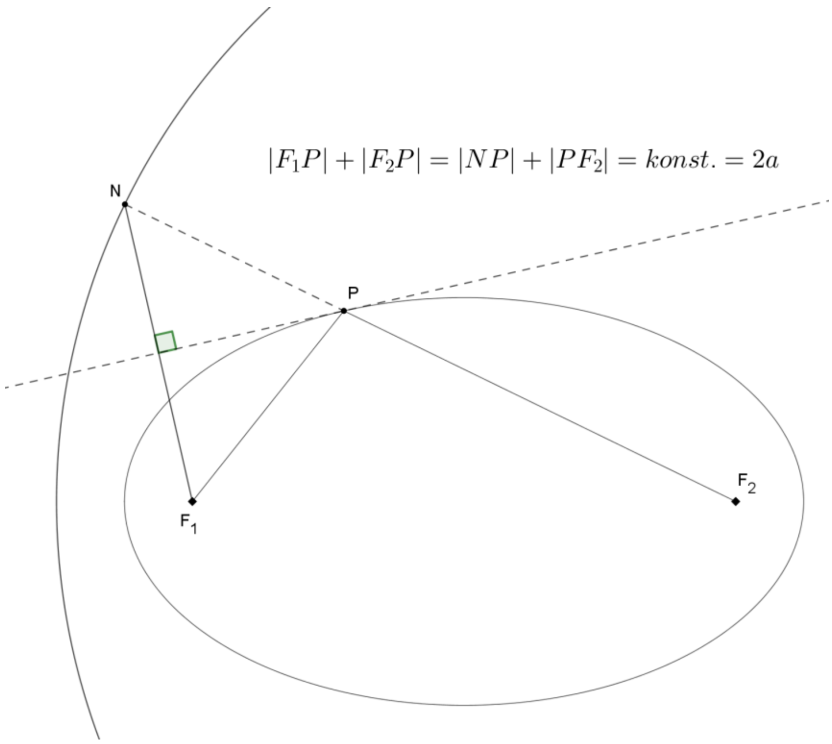
2010 *Mathematics Subject Classification.* 51M04, 97G99.

Key words and phrases. DGS, problem solving, elipsa, ekvivalence definic, řídící kružnice, řídící přímka



OBRÁZEK 1: Ohnisková definice elipsy

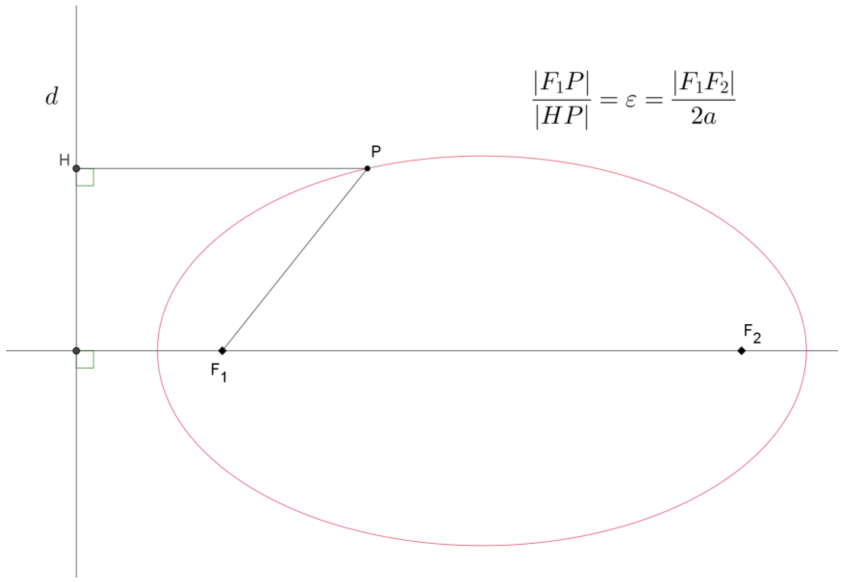
Tato definice je ekvivalentní s definicí pomocí tzv. řídící kružnice: Uvažujme kružnici k se středem v bodě F_2 o poloměru $2a$. Pak množina bodů P, které mají stejnou vzdálenost od ohniska F_1 a kružnice k, je elipsa (obr 2). Zdůvodnění ponecháváme na čtenáři.



