

# ARITMETIKA A KRABIČKY

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ A TOMÁŠ HOLAN

**ABSTRAKT.** Článek představuje možnosti systému ATest, zaměřeného na podporu aritmetických dovedností žáků, který autoři představili na konferenci „Užití počítačů ve výuce matematiky“. Prostředí napomáhá nejen automatizovat provádění základních aritmetických operací, ale vyžaduje (a tím cvičí) schopnost hledat možné konstrukce daného cíle-výsledku. ATest jednak přispívá k částečné gamifikaci výuky, jednak využívá konstruktivistický přístup.

## ÚVOD

Článek vychází z prezentace systému ATest na 9. konferenci Užití počítačů ve výuce matematiky v Českých Budějovicích v listopadu 2019. Ukazuje příklady využití volně dostupného dynamického systému ATest [1], vytvořeného pro podporu schopností žáků hledat konstrukce, v tomto případě aritmetické konstrukce, kterými je možné sestavit z daných vstupních podmínek požadovaný výsledek.

Ve škole při nácviu základních aritmetických operací vyplňují žáci různé pracovní listy či sešity s připravenými rovnostmi, v nichž je třeba doplnit na určenou pozici správné číslo tak, aby výsledná rovnost platila. Tak se učí sčítat, odčítat, násobit a celočíselně dělit. Učí se také pravidla pro „počítání v řádce“ a práci se závorkami, tedy dozívají se o prioritě operací a naučí se distributivní zákon.

ATest nahrazuje zmíněné „počítání v řádce“ schématem. Žáci v zadání úlohy dostanou „krabičky“ – „krabičku“ s požadovaným výsledkem, několik „krabiček“, které obsahují čísla a „krabičky“, které představují povolené operace. Spojují jejich vstupy a výstupy a získávají novou hodnotu provedením příslušné operace s danými čísly. Hledají vhodnou strukturu, konstrukci, jak z čísel, která mají k dispozici, získat pomocí dostupných operací požadovanou hodnotu.

## 1. ATEST („KRABIČKY“)

Systém je dostupný online a funguje jak na počítači, tak na libovolném dotykovém zařízení. Při seznámení se systémem je třeba žákům ukázat, jak se struktura operací vytváří, upravuje, jak vypadají přípustné vazby.

**1.1. První úlohy, prostředí a manipulace v něm.** Pro sestavenou strukturu platí následující pravidla:

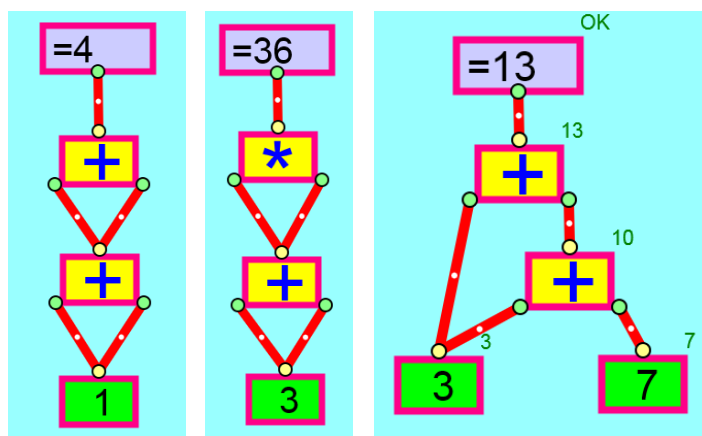
- VÝSTUP (žlutý) → VSTUP (zelený) – tj. výstupní symbol se propojí se vstupním,
- HODNOTU (výstup: číslo, výsledek operace) lze použít opakovaně,
- OPERACI – krabičku – je možno použít právě jednou, do každého vstupu vchází právě jedna hodnota,
- není nutno využít ani všechny operace, ani všechna čísla.

---

Received by the editors 10.02.2020.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 97U40, 97U50, 97U70.

