UŽITÍ GEOGEBRA APPLETŮ PRO VÝUKU TĚLES

ŠÁRKA VORÁČOVÁ

ABSTRAKT. Příspěvek je zaměřený na možnosti využití GeoGebry pro výuku těles. Vytvořili jsme volně dostupný soubor interaktivních výukových materiálů pokrývající všechna tělesa, která jsou vyučována na základní a střední škole. Velká pozornost je věnována objemům a povrchům těles. Objemy těles patří dlouhodobě ke kritickým místům vyučování matematice, porozumění prostorových vztahů a vlastností je častokrát nahrazeno drilem a dosazováním do vzorců. Právě v této oblasti může software dynamické geometrie účinně pomoci pro zvýšení zaujetí žáků, provokování k vytváření hypotéz i jejich experimentálnímu ověřování. Možnost zkoumání dynamického rysu z různých úhlů pohledu přispívá k prohloubení poznávacího procesu žáků.

ÚVOD

Prostorová geometrie patří dlouhodobě ke kritickým místům matematického vzdělávání. Dle [9] se zde výrazně projevuje, že učitelé učí tak, jak byli sami učeni, jak tomu rozumí a jak úlohy sami řeší. Nedostatky ve vyučování geometrii souvisejí s nedostatky v geometrickém vzdělávání učitelů. Odrazem představ o axiomatické výstavbě geometrie je soustředění školní geometrie na rýsování a terminologii. Geometrie by však měla být od samého počátku orientována na poznávání prostoru, v němž žák žije, a na rozvíjení představivosti [6]. Představivost, a to nejen geometrická se obecně rozvíjí praxí. Vhodný výukový software v krátkém čase zprostředkuje žákům náhled řady geometrických situací a rozšiřuje tak evidované modely i zkušenosti.[11]. Průzkum [4] prokázal pozitivní vliv software dynamické geometrie na konstrukci prostorových objektů a při určování objemů a povrchů.

1. DYNAMICKÁ GEOMETRIE

Výukové webové stránky a programy dnes patří k učebním pomůckám stejně jako tištěné učebnice či sbírky úloh a je zcela jisté, že jejich význam pro učení a vyučování dále poroste. Využití počítačových programů ve školské matematice je možné dvojím způsobem. První spočívá v řešení standardně zadaných úloh použitím příkazů daného software. V danou chvíli žák ani nemusí znát postup či vzorec vedoucí k výsledku, software provede výpočet za něj; z pohledu žáka jde tedy o jakousi černou skříňku. Druhý způsob spočívá v podpoře aktivní práce žáka, povzbuzení k vytváření a ověřování hypotéz a experimentování, jež vede k hlubšímu pochopení souvislostí [8].

Pozitivní vliv dynamických geometrických programů dokládá řada kvantitativních i kvalitativních výzkumů. Žáci dosahují výrazně lepších výsledků ve standardizovaném testu na porozumění geometrickým pojmům a geometrickou představivost. Žáci využívající dynamickou geometrii prokazují hlubší a trvalejší zapamatování získaných poznatků (cit. podle [11]).

Received by the editors 10.02.2020.
2010 *Mathematics Subject Classification.* 97G40.
Key words and phrases. GeoGebra, Dynamická geometrie, Konstruktivní vyučování, Tělesa.

Posledních deset let je celosvětově nejpoužívanějším programem školské matematiky GeoGebra. Instalace i online verze jsou zcela zdarma, nenáročná na hardware a tím i přístupné ve všech školních počítačových učebnách. Zadávání objektů je didakticky promyšlené a nástroje pokrývají školské kurikulum od základní školy až po základy calculu.

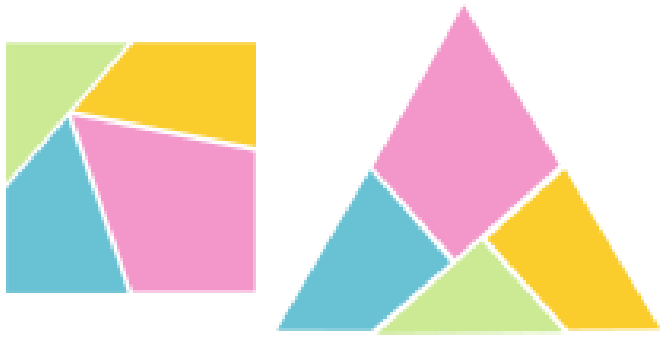
Prostředí GeoGebry integruje více edukačních prostředí a další možnosti jsou dále vyvíjeny. Velký potenciál pro výuku stereometrie skýtá prostředí AR (rozšířená realita), kdy se zobrazovaný objekt zobrazí na dotykových zařízení vnořený do fotografovaného prostředí. Dle studie reklamní společnosti Leo Burnett jsou poznatky zprostředkované augmentovanou realitou provázeny větším emočním zážitkem a tím jsou zapamatovatelnější. Lze očekávat podobný dopad i ve výukovém procesu.

