MECHANICKÉ PŘEVODY VE VÝUCE MATEMATIKY

JAN FIALA

Abstrakt. Příspěvek je věnován výuce matematiky na střední škole, konkrétně řešení aplikačních úloh vycházejících z technické praxe, obecně pak užití moderních výukových metod. V příspěvku řešíme dvě konkrétní matematické úlohy z tématu všeobecně známých mechanických převodů. Úlohy doplňujeme komentářem v oblasti didakticko-metodologické, uvádíme výhody i úskalí jejich zařazení do výuky matematiky na střední škole a pro potřeby učitelů připojujeme vlastní zkušenosti z výuky na gymnáziu.

Úvod

Současné výuce matematiky na základních a středních školách bývá právem vytýkána řada skutečností. Jak vyplývá např. ze zprávy České školní inspekce ČR ([1], s. 36-38), je matematika pro žáky stále neoblíbený předmět, žáci nevěří ve své znalosti a dovednosti, jejich postoj k matematice se s věkem zhoršuje, žáci středních škol hodnotí svůj vztah k matematice hůře než žáci základních škol a nevnímají matematiku jako důležitý předmět pro své budoucí vzdělání a pracovní uplatnění. Ve výuce se dostatečně a zřetelně neuvádí do souvislosti matematické teoretické poznatky s praktickými aplikacemi z běžného života žáků apod. Závěry zprávy ČŠI o rozvoji matematické gramotnosti potvrzují, že existuje zjevný vztah mezi sebedůvěrou žáka a jeho zájmem o matematiku a jeho úspěšností v ní. Vyvstává tak jednoznačný požadavek (podle zprávy zvláště na středních školách) na zvýšení zájmu žáků o matematiku, aniž by došlo ke snížení množství nabytých znalostí a dovedností.

Jak naplnit takové cíle? Zpráva mimo jiné doporučuje rozšiřovat paletu užívaných výukových metod ve výuce matematiky, využívat ICT technologie, aktivněji zapojovat žáka ve výuce apod. K nápravě výše naznačených problémů může podle našeho názoru přispět také postupné, nenásilné, současně však promyšlené zařazení nových matematických úloh (ve vhodném didaktickém zpracování a s využitím vhodných výukových metod) do výuky matematiky či fyziky, které budou svým tématickým zaměřením podporovat zájem žáků o matematiku a v nichž žáci propojí své znalosti z různých oborů s praxí.

V příspěvku jsme zvolili úlohy, které využívají fyzikálně-technických poznatků o mechanických převodech, které naplňují cílové zaměření vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace podle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia ([2], s. 22): řešení problémových úloh, práce s matematickými modely a jejich kritické posouzení s vědomím, že realita je vždy komplikovanější, pochopení vzájemných vazeb mezi okruhy učiva a aplikaci poznatků v jiných předmětech, užívání moderních

Date: 10.02.2020.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 97M50.

Key words and phrases. Matematika, mechanický převod, převod ozubenými koly, řemenový převod, řetězový převod, goniometrické funkce.

počítačových technologií k efektivnímu řešení úloh aj. Po velmi stručném vhledu do technicko-fyzikální terminologie mechanických převodů (který doporučujeme před vlastním zařazením úloh do výuky matematiky provést také se žáky např. v součinnosti s učitelem fyziky) se zaměřujeme na didakticko-metodologické aspekty dvou matematických úloh ze zvoleného tématu a kromě konkrétních návodů připojujeme pro potřeby učitelů vlastní zkušenosti s těmito úlohami z výuky na gymnáziu.

1. Mechanické převody a jejich druhy

Mechanickými převody se zabývá fyzikální obor mechanika a rozumí jimi součásti mechanických strojů (např. páka, kladka, kolo na hřídeli, nakloněná rovina aj.), které přenáší sílu mezi jeho pohyblivými částmi. Na mechanickém převodu tedy rozlišujeme vždy převodovou část hnací a část hnanou, při tom obě části konají nejčastěji otáčivý pohyb a jde tedy většinou o tělesa ve tvaru kol. Kolo roztáčené vnější silou se nazývá hnací kolo, kolo, které je roztáčeno hnacím kolem, se nazývá hnané kolo. Kola nemají společnou osu otáčení.