OBRÁZEK 2: Definice pomocí řídící kružnice

- Definice pomocí řídící přímky

  Elipsa τ je množina bodů P s konstantním poměrem vzdáleností $\varepsilon = \frac{|F_1F_2|}{2a} < 1$ od jednoho z ohnisek a takzvané řídící přímky d (obr 3).

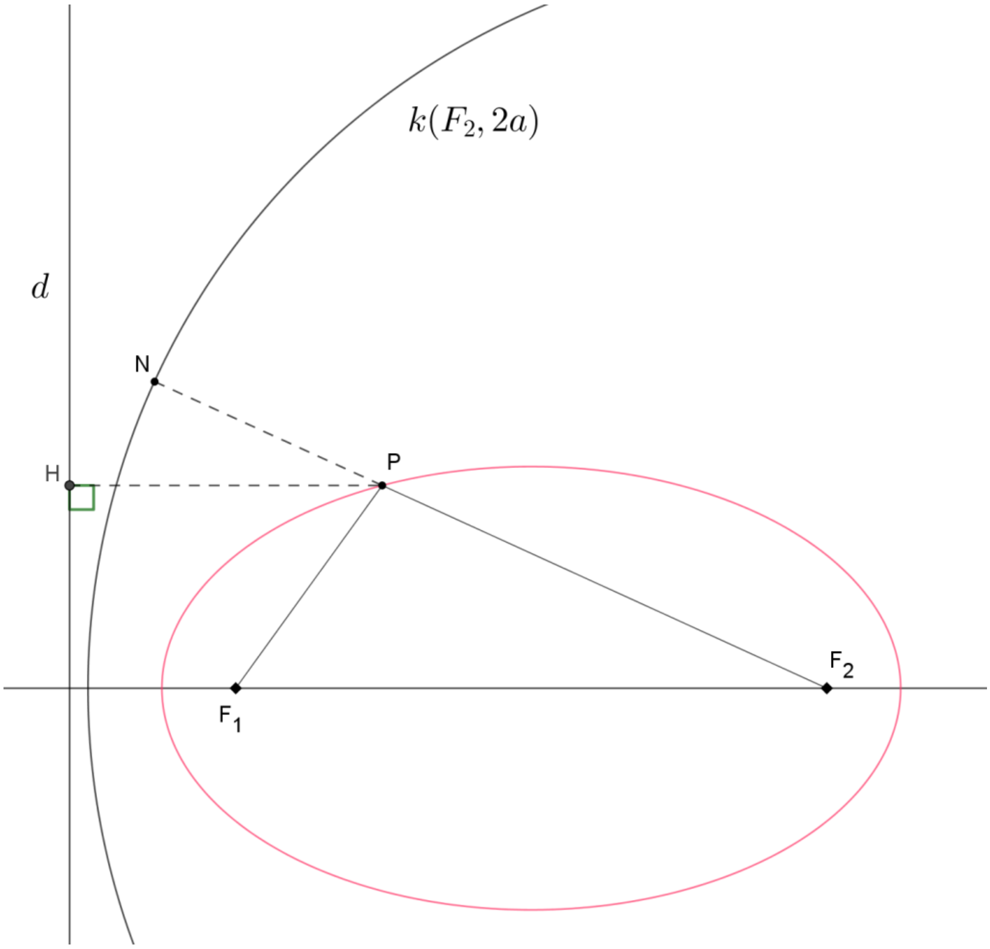


OBRÁZEK 3: Definice pomocí řídící přímky

Ukážeme nyní pouze pomocí geometrických úvah (nikoli pomocí analytického vzorce elipsy), že množina bodů τ, definovaná pomocí řídící přímky, je stejná, jako množina ρ, definovaná pomocí řídící kružnice.