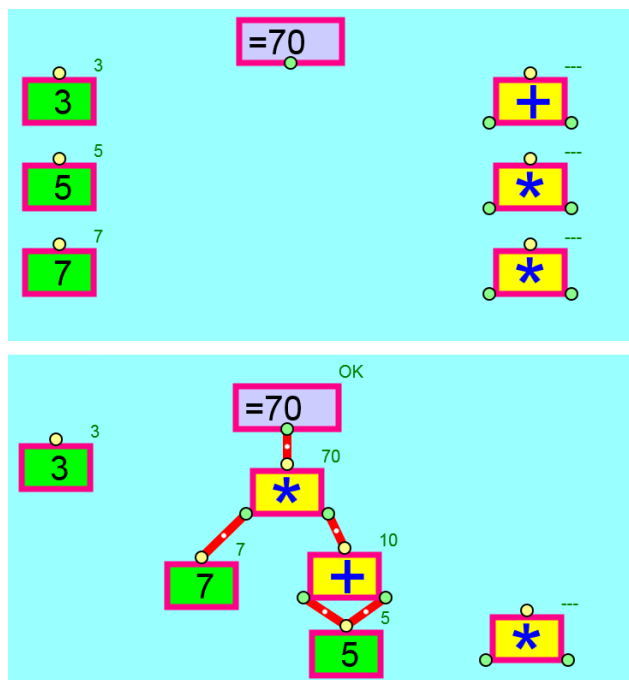
*Key words and phrases.* Gamifikace, konstrukce, aritmetika, on-line aplikace.



OBRÁZEK 1: Ukázka opakovaného použití hodnoty v konstrukci

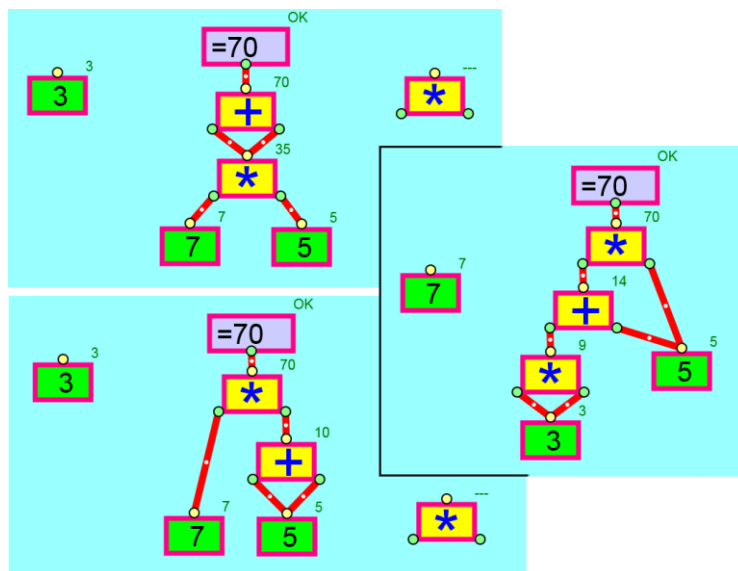
Uvedená pravidla nejsou nijak překvapivá, jsou omezena jen tím, aby sestavená struktura dávala jednoznačný výsledek. Na směr, jak uspořádáme „krabičky“ na obrazovce, nezáleží, ale vstupy operací jsou zakresleny dole a výstupy nahoře a případné křížení spojnic může žáky spíše mást. Manipulace s objekty je intuitivní, žákům je potřeba zdůraznit pouze to, že jakákoliv hodnota (tedy i vypočtená) může být použita opakovaně tolikrát, kolikrát je třeba a kdekoliv ve struktuře. Příklady takových konstrukcí ukazuje Obrázek 1.

Učitel se může rozhodnout, zda žákům zadá úlohu, v níž jsou zobrazeny výsledky všech prováděných operací, takže je žák průběžně vidí a vidí i to, zda úlohu vyřešil správně. Učitel může také chtít, aby žáci mezivýsledky neviděli, ale drželi je v paměti (či je opakovaně rychle vyhodnocovali). Ve variantě bez zobrazení mezivýsledků se vyhodnocení správnosti provede po stisku tlačítka, které je ve stránce ATestu nad appletem s konstrukcí.



OBRÁZEK 2: Úloha, kde je snadné nalézt (nějaké) správné řešení.

