MATEMATICKOU CESTOU K TECHNICE – SAMOSVORNÉ KLEŠTĚ

HANA MAHNELOVÁ

ABSTRAKT. Samosvorné kleště jsou četně využívaný důmyslný nástroj, na kterém lze ukázat aplikovanou matematiku. V několika úlohách určených středoškolákům vysvětlíme podstatu jejich fungování na základě znalostí z učiva geometrická místa bodů, vlastností mocninné funkce, funkce druhá odmocnina, funkce kosinus v daném intervalu, řešení pravoúhlého a obecného trojúhelníka. Ukážeme, jak je možné využít počítačového modelování. Součástí textu jsou formulace úkolů (včetně řešení) přímo použitelných ve výuce. Příklady jsou rozšířeny o odvození kinematické rovnice kleští.

ÚVOD

Matematika jako vyučovací předmět zažívá ve školách těžké období. I pro zkušené pedagogy začíná být obtížné dostatečně motivovat žáky k většímu zájmu o matematiku a s ní úzce propojené přírodovědné a technické obory. Zkušenosti autorky ukazují, že žáci a studenti se obávají přílišné abstrakce a přesnosti matematiky. Často se ptají: „A k čemu je to dobré?". Je proto důležité, ukazovat matematiku jako nástroj reálné praxe, v aplikacích. V průběhu středoškolského studia žáci postupně nabývají teoretických znalostí a částečně praktických dovedností z různých oblastí matematiky. Je tu však také příležitost ukázat vhodně zvolené úlohy z reálného života, ve kterých se matematika uplatňuje.

Jedním z takových příkladů je úloha zabývající se principem funkčnosti kleští. Následující text je rozdělen na dvě hlavní části. První je zaměřena na základní princip pákového převodu, ve druhé je odvozena kinematická rovnice samosvorných kleští, kterou ovlivňuje pozice regulačního šroubu. V zadaných úkolech první části žáci postupně aplikují své znalosti a porozumění z učiva geometrická místa bodů, funkční závislost, řešení obecného trojúhelníku (kosinová věta), porovnávají vzdálenosti bodů na základě využití trojúhelníkové nerovnosti, odvozují znaménka algebraických výrazů vyplývající z vlastností mocninných funkcí, funkce druhé odmocniny a goniometrické funkce kosinus v daném intervalu. Odvození kinematické rovnice kleští vyžaduje od řešitelů především schopnost dobře zpracovat algebraické výrazy s několika proměnnými a umět použít substituční metodu řešení rovnic, které sestavíme s pomocí znalosti řešení pravoúhlého trojúhelníka (Pythagorova věta, definice goniometrických funkcí ostrého úhlu).

S věcným předmětem by se měl žák dobře seznámit, poznat jeho mechanickou funkčnost a způsob použití. To lze v ideálním případě zaručit tak, že bude mít žák kleště k dispozici. Další možností je promítnou žákům krátké manipulační video, které učitel dopředu připraví. Následující postup a způsob výuky závisí na volbě vyučujícího. Řešitelé mohou pracovat jednotlivě nebo ve skupinách, k odkrývání tajemství lze zvolit metodu badatelsky orientované výuky, kdy žáci samostatně experimentují, tvoří a dokazují své hypotézy, modelují např. s pomocí počítače apod. Nastane-li situace, že je učitel v časové tísni, pak může použít přímo

Received by the editors 10.02.2020.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 97M50.

Key words and phrases. Samosvorné kleště, aplikovaná matematika, geometrická místa bodů, mocninné funkce, funkce druhá odmocnina, funkce kosinus, kinematická rovnice.

zadání otázek uvedených v další části textu jako pracovní list. V každém případě je vhodné na samém začátku se žáky diskutovat o tom, k čemu je daný předmět užitečný a kdo jej používá.