2. PRŮZKUM PROBLÉMU

Subjekt (řešitel) začal tím, že si zadání problému (tedy obě konstrukce τ a ρ elipsy) narýsoval do Geogebry. Nechť libovolnému bodu P elipsy odpovídá bod N na řídící kružnici a bod H na řídící přímce (obr 4):

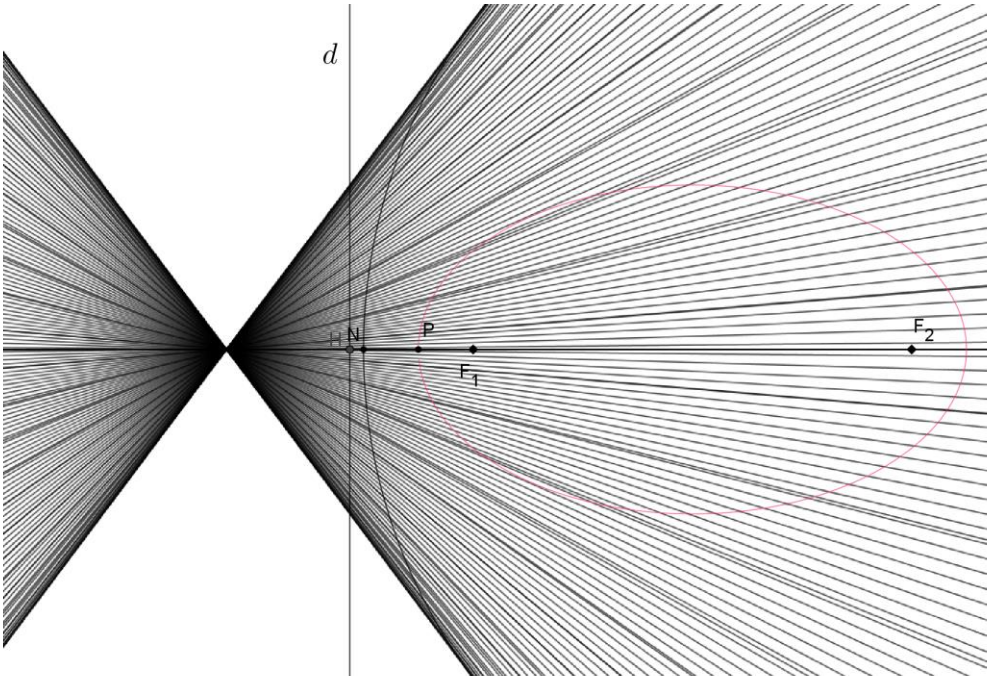


OBRÁZEK 4: Zadání problému

Po chvíli přemýšlení dospěl subjekt k otázce:

Otázka 1: V jakém „vztahu" jsou body H a N?
Otázka je neurčitá a není jasné, jak na ní odpovědět matematicky. Po chvíli byl proveden následující experiment (obr 5).

Experiment 1: Sestrojme přímku HN a zapněme její stopu. Pohybujme bodem P elipsy. Co pozorujeme?



OBRÁZEK 5: První experiment, objev fixního bodu

Experimentální fakt 1: Přímka HN vždy prochází fixním bodem E, ležícím na přímce F_1F_2

Konstruovat bod E pomocí přímky HN není z matematického hlediska elegantní, vzniká otázka:

Otázka 2: Jak zkonstruovat bod E přímo, aniž by bylo nutné zkonstruovat přímku HN?

Experiment 2: Po chvíli pozorování konstrukce zkusil subjekt sestrojit obraz ohniska F_1 v inverzi kružnice k.