K základním druhům mechanických převodů řadíme podle konstrukce mechanické převody třecí (např. v třecích lisech, na hrnčířském kruhu, u benzinových motorek a jízdních kol), převody ozubenými koly (nejčastěji např. v hodinářských strojích a v převodovkách aut), řemenové převody (dříve běžně užívané v továrnách pro spojení hřídelí strojů, dodnes nenahraditelné např. při přenosu rotačního pohybu z turbíny na alternátor např. ve strojovně malé vodní elektrárny), řetězové převody (např. v převodech na jízdních kolech nebo v motorech automobilů, u řetězových dopravníků, řetězových kladkostrojů), hřebenové převody či šnekové převody (např. u vinných lisů, vrátků, výtahů, navijáků, zvedáků, napínáků strun kytary).

Podle směru otáčení rozlišujeme převody souhlasné (obě kola mají stejný smysl otáčení, vyskytují se u řetězových a řemenových nezkřížených převodů) a převody nesouhlasné (kola mají opačný smysl otáčení, vyskytují se u třecích, ozubených a řemenových zkřížených převodů).[1] Konečně členění podle velikosti převodu: tzv. převod dorychla (hnané kolo se otáčí rychleji než hnací kolo) a převod tzv. dopomala (hnané kolo se otáčí pomaleji než hnací). Existuje řada dalších druhů mechanických převodů (např. tzv. variátory), pro naše úlohy se staly inspirací především řetězové převody. Podrobnější popis jednotlivých druhů mechanických převodů lze nalézt např. v [12].

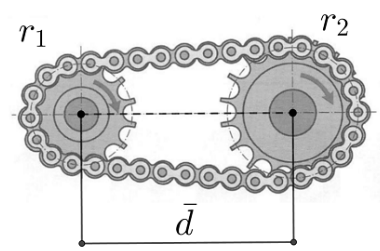
1.1. Matematicko-technický popis řetězového a řemenového převodu, popis převodu ozubenými koly.

Znázorněme si pro potřeby dalších úvah řetězový převod. (Obrázek 1) Základní charakteristikou každého převodu je ve fyzice tzv. převodový poměr, značený i, který je určen poměrem počtu otáček hnaného a hnacího kola, nebo poměrem jejich poloměrů nebo průměrů, případně poměrem počtu zubů hnacího a hnaného kola:

[1] Převody souhlasné, resp. nesouhlasné se nazývají též jako synchronní, resp. asynchronní. Geometrickým modelem asynchronního plochého řemenového převodu je známá Möbiova páska (viz [3]).

$$i = \frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2}, \tag{1.1}$$

kde n_1 (n_2) je počet otáček hnacího (hnaného) kola (také frekvence otáčení), d_1 (d_2) průměr hnacího (hnaného) kola a z_1 (z_2) je počet zubů hnacího (hnaného) kola.



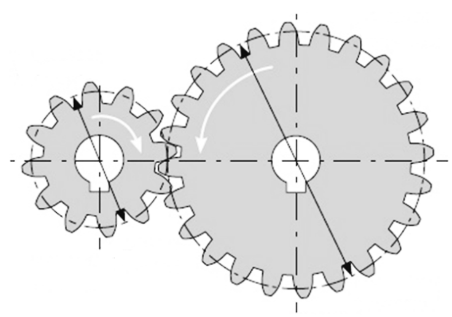
Obrázek 1. Model řetězového převodu (zde převod dopomala).(Zdroj obrázku: [4])

Platí: pro $i < 1$ jde o převod dopomala, pro $i > 1$ jde o převod dorychla. Ve strojnictví je převodový poměr definován opačně než ve fyzice:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \tag{1.2}$$

Hodnota $i > 1$ platí pak pro převod dopomala, $i < 1$ převod dorychla. V dalším textu se přidržíme druhého, tj. strojnického či technického pojetí převodového poměru podle vztahu 1.2.

Jednoduchý převod tvořený dvěma ozubenými koly má neměnný převodový poměr. (Obrázek 2) Tzv. převodovka umožňuje měnit velikost kol, a tím i převodový poměr.



Obrázek 2. Model převodu ozubenými koly. (Zdroj obrázku: [5])

Převod ozubenými koly se skládá ze dvou kol, která společně tvoří soukolí. Menší z obou kol se zpravidla nazývá pastorek. Převodů ozubených kol existuje velké množství s rozličným použitím, nejširší uplatnění našel čelní převod ozubenými koly např. v mechanismech stavidel, lisů a zubaček (horských drah), v čerpadlech, převodovkách apod.

U řetězového a řemenového převodu ani převodu ozubenými koly neovlivňuje výslednou hodnotu převodového poměru i vzdálenost středů ani délka řetězu či řemene. Výslednou hodnotu i tak ovlivňují pouze poloměry (resp. průměry) obou kol, nebo též počty zubů na obou ozubených kolech.