Na serveru geogebra.org je přes milion appletů sdílených uživateli. Bohužel, vyhledávání dokumentů k danému tématu je nepřehledné, kvalita a matematická správnost nejsou nijak garantovány, hodnocení je ponecháno udílením "like". I přes tyto nevýhody patří server Geogebry k účinným pomocníkům pro přípravu hodin matematiky na základní střední i vysoké škole.

Proto jsme i my zvolili tuto platformu pro uložení a volného sdílení našeho souboru interaktivních materiálů „Slovník těles" [15]. Naší snahou bylo využít možnosti dynamického software, nahradit pasivní pozorování interaktivními prvky a postupně přidávat úkoly pro samostatné konstrukce žáků. Součástí výukového materiálu jsou interaktivní applety pro zobrazení těles, dokreslování sítí těles v prostředí GeoGebra a řešení testových otázek.

2. OBJEMY TĚLES

Teorie míry je na základní škole představena nejprve výpočtem obsahu rovinných obrazců. Už od první třídy je třeba věnovat této problematice velkou pozornost. Čas, který věnujeme objevování jednotky se nám bohatě vrátí ve vyšších ročnících. Nejprve s dětmi intuitivně porovnáváme velikosti obrazců, poté vymyslíme pravidlo pro rozhodování. Výborně se v této fázi osvědčily nejrůznější skládanky a tangramy. Díky Wallace–Bolyai–Gerwienově větě víme, že můžeme vhodným rozložením přeskládat jakékoliv rovinné obrazce stejného obsahu.



OBRÁZEK 1: Čtverec a trojúhelník lze rozdělit na shodné části; zdroj: Wikipedia

Porozumí-li žáci jednotce obsahu, můžeme začít počítat obsahy obdélníků, popř. odvodit vzorce. Pro trojúhelníky a rovnoběžníky postupujeme podobně. Nejprve dokreslujeme do čtvercové sítě a pomocí skládaček odvodíme vztah pro výpočet obsahu.

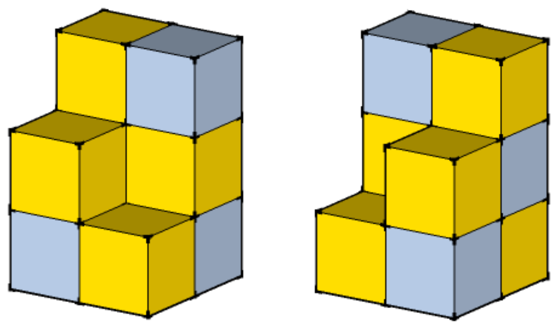
Analogický přístup by bylo vhodné aplikovat na objemy těles. Ovšem je jasné, že v prostoru je situace o poznání složitější. Naše snahy a rozklad tělesa analogický rovinnému rozkladu nebude v obecném případě možný, protože Wallace–Balyai–Gerwienova věta platí jen v rovině.

Problém rozkladu těles stejných objemů na shodné části patří mezi 23 takzvaných Hilbertových problémů, jež předložil David Hilbert v roce 1900 ve své přednášce na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži. Tyto problémy představovaly největší tehdy nevyřešené matematické problémy. Hilbertův žák Max Dehn ještě téhož roku ukázal, že existují dva trojboké jehlany se shodnou podstavou a výškou, jež nelze rozřezat na konečný počet vzájemně shodných čtyřstěnů.

2.1. Objem krychle a kvádru

Analogie úloh nad čtverečkovaným papírem je užitečná pro zavedení krychlové jednotky a pro výpočet objemu krychle a kvádru. Myšlenkovým rozkladům by měly předcházet manipulace se skutečnými kostičkami, mezistupněm může být rozšířená realita nebo jen 3D reprezentace interaktivních appletů.

Webovské stránky Objem krychle a Objem kvádru GeoGebra knihy *Slovník těles* [15] obsahují interaktivní applety s testovými otázkami pro stavby z kostiček a určení objemu.



OBRÁZEK 2: Kolik kostiček musíte přemístit, aby byly stavby stejné.