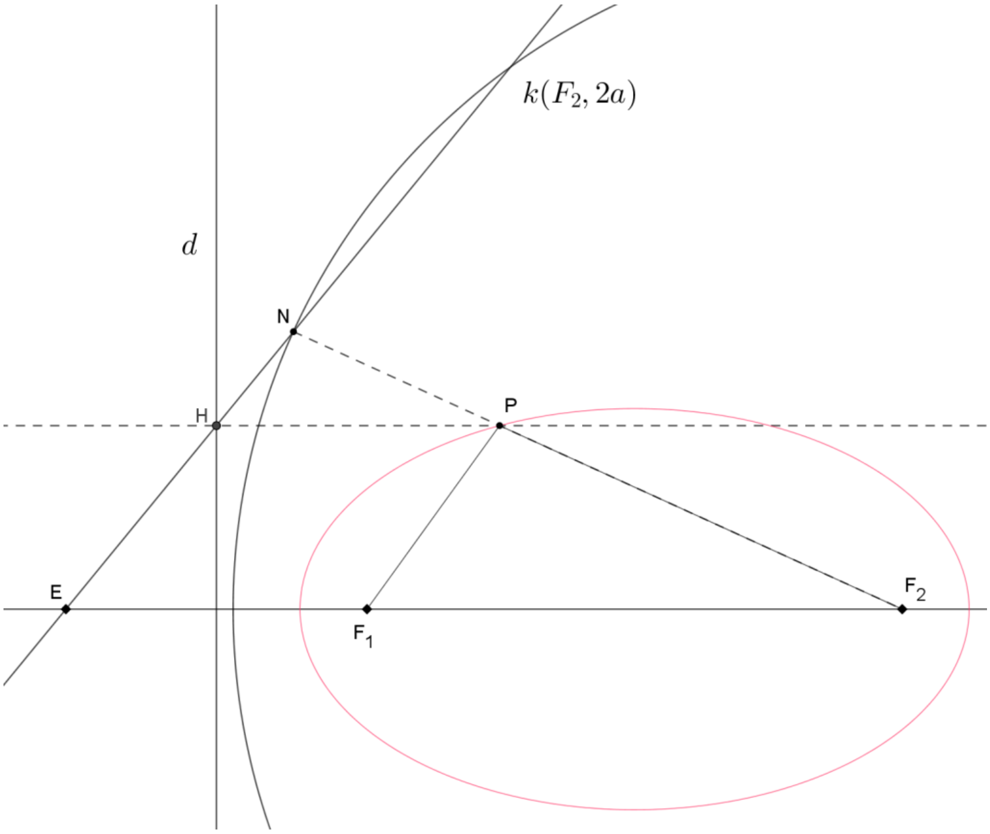
Empirický fakt 2: Bod E je obrazem bodu F_1 v inverzi kružnice k.

Poznámka: Obraz E bodu F_1 v inverzi kružnice se středem F_2 a poloměrem R je bod, který splňuje vztah: $|EF_2||F_1F_2| = R^2$ a leží na polopřímce F_2F_1.

Obr 6 ukazuje, v jaké fázi se nyní nacházíme. Při pohledu na něj se následující otázka vnucuje:

Otázka 3: Neleží střed úsečky F_1E na řídící přímce d?

Empirický fakt 3: Střed S úsečky F_1E leží na přímce d. Jinými slovy, přímka d je osou úsečky F_1E