Poznámka ke geometrickému tvaru zubů ozubeného kola: Mechanický převod ozubenými koly, ve kterém do sebe zapadají zuby hnaného a hnacího kola, nevzbuzuje u laika představu o nějaké zvláštní geometrické složitosti ozubených kol. Opak je však pravdou: aby zuby kol do sebe správně zapadaly, musí být ve tvaru cykloid (více k cykloidám např. v [8]), častěji však tzv. evolvent (např. v [9]). Evolventu si žáci nejsnáze představí jako křivku, kterou opíše bod přímky, která se odvaluje po dané kružnici. Dodejme, že problematika geometrie převodu ozubenými koly je pro žáky středních škol jednoznačně nadstavbová, tedy nad rámec základního učiva. Proto se zde konstrukci cykloid a evolvent podrobně nevěnujeme. Toto téma by snad bylo možné zařadit jen do matematických seminářů na středních školách či do učiva pro talentované žáky.

2. Matematické modelování některých mechanických převodů

Pokud čtenář vynechal předchozí kapitolu o matemticko-technickém popisu řetězového a řemenového převodu, resp. převodu ozubenými koly, mohou pro něj být některé dále užívané pojmy nesrozumitelné a v takovém případě pak doporučujeme se k obsahu úvodních kapitol vrátit. Také žáci by měli být před řešením následujících úloh seznámeni se základní terminologií mechanických převodů, neboť jim to umožní lépe porozumět obsahu zadaných úloh. Předloženými úlohami se budeme dále zabývat především z pohledu matematiky.

Obrázek 3. Detail řetězového převodu cyklistického kola: hnané kolo s osou opatřenou pedály má 3 převodníky s různými průměry (vpravo), hnané kolo má 7 ozubených kol s různými poloměry (vlevo), obě kola jsou spojena článkovým řetězem. (Zdroj obrázku: [6])

2.1. Úloha 1: Rychlost pohybu cyklisty.

V první úloze se vrátíme k řetězovému převodu, který děti znají především z převodu na cyklistickém kole. (Obrázek 3) *Jakou rychlostí na kole jedeme a co ji může ovlivnit?* To je asi nejzákladnější otázka, kterou si děti kladou, když chtějí jet na kole co nejrychleji. Součástí řetězového převodu na cyklistickém kole je také tzv. přehazovačka (u hnaného kola, případně také u kola hnacího). *K čemu přehazovačka slouží a jak ovlivňuje výslednou rychlost jízdy? Který převodový talíř využijeme při jízdě do kopce a který při jízdě s kopce?* Děti většinou znají, že přehazovačka slouží k přesunu řetězu na jiné ozubené kolo za účelem změny převodového poměru, méně známá je skutečnost, že její podstatnou funkcí je napínání řetězu. Takové a jim podobné otázky by měly u žáků vzbudit zájem o řešení následující úlohy.

Zadání úlohy: Vypočítejte rychlost pohybu cyklisty při proměnném počtu zubů z_1, z_2, dané frekvenci šlapání a dané velikosti kola v palcích. Sestavte graf závislosti rychlosti pohybu na hodnotě převodového poměru.

Řešení úlohy: Označme proměnné a konstanty, které se v úloze vyskytují: vzdálenost os hřídelí $\bar{d}$ (neovlivňuje hodnotu i) se odvíjí od různě velkého rámu cyklistického kola (v modelu považujeme za konstantu), délka řetězu, která neovlivňuje velikost výsledné rychlosti pohybu a proto ji ponecháváme bez označení, velikosti průměrů d_1, d_2 hnacího a hnaného kola ovlivňující velikost i, v modelu dále uvažujeme počty zubů z_1 (u hnacího kola) a z_2 (u hnaného kola).

Výsledná rychlost v pohybu cyklisty závisí na frekvenci f šlapání (tj. počet otáček za sekundu), velikosti kol na jízdním kole (průměr d v palcích) a hodnotě převodového poměru i.

Uvažujme pro další úvahy jízdní kolo s možností změny 3 talířů na hnacím kole (s počty zubů 22, 32 a 42) a pětikolečkem vzadu na hnaném kole (s počty zubů postupně 10, 15, 20, 25 a 30).