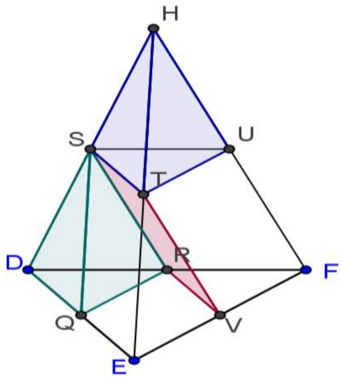
2.2. Objem jehlanu

Odvodit s žáky objevitelským způsobem vzorec pro objem jehlanu je komplikovanější. Ve školské praxi se často spokojíme s vyslovením vzorce bez důkazu, v lepším případě s odvoláním na Cavalieriho princip. Důvěřivější studenty by mohl přesvědčit rozklad krychle na tři shodné čtyřboké jehlany. Podstavy jehlanů jsou sousední stěny krychle, výškou je vždy hrana na podstavu kolmá. (viz Objem jehlanu, [15]). Ovšem u kvádru je to o něco složitější. Rozklad kvádru netvoří tři shodné jehlany, jsou to jen jehlany stejného objemu. Jak ale dokázat, že dva jehlany se shodnými základnami a výškami mají stejný objem?

Vyřešení tohoto problému patří mezi významné výsledky antické geometrie. Dle Archiméda (287–212) přísluší přiřknout prvenství ve formulaci poučky Démokritovi [14].

Dle Démokrita z Abdér (460-370) se vše, co se nachází v reálném světě, skládá z malých, lidským okem neviditelných a dále již nedělitelných atomů. Jeho odvození vzorce pro jehlan muselo být velmi podobné přístupu, jenž v 17. století popsal Bonaventura Cavalieri (1598–1647). Metoda porovnávání nekonečně tenkých vrstev těles mělo velký vliv na jeho současníky i matematiky pozdějšího období. Leibniz (1646–1716) napsal, že Galilei a Cavalieri byli první, kdo začali odhalovat drahocenné metody a postupy Archiméda.

Eukleides (asi 325–260) ve 12. knize Základů dokazuje rovnost objemů jehlanů o stejných podstavách a výškám Eudoxovou exhaustační metodou. Tedy rovněž úvahami, jež daly vzniknout infinitesimálnímu počtu.



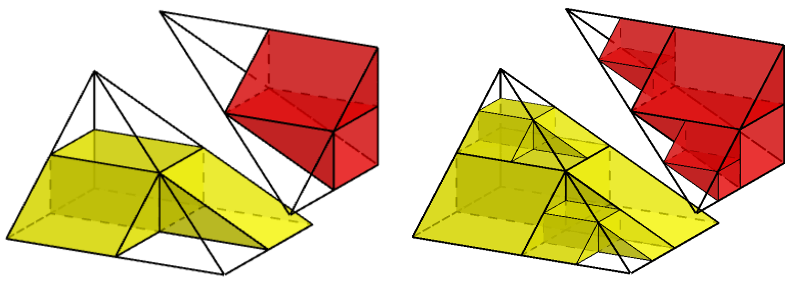
OBRÁZEK 3: Eudoxův rozklad jehlanu

O Eudoxovi z Knidu (408–355) je známo, že se stal členem Platonovy Akademie. Platon (427–347) byl nesmiřitelným odpůrcem Démokrita a zřejmě od něj vzešel podnět vyloučit z důkazů všechny úvahy o atomech. Tak v žádné větě Eukleidových Základů nenajdeme úvahy, jež by nám připomínali Cavalieriho princip, objem jehlanu je dokazován pomocí Eudoxova rozkladu – Obr. 3.

Je důležité seznámit již na střední škole žáky s úvahami o nekonečně malých objektech, při správném vedení mohou být někteří uchváceni stejným způsobem jako současníci Newtona a Leibnize. Je dobré začít názornými problémy rovinných objektů. Eudoxovův rozklad čtyřstěnu se stěží dá označit jako názorný. Je těžké narážet na infinitezimální úvahy a nemoci se spolehnout na geometrický názor. Ve školské matematice se užívá Cavalieriho princip (viz Cavalieriho princip, [15]).

Další možností je názorný čínský důkaz, jenž je popsán v knize *Devět kapitol matematického umění*. Tato kniha pochází z přibližně stejné doby jako Eukleidovy Základy a v čínské matematice hraje i podobnou úlohu. Téměř každý čínský matematik do 20. století se na tuto knihu odkazoval [3].