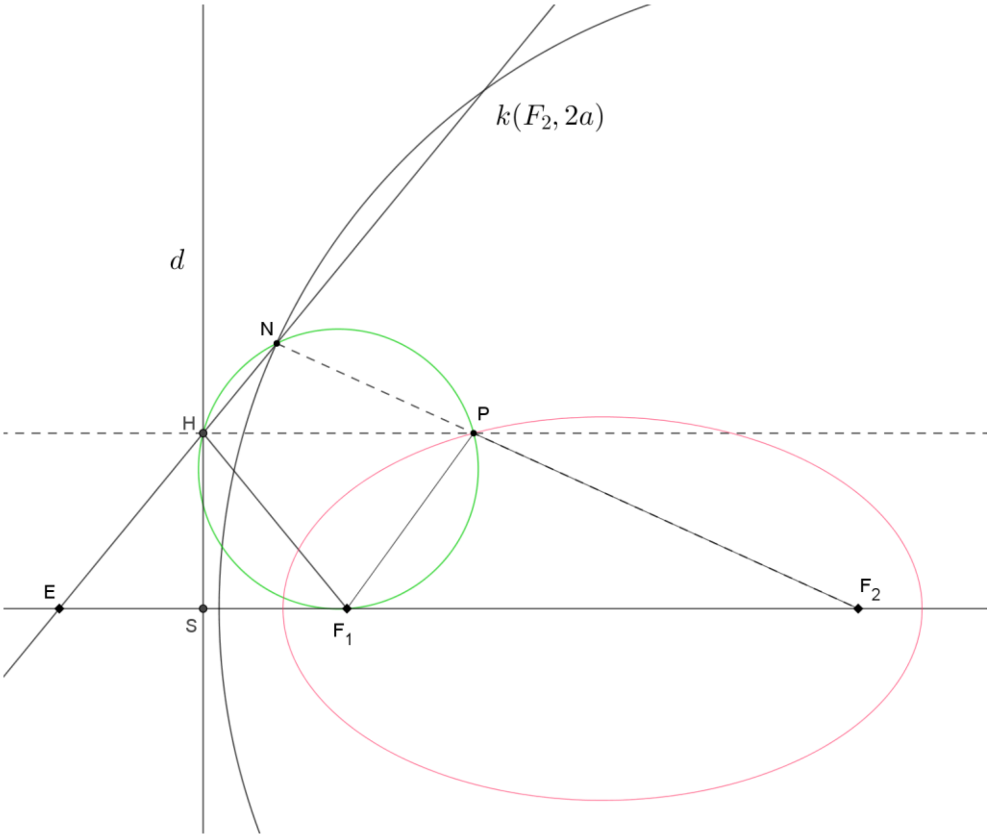
OBRÁZEK 6: Situace po objevu vztahu mezi body F_1 a E

Nakonec řešitele napadla ještě jedna otázka, ačkoli v tom okamžiku ještě netušil, zda bude souviset s řešením problému:

Otázka 4: Neleží nějaké čtyři význačné body konstrukce na kružnici?

Empirický fakt 4: Čtyřúhelníku F_1HNP lze opsat kružnici.

Zde skončila experimentální fáze a nastala fáze deduktivní. Empirické poznatky shrnuje obrázek 7.



OBRÁZEK 7: Shrnutí všech faktů

3. KONSTRUKCE DŮKAZU

Nejdříve zvolíme vhodný postup. Vyjdeme z definice elipsy pomocí řídící kružnice a sestrojíme přímku d podle vypozorovaných experimentálních faktů. Tedy:

1. Sestrojíme řídící kružnici k se středem F_2 a poloměrem $R = 2a$.
2. Na polopřímce F_2F_1 sestrojíme bod E, pro který platí $|EF_2||F_1F_2| = R^2$.
3. Sestrojíme osu d úsečky EF_1.