Má-li největší talíř na hnacím kole 42 zubů a nejmenší ozubené kolo vzadu na hnaném kole 10 zubů, je převodový poměr $i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{10}{42} \doteq 0{,}24$ a půjde o převod dorychla ($i < 1$), který využijeme při jízdě s kopce nebo na rovině, co do vynaložené síly jde o převod „nejtěžší“.

Uvažujeme-li naopak na hnacím kole nejmenší talíř s 22 zuby a u hnaného kola vzadu největší ozubené kolo s 30 zuby, je převodový poměr $i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{30}{22} \doteq 1{,}36$ a jde o převod dopomala ($i > 1$), což využijeme tehdy, jedeme-li na kole do kopce, co do vynaložené síly jde o převod „nejlehčí“. Jestliže by mělo hnací i hnané kolo stejný počet zubů, bude převodový poměr $i = 1$.

Jaký je vliv převodového poměru na rychlost jízdy? Větší hodnota převodového poměru i svědčí o potřebě vynaložit na jízdu menší sílu, avšak při nižší rychlosti. A obráceně. Nebo také: Čím větší je převodový poměr, tím menší bude výsledná rychlost a opět obráceně. To je patrné i ze vztahu pro výpočet výsledné rychlosti pohybu cyklisty, kde i figuruje ve jmenovateli zlomku

$$v = \frac{f\pi d}{i}, \tag{2.1}$$

kde f je frekvence šlapání, tj. počet otáček hnacího kola za časovou jednotku, zde uvažujeme $f = 1$ ot/s, a kde d je průměr kola v palcích (1 palec = 25,4 mm). ([7], s. 142) V úloze uvažujeme kolo pro dospělé, tedy $d = 26$ palců, tj. 660,4 mm= 0,6604 m.

Po dosazení do vzorce 2.1 za f a d dostaneme:

$$v = \frac{f\pi d}{i} \doteq \frac{1 \cdot \pi \cdot 0{,}6604}{i} \doteq \frac{0{,}6604\pi}{i}. \tag{2.2}$$

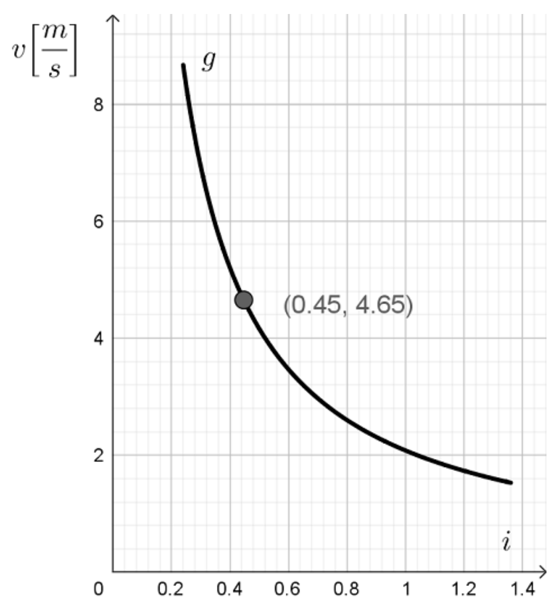
Uvažujeme funkci g^2, která vyjadřuje závislost rychlosti v pohybu cyklisty na hodnotě převodového poměru i:

$$v = g(i),$$

tedy

$$g : v = \frac{0{,}6604\pi}{i}, D(g) = \left\langle \frac{10}{42}; \frac{30}{22} \right\rangle. \tag{2.3}$$

Připojme nyní komentář k definičnímu oboru $D(g)$ vytvořené funkce g: Definiční obor funkce g nyní pro jednoduchost považujme za reálný uzavřený interval navzdory skutečnosti, že cyklista může při různých volbách ozubených kol na hnacím a hnaném kole vytvořit jen 15 různých kombinací, tedy dosáhne 15 různých fixních rychlostí. Definičním oborem by tedy měla být množina daná výčtem 15 různých hodnot reálných čísel převodového poměru i. Rovněž grafem by neměla být souvislá křivka (jak uvádíme dále), nýbrž množina 15 izolovaných bodů, které ovšem leží na zmíněné hyperbole. Graf funkce g v soustavě souřadné O_{iv} je uveden na obrázku 4.



Obrázek 4. Graf funkce g vyjadřující závislost rychlosti v pohybu cyklisty na převodovém poměru i podle funkčního předpisu 2.3 (Zdroj obrázku: vytvořil autor v programu GeoGebra).