Nejen řemeslní mistři typu svářeč, klempíř, zámečník a instalatér ve své základní výbavě nářadí mají tzv. samosvorné kleště (obr. 1), které slouží k uchopení materiálu kruhového průřezu profilového materiálu (speciální druh oceli, obvykle zpracované do podoby tyčí) a plochého materiálu (plech). Jejich čelist může být rovná, elipsová či půlkulatá. Kleště se vyznačují vysokým upínacím tlakem díky převodu lomenou pákou. Odborně řečeno se v našem případě jedná o příklad čtyřkloubového mechanismu s jedním stupněm volnosti.

OBRÁZEK 1: Samosvorné kleště; zdroj: http://www.mallring.cz

Ptejme se, jak je docíleno tak velkého pákového převodu a silného stisku kleští? Když vezmeme zmiňované nářadí do ruky, experimentálně zjistíme, že pohyblivé jsou dolní části kleští, upínací pružina a spojovací díl horní a jedné z dolních částí. To vše díky otáčivému pohybu čtyř pák konstantních délek (a, b, c, d) kolem čtyř tzv. kloubů, v obr. 2 označených body A, B, C, D.

OBRÁZEK 2: Čtyřkloubový mechanismus; zdroj: autorka

Body C a D jsou při použití kleští vždy ve statické poloze. Náš model je navíc vybaven nastavovacím šroubem, s jehož pomocí lze před použitím kleští měnit vzdálenost bodů C, D a do jisté míry tak ovlivnit rozpětí čelistí při optimálním stisku. Body A, B se pohybují po zajímavých trajektoriích. Důležitou roli zřejmě hrají úhly otáčení.

Následující soubory úkolů určených středoškolákům umožní s využitím jejich znalostí z oblasti matematiky postupně odhalit princip fungování tohoto mechanismu. Úlohy jsou rozděleny na dvě části a chronologicky řazeny za sebou. Je vhodné je řešit v tomto pořadí. Nadstavbou je následné odvození kinematické rovnice kleští, kterou lze využít např. při tvorbě počítačového modelu, s vysvětlením funkce regulačního šroubu.

Prohlédneme-li si kleště pozorně, uvidíme, že jsou sestaveny z jednotlivých částí spojených nýty. Některé z nich tvoří vrcholy mnohoúhelníku, jehož délky stran ovlivňují polohu spodní čelisti. O jaký mnohoúhelník se jedná? Námět na řízenou diskusi, po níž by bylo vhodné vytvořit dynamický model tohoto čtyřúhelníku v některém specializovaném programu DGS, např. v programu GeoGebra (https://www.geogebra.org/). Předpokládáme, že si řešitelé model objeveného čtyřúhelníku *ABCD* také narýsují do sešitu. Při řešení částí 1, 2 a 4 žákům se sníženou představivostí pomůže doslova osahání reálného předmětu. K nalezení správné odpovědi třetího úkolu přispěje, když si žáci experimentálně sestrojují možné kružnice se středy ve dvou pevných bodech. Ve třídách se slabšími žáky je také vhodné doporučit rozdělení čtyřúhelníku na dva trojúhelníky, přičemž dále využijeme jen jeden.

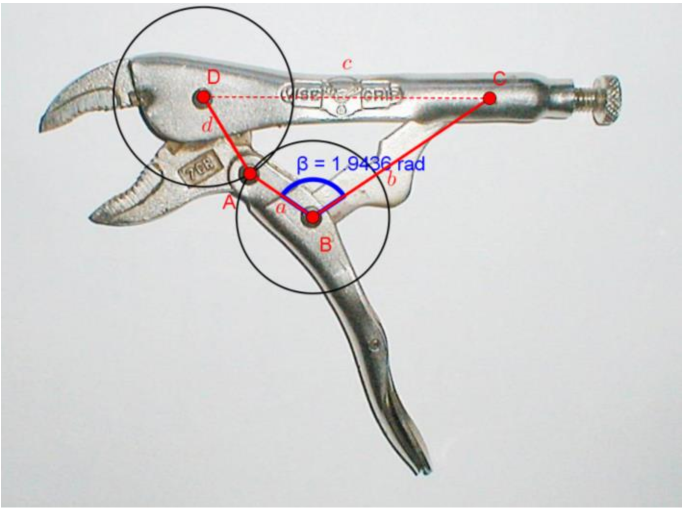
1. PRINCIP KLEŠTÍ

1.1. Úkoly pro žáky - 1. část:

1. Určete, po jaké křivce se pohybuje bod *B* (vzhledem k daným pevným bodům *C*, *D*).
2. Určete, po jaké křivce se pohybuje bod *A* (vzhledem k pevným bodům *C*, *D* a nově umístěného bodu *B*).
3. Zapište podmínku existence bodu *A*.
4. Který bod je tzv. hnacím bodem (bodem, který ovlivňuje rozložení a přenos silového působení, při změně své polohy způsobí změnu polohy čelistí)?
5. Pohyb tohoto bodu působí změnu úhlu, jehož je vrcholem, a v důsledku toho i změnu délky protější strany *AC*. Vyjádřete, jak závisí délka úsečky *AC* na velikosti úhlu při vrcholu *B* za předpokladu, že znáte délky pák (*a*, *b*, *c*, *d*).

Řešení:

1) Bod *B* se pohybuje po části oblouku náležícího kružnici se středem v bodě *C*.
2) Bod *A* se pohybuje po části oblouku náležícího kružnici se středem v bodě *D*. Jeho poloha je však omezena pevnou vzdáleností od *B*, proto musí být jedním z průsečíků dvou kružnic $k(D,d)$ a $l(B,a)$, obr. 3.



OBRÁZEK 3: Poloha bodu *A*, úhel β, zdroj: autorka

3) Za předpokladu, že uvažujeme pouze konvexní čtyřúhelník *ABCD*, pak z trojúhelníkové nerovnosti plyne $a + d > |BD|$.
4) Hnacím bodem, tj. bodem, na který působí naše síla při stisku kleští a který rozpohybuje bod *A* a spodní čelist, je bod *B*. V tomto bodě začíná rozložení a přenos silového působení.
5) Vycházíme z obecného trojúhelníka *ABC*. Užitím kosinové věty můžeme vyjádřit $|AC|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$, odtud $|AC| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta}$.

1.2. Úkoly pro žáky - 2. část:

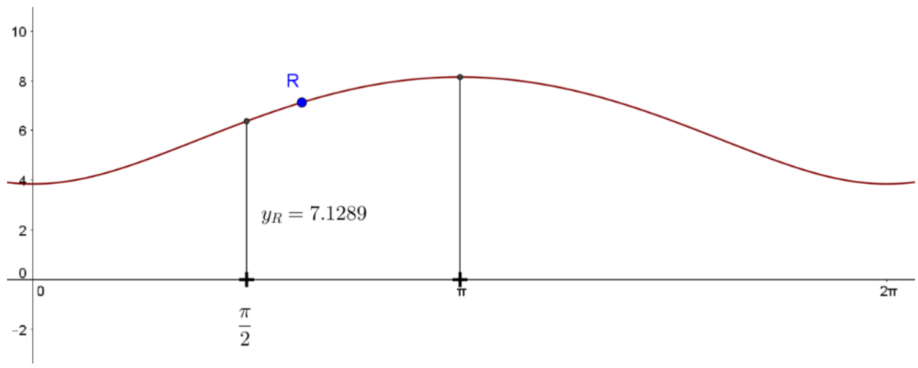
Se změnou úhlu β se mění délka $|AC|$a vzhledem k podmínce $|AC| > 0$ a monotonii kvadratické funkce v intervalu $(0, \infty)$, je zřejmé, že s rostoucí hodnotou výrazu pod odmocninou poroste délka úsečky $|AC|$. Otázkou však zůstává, jak rychle se mění délka $|AC|$se změnou úhlu β ?

1) Určete a zdůvodněte, pro jak velký úhel $\beta \in (0, \pi)$ bude velikost strany *AC* v trojúhelníku *ABC* největší.
2) Sestrojte v programu GeoGebra (https://www.geogebra.org/) graf funkce vyjadřující závislost délky $|AC|$na velikosti úhlu β (měřeno v radiánech, nezávislou proměnnou je třeba přeznačit na *x*). Pro volbu délek úseček *a*, *b* použijte posuvníky.