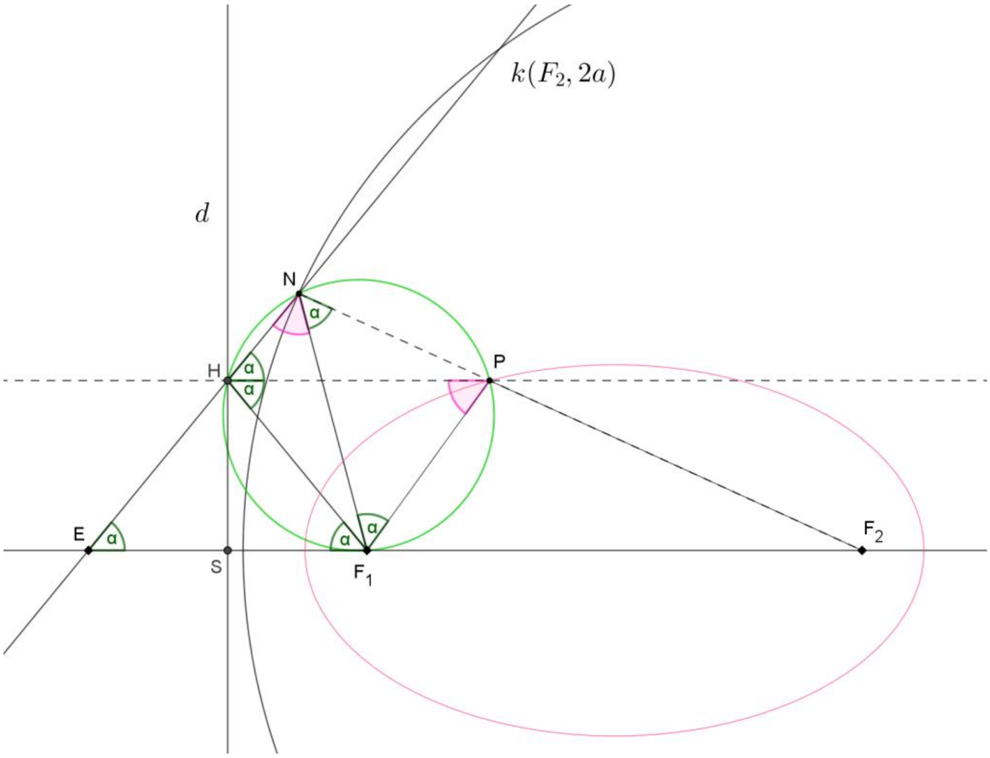
Dokážeme, že tato přímka d má vlastnosti řídící přímky. Za tímto účelem zkonstruujme:

1. Libovolný bod P elipsy a jemu odpovídající bod N na řídící kružnici.
2. Průsečík H přímky NE s přímkou d.

Je nutné nyní dokázat dvě fakta:

(i) Úsečka $|HP|$ je vzdálenost bodu P od přímky d (jinými slovy, přímka HP je kolmá na přímku d)

(ii) Pro poměr úseček platí $\frac{|F_1P|}{|HP|} = \varepsilon = \frac{|F_1F_2|}{2a}$



OBRÁZEK 8: Postup důkazu

Všechny následující úvahy se vztahují obr. 8.

Podle konstrukce bodu E platí $|EF_2||F_1F_2| = R^2$. Tuto rovnici přepíšeme do tvaru $|EF_2|/R = R/|F_1F_2|$ a uvědomíme si, že trojúhelníky F_2F_1N a F_2NE sdílejí úhel u vrcholu F_2, jsou tedy podobné: $\triangle F_2F_1N \sim \triangle F_2NE$. Trojúhelníky NF_1P a HEF_1 jsou rovnoramenné (bod H leží na ose d), můžeme proto psát $\alpha = \sphericalangle NF_1P = \sphericalangle F_1NF_2 = \sphericalangle NEF_2 = \sphericalangle HEF_1 = \sphericalangle HF_1E$. Z toho lze vyvodit $\sphericalangle F_1HN = 2\alpha$ a $\sphericalangle F_1PN = 180° - 2\alpha$ a čtyřúhelníku $HNPF_1$ lze opsat kružnici. Z věty o obvodových úhlech dostaneme $\alpha = \sphericalangle NF_1P = \sphericalangle NHP = \sphericalangle NEF_1$, tedy přímka HP je rovnoběžná s přímkou EF_1, která je však kolmá k d. Dokázali jsme (i).