Grafem funkce g (2.3) je část hyperboly. Z obrázku 4 je patrné, že při stálé frekvenci šlapání 1 ot/s klesá s rostoucí hodnotou převodového poměru i výsledná rychlost v pohybu cyklisty. Např. pro $i = 0{,}45$ dosahuje cyklista rychlost $v \doteq 4{,}65$ m/s $\doteq 16{,}7$ km/h. Pro nejnižší hodnotu převodového poměru $i = \frac{10}{42}$ je jeho

[2] Záměrně nevolíme označení funkce f, jak to bývá ve školním prostředí běžné, nýbrž značíme g, aby nedošlo k záměně s frekvencí šlapání cyklisty.

rychlost nejvyšší: $v \doteq 8{,}71$ m/s $\doteq 31{,}3$ km/h, naopak nejnižší rychlosti $v \doteq 1{,}53$ m/s $\doteq 5{,}5$ km/h dosáhne při nejvyšší hodnotě převodového poměru $i = 1{,}36$. Ve všech případech však předpokládáme stálou frekvenci šlapání 1 ot/s. K řešení nebo ověření výpočtu lze využít dynamický applet programu GeoGebra (viz [10]).

Metodicko-didaktické poznámky: Základním motivačním momentem úlohy je skutečnost, že jízda na kole je pro žáky běžnou a oblíbenou sportovní činností. Stává se často, že žáci nevědí, jak správně na kole řadit. Právě s tímto problémem může žákům úloha pomoct, stejně jako s nalezením odpovědi na otázku, jak docílit co nejvyšší rychlosti. Z uvedeného vyplývá, že úloha žáky podporuje v jejich vnitřní motivaci k učení.

Především je potřeba upozornit učitele na zvýšené požadavky na znalosti žáků o mechanických převodech (např. převodový poměr, frekvence šlapání aj.). Bez jejich porozumění by byla úloha pro žáky nesrozumitelná a tedy obtížně řešitelná. Pomoct může spolupráce s učitelem fyziky.

Úloha má silný mezipředmětový náboj, neboť propojuje aplikaci poznatků z matematiky a fyziky. Strukturní složitost úlohy poukazuje na vyšší komplexnost, což dokládají obecnost zadání (zcela bez konkrétních čísel, jež musí žák postupně doplnit), množství používaných termínů, a tím i šíře uplatněných znalostí z různého matematického učiva. Pochopitelná je tedy i vyšší časová náročnost na zařazení úlohy do výuky: doporučujeme věnovat řešení úlohy ideálně projektovou metodou aspoň dvě vyučovací hodiny. Investovaný čas se zhodnotí ve zpestření výuky a zvýšení zájmu žáků o řešení matematických problémů ze života. V výukových forem je pak vhodná skupinová práce, kde se přirozeně vytvoří pracovní hierarchie žáků, což všechny zapojí do práce. Rovněž je vhodný pracovní list, který žáky úlohou „provede“.

Tato problémová úloha je dobrou ukázkou matematické úlohy z teorie funkcí (konkrétně jde o funkci nepřímá úměrnost), které se středoškoláci věnují většinou ve druhém ročníku. Přínos řešení naší úlohy spočívá v tom, že žáci pracují s matematickým modelem určitého častého jevu své reality, oproti případu, kdy učitel se žáky pouze nacvičuje sestrojení grafu tohoto druhu funkce bez vztahu k realitě. I když by bylo možné považovat vytvořenou funkci g za funkci více proměnných (f, d a i), záměrně se omezujeme volbou konstant za f a d na funkci jedné reálné proměnné i, jak je na střední škole běžné. Naznačené rozšíření však není – aspoň podle našich zkušeností – pro většinu žáků vyšších tříd gymnázia nepřekonatelné. Za velmi vhodné považujeme upozornit žáky na existenci funkcí více proměnných, neboť se s funkcí jedné proměnné setkají v životě jen zřídkakdy, spíše výjimečně. Proto je také potřeba žákům zdůraznit, že vytvořené matematické modely nemohou nikdy odrážet realitu zcela přesně, výsledky jsou tedy pouze přibližné.