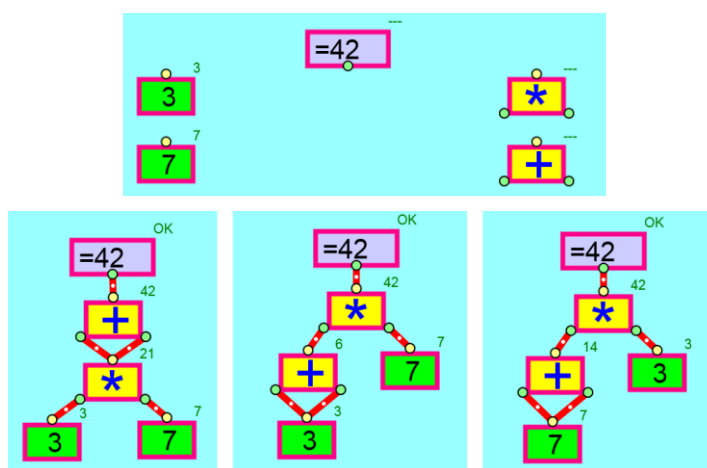
Pro úvodní motivaci žáků při cvičení elementárních operací nejlépe slouží snadné úlohy, v nichž je postup, jímž je možné získat požadovaný výsledek, snadno vidět, případně kde je možné sestavit několik různých cest, které vedou k cíli. Příklad takového zadání (a jednoho řešení) ukazuje Obrázek 2. Na Obrázku 3 pak vidíme další možná řešení této úlohy. Vidíme zde jednak to, že v konstrukci není nutné využít ani všechna daná čísla, ani všechny operace, jednak to, že se různé konstrukce mohou lišit v tom, které z dostupných hodnot a operací využijí.



OBRÁZEK 3: Další řešení téže úlohy (z Obrázku 2).

## 2. DISTRIBUTIVNÍ ZÁKON

Některé úlohy je možné využít pro motivaci k výkladu aritmetických pravidel. Pokud žáci naleznou několik různých konstrukcí požadovaného výsledku, můžeme hledat jejich souvislosti. Například trojice různých řešení úlohy na Obrázku 4 ilustruje distributivní zákon.



OBRÁZEK 4: Distributivní zákon

## 3. HLEDÁME RŮZNÁ ŘEŠENÍ

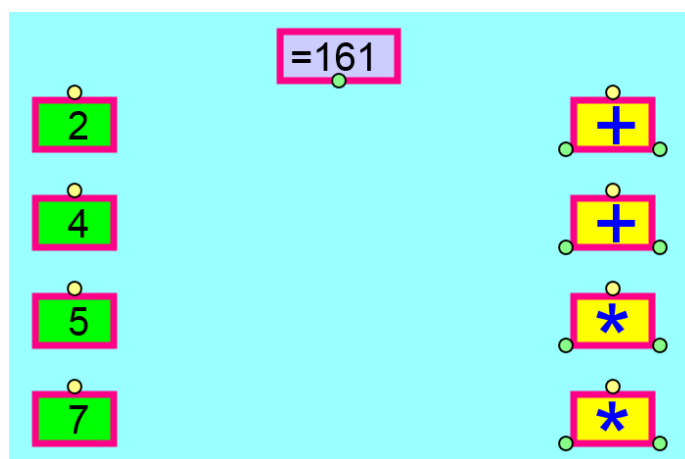
Pro účely nácviku počítání (základních celočíselných operací) se hodí takové úlohy, kde je možné sestavit požadovaný výsledek několika různými způsoby a přitom daná čísla nejsou velká, takže žákům stačí malá násobilka. Taková zadání žáky neodradí, protože některou z možných konstrukcí odhalí snadno a mohou pak hledat další konstrukce či pod vedením učitele své řešení porovnat s řešením spolužáků. Ukázkou jsou výše uvedené úlohy či úloha na Obrázku 5. Zkuste sami najít čtyři různé konstrukce.

Úlohy, v nichž „není co hledat“ naopak postrádají motivační potenciál. Takové úlohy v databázi jsou, ale hodí se spíše pro ukázkou, jak s aplikací pracovat.