Významný čínský matematik Liu Huie (20–280) popisuje rozklad trojbokého hranolu na čtyřboký (žlutý) jehlan a trojboký(červený) jehlan – viz. Obr. 4. Postupným doplňováním hranolů ukážeme, že objem žlutého jehlanu je dvakrát větší než objem červeného jehlanu. Odtud objem jehlanu je třetinou objemu hranolu se shodnou podstavou a výškou. Animace důkazu je zpracována v materiálu Volume of Pyramid na serveru geogebra.org.



OBRÁZEK 4: Čínský důkaz objemu jehlanu; zdroj: geogebra.org

ZÁVĚR

Při osvojování matematických vědomostí s podporou moderních technologií záleží více na způsobu jejich integrace než typu použitých prostředků. Hlavním faktorem, který ovlivňuje využívání technologií ve školské matematice, se stává učitel, zejména jeho didaktické dovednosti a ICT kompetence [8].

Nespornou výhodou integrace počítače do výuky je diferenciace výuky a možnost žáků řešit úlohy svým tempem. Velký rozdíl mezi studenty je ve asi největším problémem při organizaci výuky. Je třeba mít připraveny příklady pro nadané děti, ale na druhé straně jsou i žáci, kteří nepřijmou intuitivní ovládání GeoGebry a živelné experimentování s nástroji. Doporučujeme připravit si pro takové žáky vytištěný návod nebo applet s krokovanou konstrukcí, příp. instruktážní video. Úloha učitele jako koordinátora práce dětí je nezastupitelná, práce na počítači nemůže být zcela samostatná, důležitá je zpětná reflexe a diskuse o nalezených vlastnostech a řešeních úloh. Učitel musí žáky usměrňovat a podněcovat jejich do jisté míry samostatné objevování a zkoumání daných geometrických vlastností a problémů.

Podle našeho názoru má GeoGebra potenciál pokrýt témata celé školské matematiky. Doufáme, že se podaří spojit úsilí všech nadšenců tohoto software a vytvořit jeden prostor soustředící všechny kvalitní výukové materiály, jež mohou být učitelům podporou při tvořivé integraci GeoGebry do výuky matematiky.

LITERATURA

[1] M. Gunzel a kol.: Integrace elektronického prostředí pro počítačem podporovanou výuku matematiky, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2012.

[2] M. Hejný, F. Kuřina: Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha: Portál, 2009. 232 s.

[3] J. Hudeček: Matematika v devíti kapitolách. Sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a dalších z doby Tang. Překlad, vysvětlivky a úvod. Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2008. pp. 5–23

[4] K. Chino at al.: The effects of Spatial Geometry Currirulum with 3D DGS in Lower Secondary School Mathematics, *Proceedings PME* , Vol 31, part2, 2007. 137–144

[5] F. Kuřina: Geometrická představivost a vyučování stereometrii. *Matematika a fyzika ve škole*. 1987/1989, roč. 18, s. 201–212.

[6] F. Kuřina: Kritické jevy naší školské matematiky, *Matematika – fyzika – informatika*, Vol. 24, s. 241–251. Praha, 2015

[7] R. Plch: Využití systémů počítačové algebry ve výuce matematiky, *Univ. S. Boh. Dept. Of Mathematics Report Series*. 2005, Vol. 13, s.145–159.

[8] P. Pech: Klasické nebo počítačové metody při řešení úloh v geometrii? *Univ. S. Boh. Dept. Of Mathematics Report Series*. 2005, Vol. 13, s.127–134.

[9] M. Rendl, N. Vondrová a kol.: *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2013.

[10] J. Robová: Webové aplikace ve vyučování matematiky. In Lengyelfalusy, T.; Horváth, P. (ed.). 5. žilinská didaktická konferenci s medzinárodnou účasťou. Žilina, 2008. s. 47–55.

[11] J. Robová: Integrace informačních a komunikačních technologií jako prostředek aktivního přístupu žáků k matematice. PeDF Univerzity Karlovy v Praze. Praha, 2012

[12] P. Sak: Člověk a vzdělání v informační společnosti: vzdělávání a život v komputerizo-vaném světě. Praha: Portál, 2007.

[13] J. Vaníček: Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie. PedF UK, Praha, 2009.

[14] P. Vopěnka, Nová infinitní matematika: III. Reálná čísla a jejich diskretizace, Karolinum, Praha, 2016.

[15] Š. Voráčová, S. Hronová: *Slovník těles*, GeoGebra kniha, soubor interaktivních materiálů, online https://www.geogebra.org/m/wfxx7zsx

ÚSTAV APLIKOVANÉ MATEMATIKY, FAKULTA DOPRAVNÍ ČVUT V PRAZE, ČESKÁ REPUBLIKA
E-mail address: voracova@fd.cvut.cz