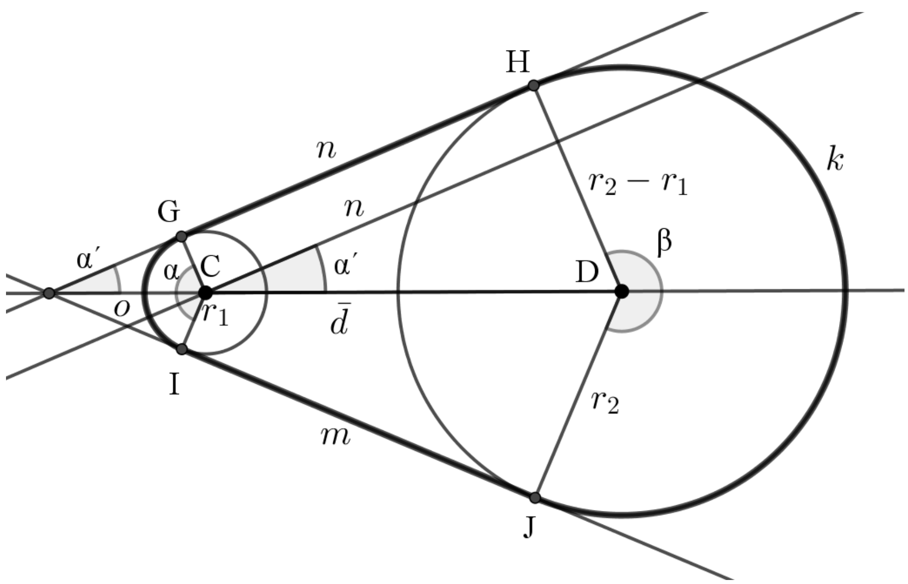
Vzorec 2.1 popisující danou závislost žáci sice sami neodvozují, je však vhodným odrazovým můstkem k hlubším myšlenkovým pochodům o vlivu jednotlivých proměnných na výslednou rychlost pohybu a je prostředkem pro nácvik dovednosti práce se symboly (např. vyjadřování neznámé ze vzorce, což se učí již v prvním ročníku).

Úloha je vhodná jak ve fázi vysvětlování učiva, tak ve fázi procvičování. K úloze se může učitel také opakovaně vracet a s vyšším stupněm znalostí žáků klást při řešení náročnější otázky a úkoly. Aktivizující povaha úlohy se zesílí využitím vhodného matematického software např. pro tvorbu grafu.

2.2. **Úloha 2: Délka řetězu na řetězovém převodu.** Znovu se budeme zabývat řetězovým převodem na cyklistickém kole a zaměříme se na délku řetězu, který spojuje obě ozubená kola. Pro jednoduchost vynecháme z řetězového převodu přehazovačku. *Jak dlouhý řetěz máš na svém jízdním kole? Jak dlouhý řetěz je vhodný pro tvé kolo?* Rozdílnost žákovských odpovědí na tuto úvodní jednoduchou otázku, která je má vybídnout k diskusi, může učitele až překvapit. Potvrzuje to naší zkušenost, jak obtížné mohou odhady být. Jak ukážeme dále, představuje určení délky řetězu poměrně komplikovaný úkol, a to jak z pohledu geometrie, tak i náročnosti užitých výpočtů.

Zadání úlohy: Uvažujme tedy řetězový převod (bez přehazovačky), jako je na obrázku 1, který je tvořen kolem hnacím o poloměru r_1, $r_1 \in \{1, ..., 10\}$ [cm], a kolem hnaným o poloměru r_2, $r_2 \in \{1, ..., 10\}$, [cm]. Nejdříve odvoďte vzorec pro výpočet délky l řetězu cyklistického převodu, je-li vzdálenost os obou kol $\bar{d}$, $\bar{d} \in (0; 20\rangle$, [cm]. Vypočítejte délku l řetězu, je-li $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 7$ cm a $\bar{d} = 15$ cm. Jaká podmínka musí být splněna pro r_1, r_2, d, aby byl převod funkční? Kdy jde o převod dopomala a kdy dorychla (pro jakou hodnotu převodového poměru i)? Jak se vzorec pro výpočet délky řetězu změní pro $r_1 = r_2 = r$?

Řešení úlohy: Hledanou délku řetězu si snadno představíme na matematickém modelu na obrázku 5. Délka l řetězu je rovna součtu délek k, o dvou oblouků GCI a JDH na kružnicích modelujících ozubená kola a délek dvou úseček m, n s krajními body po řadě I, J a G, H, jež jsou dotykovými body společných tečen obou kružnic.