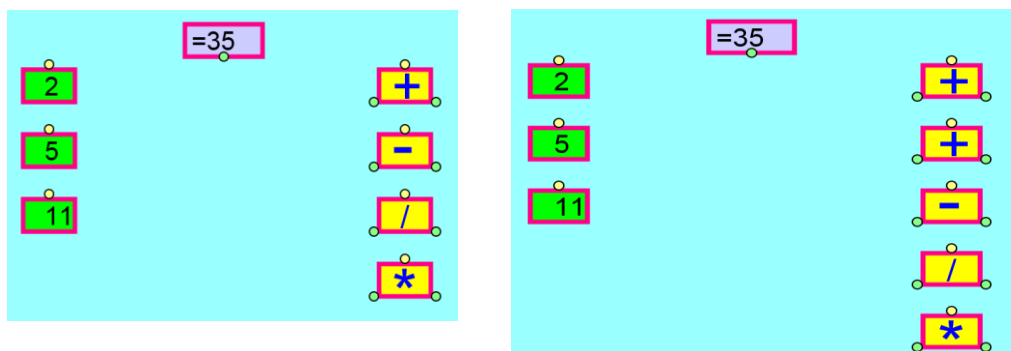
OBRÁZEK 5: Úloha s několika variantami řešení

V databázi je mnoho takových úloh, které mají dokonce desítky různých řešení. Zde můžeme dát žákům za úkol nejen najít několik různých konstrukcí požadovaného výsledku, ale také například hledat postupy, které využívají jen dvou ze zadaných hodnot, tří ze zadaných operací a podobně. Najdete všechny konstrukce hodnoty 161 v úloze na Obrázku 6? A najdete konstrukci, která obsahuje jen tři operace? A takové konstrukce, které využívají jen dvě ze zadaných hodnot?



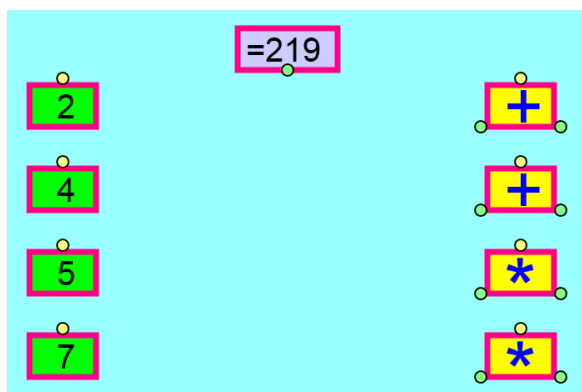
OBRÁZEK 6: Úloha, kde je možné nalézt velký počet konstrukcí

Počet čísel a operací, které mají žáci k dispozici, má na obtížnost úlohy značný vliv. V úlohách, kde je možné sestavit výsledek mnoha různými způsoby a kde přidání další operace tyto možnosti rozšíří, větší počet dostupných operací úlohu zjednoduší. Porovnejte dvě zadání na Obrázku 7. Zatímco prvé zadání (vlevo) umožní najít tři různé konstrukce, po přidání jediné operace (zde jedno sčítání na obrázku vpravo) přibudou – při stejných vstupních hodnotách – další možnosti řešení.



OBRÁZEK 7: Zjednodušení úlohy zvýšením počtu operací

Zcela jiná situace ale nastává, pokud existuje jen jediná konstrukce požadovaného výsledku, která navíc nevyužívá všechny „krabíčky“. Pak zvýšení počtu operací či uvedení nepoužitelných zadaných hodnot činí úlohu obtížnější, protože nabízí řešiteli mnoho cest a možností zkoušet a procházet více „slepých uliček“. Příkladem je konstrukce hodnoty 219 na Obrázku 8. Tato úloha je velmi těžká pro každého řešitele, bez ohledu na věk. Je to hlavolam.