K důkazu druhého tvrzení stačí dokázat podobnost trojúhelníků ENF_1 a HPF_1. Platí $\sphericalangle HPF_1 = \sphericalangle HNF_1 = \sphericalangle ENF_1$ a $\alpha = \sphericalangle F_1NP = \sphericalangle F_1HP = \sphericalangle F_1EN$. S využitím podobnosti trojúhelníků $\triangle F_2F_1N \sim \triangle F_2NE$ dostáváme

$$\frac{|F_1N|}{|EN|} = \frac{|F_1F_2|}{|NF_2|} = \frac{|F_1F_2|}{2a} = \varepsilon.$$

V důsledku podobnosti $\triangle ENF_1 \sim \triangle HPF_1$ můžeme psát

$$\varepsilon = \frac{|F_1N|}{|EN|} = \frac{|F_1P|}{|HP|},$$

což je (ii).

Na závěr poznamenejme, že jsme nedokázali ekvivalenci, ale pouze jednosměrnou implikaci, totiž že body splňující ohniskovou definici splňují rovněž definici pomocí řídící přímky. Dokončit plnou ekvivalenci však není těžké. Nejjednodušší je asi postupovat sporem: předpokládat existenci bodu P, splňujícího druhou definici, ale nikoli první.

ZÁVĚR

Klasická představa začátečníka je, že k experimentálnímu přístupu ve vědě stačí dobré pozorovatelské schopnosti. Že je to něco jako hledání hub – stačí se pozorně dívat. Tak tomu však není ani v klasických vědách, jako je např. fyzika či biologie, a v matematice to už vůbec neplatí. K tomu, abychom něco nového vypozorovali, musíme nejdřív provést selekci toho, co chceme pozorovat a jak by to mohlo vypadat, proto pozorování nelze oddělit od předchozích znalostí a logiky subjektu [3].

Zároveň experiment nebývá náhodný, ale musí se připravit. Když se ohlédneme za našimi čtyřmi experimenty, pouze třetí byl motivován výhradně vizuálním vnímáním (střed úsečky F_1E leží na řídící přímce d), v ostatních třech experimentech hrála roli heuristika a zkušenosti.

Autor tohoto článku se zabývá problematikou, do jaké míry DGS pomáhá při řešení geometrických problémů. Ukazuje se, že deduktivní důkaz je pro netrénovaného studenta těžký oříšek, který většina studentů nerozlouskne. Překvapivý je především fakt, že mnoho studentů není schopno experimentálně nalézt alespoň některá fakta, která by s řešením problému mohla nějak souviset. Proč tomu tak je, je zřejmé z výše uvedeného: pokud studentovi chybí potřebné matematické znalosti, je možné, že nevytipuje ani ta nejtriviálnější fakta.

Je všeobecně uznáváno, že vhodné zavedení počítačů do výuky, může oživit a zatraktivnit proces důkazu a řešení problémů [4]. Tím hlavním důvodem je právě možnost otevření experimentálního přístupu k jejich řešení. Experimentální hledání matematických faktů není rutina, ale tvořivý proces, který může rozvíjet žákovo myšlení a upevňovat jeho znalosti.

LITERATURA

[1] Blažek, J., Leischner, P.: *Jak souvisí Apolloniovy kružnice s elipsou?* MFI, roč. 28 (2019), č. 2, s. 81-91. Dostupné na: http://www.m_.upol.cz/index.php/m_/article/view/445

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres

[3] Magajna, Z.: Automated Observation of Dynamic Constructions, *International Journal for Technology in Mathematics Education* (2017) **24**(3), 115-120.

[4] Prusak N., Hershkowitz R. & Baruch B.: *From visual reasoning to logical necessity through argumentative design*, Educ. Stud. Math (2012)

KATEDRA MATEMATIKY PF JU V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH, ČESKÁ REPUBLIKA
E-mail address: jirablazek@seznam.cz