Obrázek 5. Matematický model pro výpočet délky řetězu na řetězovém převodu

Postupnými kroky odvodíme délku l řetězu: Uvažujeme $r_1 < r_2$.
Podle obrázku 5 platí: $m = n$, $l = o + k + 2 \cdot n$ a $\alpha + \beta = 360°$.
Po dosazení vztahů za dílčí proměnné dostaneme:

$$l = \alpha \frac{2\pi r_1}{360^\circ} + (360^\circ - \alpha)\, \frac{2\pi r_2}{360^\circ} + 2\sqrt{\bar{d}^2 - (r_2 - r_1)^2},$$

$$l = \frac{\pi\alpha}{180^\circ}\,(r_1 - r_2) + 2\pi r_2 + 2\sqrt{\bar{d}^2 - (r_2 - r_1)^2}. \tag{2.4}$$

Ve vzorci 2.4 zůstává neznámá proměnná velikost úhlu α. Opět z obrázku 5 lze odvodit: $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha'$ a $\sin\alpha' = \frac{r_2 - r_1}{\bar{d}}$, tedy $\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r_2 - r_1}{\bar{d}}$, tedy $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r_2 - r_1}{\bar{d}}$.

Pak $\alpha = 2\arccos\frac{r_2 - r_1}{\bar{d}}$. Po dosazení dostaneme:

$$l = \frac{\pi}{90^\circ}\,(r_1 - r_2)\cdot 2\arccos\frac{r_2 - r_1}{\bar{d}} + 2\pi r_2 + 2\sqrt{\bar{d}^2 - (r_2 - r_1)^2}. \tag{2.5}$$

Po dosazení do 2.5 hodnot ze zadání úlohy $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 7$ cm a $d = 15$ cm získáme:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\pi}{90^\circ}\,(4-7)\cdot 2\arccos\frac{-1}{5} + 14\pi + 2\sqrt{15^2 - (7-4)^2} = \\ &= \frac{-\pi}{30^\circ}\arccos\left(\frac{-1}{5}\right) + 14\pi + 2\sqrt{216} \doteq 65{,}16\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Aby byl převod funkční, musí platit: $r_1 + r_2 < d$. Je-li $r_1 < r_2$, jde o převod dopomala, je-li $r_2 < r_1$, jde o převod dorychla. Podobně lze také říct: Je-li převodový poměr $i = \frac{d_2}{d_1}$, $i \in (0;1)$, jde o převod dopomala, pro $i \in (1;\infty)$ jde o převod dorychla. Pro $r_1 = r_2$ mají obě kola stejný počet otáček a vzorec 2.5 má zjednodušený tvar $l = 2\pi r + 2\bar{d}$, což je součet délky kružnice o poloměru $r_1 = r_2 = r$ a dvojnásobku vzdálenosti $\bar{d}$ os obou kol.

Také u druhé úlohy lze k řešení nebo k ověření písemného výpočtu využít applet programu GeoGebra (viz [11]).

Didakticko-metodické poznámky: Řešený příklad je tématicky jednak z oblasti geometrie, neboť připomíná žákům konktrukční úlohu nalézt společné tečny ke dvěma kružnicím s různými středy, jejíž řešení se opírá o podobné zobrazení stejnolehlost, resp. stejnolehlost kružnic. K vlastnímu výpočtu délky řetězu je pak zapotřebí využít znalostí z goniometrie, resp. trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku, které jsou podle našich zkušeností pro žáky jedny z nejobtížnějších částí učiva matematiky zpravidla ve třetím ročníku na střední škole. Zvláště uplatnění goniometrických (zde také cyklometrických) funkcí je v praktických úlohách tou hlavní překážkou k nalezení správného výsledku dané úlohy. Může to pramenit také z toho, že žáci nevhodně či příliš ukvapeně volí postup řešení a mylně se spoléhají na jeho správnost: pro vyjádření dílčích částí délky celého řetězu musí žáci vhodným způsobem doplnit obrázek a k výpočtům využít vzorec pro délku oblouku kružnice, Pythagorovu větu, dále také např. kofunkční vztahy apod.

Ve výuce žáci úlohu řešili ve skupinách po třech nebo čtyřech, v každé skupině byl aspoň jeden zdatnější žák, který za pomoci ostatních doplňoval správná řešení k dílčím otázkám v pracovním listu. Žáci si uvědomili složitost celého vzorce na výpočet délky řetězu, s jehož lepší vizuální podobou jim pomohl učitel. Vlastní dosazení konkrétních hodnot se ukázalo být dobrým nácvikem jejich početních dovedností středoškoláků. Tak jako v první úloze musíme zjištěný výsledek potřeba za pouze přibližný, neboť ozubená kola zapadají do řetězu a jeho délka tak musí být o trochu větší, aby získal řetězový převod určitou vůli pro svou potřebnou funkčnost. Výsledek je platný pro tzv. patní kružnici ozubených kol (viz geometrie ozubeného kola, podrobnosti uvádí např. technické tabulky).