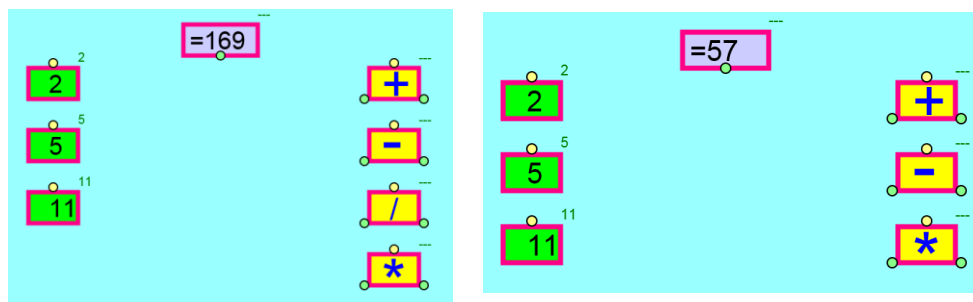
OBRÁZEK 8: Obtížnější úloha

Pokud bychom v zadání úlohy ponechali pouze vstupní hodnoty 4 a 7, které jediné vedou k řešení (protože žádná konstrukce, která by při daných operacích využila některé z čísel 2 a 5, neexistuje), našli bychom řešení rychleji.

#### 4. LEHKÉ A TĚŽKÉ ÚLOHY

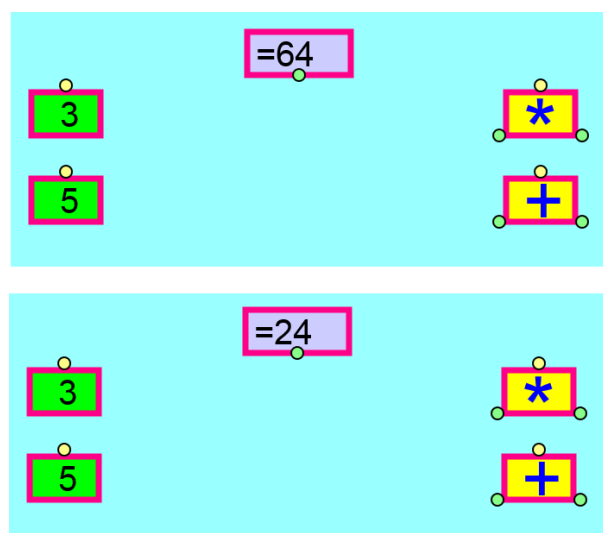
Pokud pozorujeme žáky při řešení úloh, vidíme, že některé úlohy jsou mnohem snazší než jiné, přestože jejich zadání vypadá na prvý pohled velmi podobně. Které úlohy jsou tedy pro

žáky snadné? Příklady snadných úloh vidíme na následujících obrázcích. Většina žáků rychle vyřeší úlohy (s malými čísly), pokud je požadovaný výsledek výsledkem jedné operace s danými čísly, případně pokud stačí k součinu daných čísel nějaké dané číslo přičíst či pokud vidí „známou“ druhou mocninu. Příklady jsou na Obrázku 9.



OBRÁZEK 9: Snadné úlohy (vpravo úloha pro žáky znalé druhých mocnin)

Je-li potřeba násobit součet čísel, najdou žáci obvykle řešení až po delší době. Zatímco první z úloh na Obrázku 10 ( $=64$ ) vyřešili žáci rychle ( $8 \times 8 = 64$ ), řešení druhé z nich ( $=24$ ) jim trvalo déle (hledali  $2 \times 12$  nebo  $6 \times 4$ ).