Řešení:

Zatímco první sérii úloh středoškoláci zvládnou obvykle sami, řešení druhé části častěji vyžaduje pomoc učitele, který je šikovně zvolenými a formulovanými otázkami ke správné odpovědi dovede. Úkol 2 pak řešíme se žáky jen tehdy, máme-li možnost pracovat v počítačové učebně a žáci disponují základními dovednostmi ovládání programu GeoGebra.

1) Víme, že $|AC| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta}$ a platí $a, b > 0$, $\beta \in (0, \pi)$. Součet $a^2 + b^2$ bude konstantní, stejně jako součin $2ab$. Vše podstatné je odvislé od hodnoty $-\cos\beta$. Pokud bude nulová, což platí pro $\beta = \frac{\pi}{2}$, pak trojúhelník *ABC* je pravoúhlý a strana *AC* je jeho přepona. Pro případ, že by $\beta < \frac{\pi}{2}$, zřejmě *AC* nebude nejdelší stranou v trojúhelníku *ABC*. Vysvětlení je jednoduché. Při $\beta < \frac{\pi}{2}$ nabývá výraz $-\cos\beta$ záporných hodnot, po dosazení do výrazu $a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$ dochází ke zmenšení hodnoty součtu $a^2 + b^2$ a tím také délky $|AC|$ porovnání s dříve uvažovanou přeponou. Jestliže naopak bude $\beta > \frac{\pi}{2}$, výraz $-\cos\beta > 0$, tím také $-2ab\cos\beta > 0$ a délka $|AC|$nabývá větších rozměrů. Závislost délky $|AC|$na velikosti úhlu β pro hodnoty $a = 2{,}15$ a $b = 6$ znázorňuje funkce na obrázku 4, jejíž graf byl vytvořen v programu GeogGebra.



OBRÁZEK 4: Graf závislosti $|AC|$ na velikosti β; zdroj: autorka

S vytvořeným obrázkem můžeme dynamicky pracovat dál. Sestrojíme bod R jako „bod na objektu“ a sledujeme změnu jeho y-ové souřadnice při pohybu bodu R s x-ovými souřadnicemi mezi hodnotami $\frac{\pi}{2}$ a π. Tímto způsobem modelujeme situaci pro zjištění odpovědi na otázku: Jak rychle se mění délka $|AC|$se změnou úhlu β? Je vhodné nastavit zaokrouhlování v programu aspoň na 4 desetinná místa, abychom dobře simulovali změnu nárůstu y-ové souřadnice. Výsledek dynamického modelování je zřejmý. Čím více se x-ová souřadnice bodu R blíží k hodnotě π, tím pomaleji se zvětšuje hodnota jeho y-ové souřadnice.

A jak to vše souvisí s původními kleštěmi? Čím větší je velikost úhlu β, tím delší je AC, ale s blížící se hodnotou velikosti úhlu β ke 180° se délka $|AC|$mění pomalu a v důsledku toho je dosaženo zisku velkého pákového převodu a stisku kleští. V okamžiku, kdy tiskneme kleště na maximum, $\beta = 180°$, trojúhelník ABC neexistuje a mezi čelistmi je dosaženo největšího upínacího tlaku.

Na závěr této části ještě poznámka, že podrobným studiem rychlostí změn se zabývají diferenciální a integrální počet, bez nichž se neobejdou především stavební inženýři, konstruktéři, elektrotechnici …, a mohou tak analyzovat např. namáhání ojnice spalovacího motoru, napětí v mostních obloucích, pohyb mraků při tvorbě předpovědi počasí, časový průběh proudu v elektrickém obvodu, …