Stejně jako první řešená úloha je i druhá úlohou komplexní, vyžadující matematické znalosti (i dovednosti) z různého učiva matematiky na SŠ, což úlohu činí obtížnou. Na druhou stranu její vyřešení – nejlépe v rámci procvičení probraného učiva – upevní žákovské početní dovednosti i jejich zkušenosti s řešením komplexněji pojatých úloh.

Závěr

V příspěvku jsme se snažili představit mechanické převody jako didakticky i motivačně vhodný materiál pro tvorbu úloh do výuky matematiky, neboť přináší do školního prostředí tolik žádané aplikace. Inspirovat se můžou učitelé historickými příklady užití machanických převodů i příklady ze současnosti, kdy jsou využívány především v technické praxi. Je však třeba mít na paměti vhodné didaktické zpracování do výuky, které zohlední věk žáků a dosažený stupeň znalostí. Řešené úlohy jsou vhodné do třetího nebo čtvrtého ročníku střední školy.

Technická komplikovanost mechanických strojů vede často k matematickým úlohám vyšší vnitřní složitosti, což má za následek zvýšenou náročnost na pozornost žáků při vlastním řešení. jak jsme zdůraznili již výše, je nezbytné se žáky před vlastním řešením vysvětlit význam fyzikálně-technických pojmů, které jsou k řešení potřeba. Ve výuce se nám osvědčila skupinová práce: žáci řešili dané úlohy ve skupinách čtyř nebo pěti žáků. Nápomocný jim byl učitel. Přestože role každého ze členů skupiny je při řešení obtížnějších úloh většinou jiná, vyšší intimita menšího pracovního kruhu sníží nebo úplně odstraní ostych žáků známý z frontálního vyučování a zavede každého z nich blíže k aktivnímu zapojení, a tím k vyššímu učebnímu efektu. Žáci užívali předem připravený pracovní list a společně řešili zadané úkoly. Na závěr projektových hodin byly výsledky porovnány a ověřeny na appletech v programu GeoGebra.

Obě úlohy naplnily cílové zaměření vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace podle RVP: užili jsme netradiční metodu a formu výuky, využili jsme ICT technologie, propojili jsme poznatky z různých oborů i z různých částí matematického učiva a připoměli žákům, že se v životě se školní jednoduchostí řešených úloh setkají jen velmi zřídka, a tak je potřeba považovat výsledky matematických modelů za pouze přibližné.

Literatura

[1] *Rozvoj matematické gramotnosti na základních a středních školách ve školním roce 2017/2018.* Tematická zpráva. Praha: ČŠI, 2019. Dostupné na URL: https://www.csicr.cz/cz/Aktuality/Tematicka-zprava-Rozvoj-matematicke-gramotnosti-na.

[2] Kol. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* Praha: VÚP v Praze, 2007. ISBN: 978-80-87000-11-3.

[3] Möbiova páska. Dostupné na URL: https://cs.wikipedia.org/.

[4] Fialová, D., Gradek, V. *Technologie.* Zámečnické práce a údržba, 1. díl Učebnice pro odborná učiliště. 1. vyd. Praha: Parta, 2006-2008. ISBN 978-80-7320-127-23.

[5] Model převodu ozubenými koly. Zdroj obrázku na URL: https://www.ludwigmeister.de/technische-informationen/zahnraeder.

[6] Jízdní kolo. Dostupné na URL: https://www.kola-radotin.cz/damske-trekingove-kolo-specialized-ariel-int.

[7] Voráčová, Š. et al. *Atlas geometrie*. Geometrie krásná a užitečná, Praha: Academia, 2012. ISBN: 978-80-200-1575-4.
[8] Cykloida. Dostupné na URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid.
[9] Evolventa. https://en.wikipedia.org/wiki/Involute
[10] Řetězový převod. Applet. Dostupné na: https://www.geogebra.org/m/eTS426C7.
[11] Délka řetězu. Applet. Dostupné na: https://www.geogebra.org/m/fdjtupq6.
[12] Fiala, J. Matematickou cestou k technice – mechanické převody jako inspirace pro výuku matematiky. *Sborník příspěvků 9. konference Užití počítačů ve výuce matematiky 7.–9. listopadu 2019 České Budějovice.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2019, pp. 26-37.

Gymnázium V. Nováka Jindřichův Hradec, Jindřichův Hradec, Česká republika
Email address: `fiala@gvn.cz`