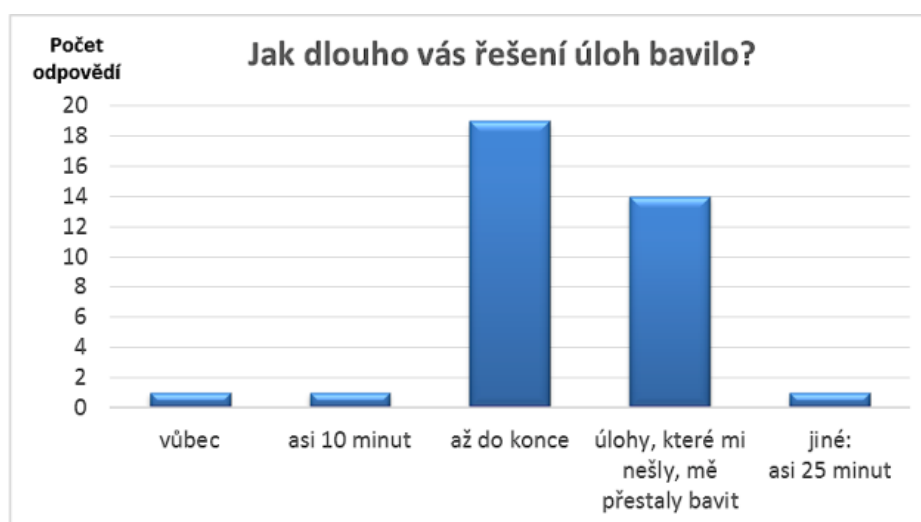


OBRÁZEK 10: Různě obtížné (snadné) úlohy

4.1. **Úkoly pro každého.** Databáze úloh ATestu obsahuje jak úlohy jednoduché, určené k procvičení počítání pro žáky, kteří nepočítají dostatečně rychle a s jistotou, tak úlohy, kde je třeba konstrukci daného výsledku opravdu hledat. Jak jsme se sami přesvědčili, jsou zde i takové úlohy, které na nějaký čas zaměstnají i dospělí. Vrátime-li se však k jednodušším úlohám, pak při samostatné práci ve škole je jednak možné zadat různým skupinám žáků různé skupiny úloh, a tak plně zaměstnat všechny žáky úlohami, které jsou pro ně přiměřeně obtížné a dostatečně motivující, jednak můžeme zadat celé třídě skupinu úloh, jejichž obtížnost postupně roste. Odhad obtížnosti jednotlivých úloh zatím zůstává úkolem učitele.

## 5. UŽITÍ VE ŠKOLE

Systém ATest jsme motivačně používali ve skupinách žáků různého věku, kterým jsme připravili sady různě obtížných úloh. Poté jsme řízeně pracovali se skupinou 30 žáků ve věku 11–12 let. Na jednu vyučovací úlohu jsme pro ně sestavili sadu 13 úloh různé obtížnosti a sledovali jsme jejich práci. Za jednoznačně pozitivní fakt považujeme to, že všichni žáci celou vyhrazenou dobu skutečně pracovali (ti, kteří zvládli vyřešit všechny úlohy dříve, pak ještě zkoušeli nalézt další konstrukce). Pro vyhodnocení vlivu aplikace na početní zdatnost žáků by bylo třeba provést objektivní testování. V dotazníku, který žáci vyplnili po skončení práce, odpovídali mimo jiné na otázku, zda je práce bavila. Jejich odpovědi zobrazené v grafu na Obrázku 11 jsou ve shodě s výše uvedeným pozorováním, že všichni žáci při hodině skutečně pracovali.



OBRÁZEK 11: Odpovědi 30 žáků. Žáci směli vybrat více odpovědí.

## ZÁVĚR

Aplikací ATest chceme přispět k tomu, aby nácvik nezbytných počtářských dovedností nebyl pro žáky nudný. Zároveň ukazujeme příklady, v nichž i z tak jednoduchých matematických úkonů, jako jsou sčítání a násobení, mohou vzejít úlohy, které žáky zaměstnají podobně jako hlavolamy.

## LITERATURA

- [1] Atest: [online] <http://atest.geometry.cz>
- [2] Gergelitsová, Š., Holan, T.: ATest – An Online Tool to Solve Arithmetic Constructions, *Transforming Learning with Meaningful Technologies. EC-TEL 2019. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 11722. Springer, Cham

KATEDRA SOFTWARE A VÝUKY INFORMATIKY, MFF UNIVERZITA KARLOVA, PRAHA, ČESKÁ REPUBLIKA  
E-mail address: [Sarka.Gergelitsova@mff.cuni.cz](mailto:Sarka.Gergelitsova@mff.cuni.cz)

KATEDRA SOFTWARE A VÝUKY INFORMATIKY, MFF UNIVERZITA KARLOVA, PRAHA, ČESKÁ REPUBLIKA  
E-mail address: [Tomas.Holan@mff.cuni.cz](mailto:Tomas.Holan@mff.cuni.cz)