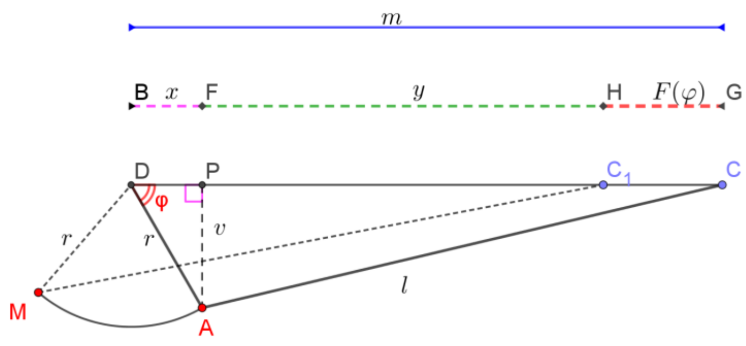
Se šikovnými žáky, např. v matematickém semináři je možné na tomto příkladu rozvíjet teorii diferenciálního počtu třeba s užitím počítače. Chceme dokázat, že pro $\beta = \pi$ nabývá funkce $f: y = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,\beta}$ svého (zřejmě lokálního) maxima. Pro práci s počítačem zavedeme značení $x = \beta$. Víme, že a, b jsou kladné konstanty. První derivaci funkce f určíme snadno. $f^{/}: y = \frac{ab\,sin\,x}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\,cos\,x}}$. Položíme-li ji rovnu nule, pak bodem podezřelým z extrému je $x = \pi$. K potvrzení nebo vyvrácení naší hypotézy využijeme další derivaci spočítanou pomocí volně dostupného specializovaného internetového programu *WolfgramAlpha* (https://www.wolframalpha.com/). Druhá derivace má tvar

$$\frac{ab\cos x}{\sqrt{a^2 - 2ab\cos x + b^2}} - \frac{a^2b^2\sin^2 x}{\sqrt{(a^2 - 2ab\cos x + b^2)^3}}$$

a pro $x = \pi$ nabývá hodnoty $-\frac{ab}{\sqrt{a^2+2ab+b^2}} = -\frac{ab}{(a+b)^2}$, která je $\forall a, b > 0$ záporná. Tím jsme potvrdili, že funkce f nabývá v bodě $x = \pi$ svého lokálního maxima.

2. ODVOZENÍ KINEMATICKÉ ROVNICE

Součástí samosvorných kleští je také upínací šroub, který ovlivňuje počáteční rozteč jejich čelistí. Na obrázku 5 je znázorněno kinematické schéma kleští. Polohu regulačního šroubu určuje délka $|HG|$, simulující pohyb šroubu mezi body C_1 a C, a je závislá na velikosti úhlu φ, $|HG| = F(\varphi)$. Při pohybu šroubu opisuje bod A dráhu po části kružnice se středem v bodě D a poloměrem r až k bodu M.

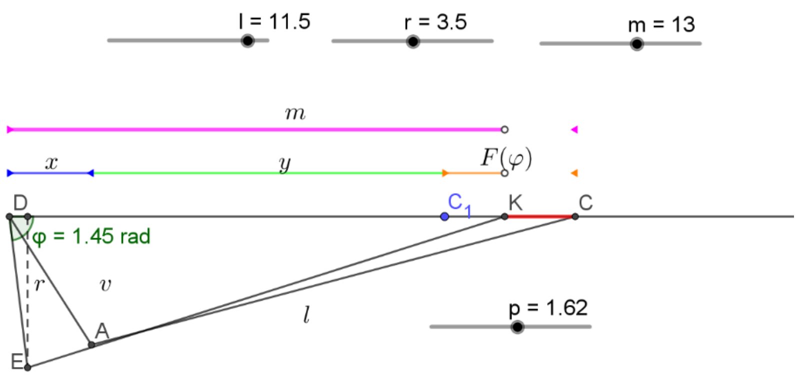


OBRÁZEK 5: Kinematické schéma; zdroj: autorka

Pro odvození kinematické rovnice je užitečné označit patu kolmice P z bodu A na úsečku CD. Označme dále $|AP| = v, |DP| = x, |PC_1| = y, m = x + y + F(\varphi)$. Pak v pravoúhlém trojúhelníku APD je $\frac{x}{r} = cos\varphi$, $\frac{v}{r} = sin\varphi$, odtud $x = rcos\varphi$, $v = rsin\varphi$. Podle Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku CPA platí $(y + F)^2 = l^2 - v^2$, po dosazení $(y + F)^2 = l^2 - r^2sin^2\varphi$ a pro kladné hodnoty $y + F = \sqrt{l^2 - r^2sin^2\varphi}$. Víme, že vzdálenost $m = x + y + F(\varphi)$, součet $y + F(\varphi)$ nahradíme odvozeným výrazem a dostaneme $m = rcos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2sin^2\varphi}$, dále platí $r + l = m + F$, proto $F = r + l - m$ a nakonec kinematická rovnice kleští má tvar

$$F(\varphi) = r + l - \left(rcos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2sin^2\varphi}\right).$$

Jako ukázku správnosti odvození rovnice můžeme použít dynamický počítačový model vytvořený v programu GeoGebra, ve kterém jsou posuvníky nastaveny pro reálné hodnoty vzdáleností (v centimetrech) *l*, *r*, a výchozí *m* použitých kleští (obr. 6).



OBRÁZEK 6: Počítačový model s reálnými rozměry; zdroj: autorka

Při pohybu vytvořeného modelu vyvstane další otázka, na níž najdeme odpověď opět s využitím znalostí středoškolské matematiky. Pohyb bodu E (na počátku byl ztotožněn s bodem A) je omezen. Hledejme tedy krajní meze, jakých může dosáhnout velikost úhlu φ pro reálné $l = 11{,}5\ \mathrm{cm}, r = 3{,}5\ \mathrm{cm}$. Řešení problému necháme na čtenáři samotném s nápovědou, že se o správnosti řešení může přesvědčit např. na počítačovém modelu.

ZÁVĚR

Cílem článku je inspirovat učitele, aby při výuce matematiky občas zařadili úlohy vycházející z reálné praxe a posílili tak představu žáků a studentů o významu, potřebě a užitečnosti matematiky. Často se v takových úlohách prolínají souvislosti z různých oblastí matematiky, což přispívá k opakování a upevňování získaných poznatků a schopností je aplikovat. Nacházíme zde také prostor pro matematické modelování a smysluplné využití informačních technologií. Tak například, pokud aspoň ukážeme dynamický model závislosti délky úsečky AC na velikosti úhlu při vrcholu B (viz úkoly pro žáky 2, č. 2), mohou sami zformulovat hypotézu o rychlosti změny. Stejně tak ve chvíli, kdy řešíme tento typ úlohy, není nutné, aby studenti ručně derivovali. Proč nevyužít vhodný počítačový program? Důležitější je, jak naložíme s výsledkem dál. A jestliže máme šikovné žáky a řešíme společně odvození kinematické rovnice kleští, můžeme jim zadat za domácí úkol vytvoření počítačového modelu např. v programu Microsoft Excel.

Motiv fungování samosvorných kleští, případně jiného mechanismu z technické praxe, je jistě i zajímavým námětem pro tandemovou výuku vedenou dvojicí učitelů matematiky a fyziky. Na mnoha školách už mají s touto formou výuky zkušenosti, často pozitivní.

Člověk používá mnoho důmyslných nástrojů a zařízení, na kterých lze ukázat aplikovanou matematiku. Spojení teorie a praxe je také dobrou cestou, jak zvýšit zájem žáků a studentů o technické obory. Dnes máme také příležitost využít ve výuce dynamické počítačové modely, jež napomáhají při představě o fungování nástroje a mohou žáky inspirovat k formulaci dalších zvídavých otázek.

LITERATURA

[1] KOLÁČ, Miroslav a Jiří MATAS. *Svět čísel, atomů a molekul*. Praha: Albatros, 1986. ISBN 13-794-86 14/68.

[2] *Kinematika klikového mechanismu* [online]. [cit. 2017-07-25]. Dostupné z: http://www.fsiforum.cz/upload/soubory/databaze-predmetu/6KM/Prednasky_6KM_2012.pdf.

GYMNÁZIUM DR. JOSEFA PEKAŘE, MLADÁ BOLESLAV, ČESKÁ REPUBLIKA
E-mail address: h.mahnelova@seznam.cz