South Bohemia Mathematical Letters
Volume 29, (2021), No. 1, 13–19.

ŘEŠENÍ ÚLOH VE ČTVERCOVÉ A TROJÚHELNÍKOVÉ MŘÍŽI POHLEDEM GEOGEBRA CLASSROOM

JANA CACHOVÁ, LUKÁŠ VÍZEK

ABSTRAKT. Příspěvek přináší pohled na šetření se dvěma odlišnými skupinami respondentů, se studentkami učitelství pro 1. stupeň základní školy a s žáky 5. ročníku základní školy. Oběma skupinám byla předložena stejná sada úloh na geodeskách zaměřená na tvorbu kolmic. Byla zadána a vyhodnocena pomocí aplikace GeoGebra Classroom, která představuje všechna řešení z pohledu jednotlivých úloh a z pohledu jednotlivých respondentů. Ukazujeme na funkcionalitu programu GeoGebra a tudíž na další možnost užití počítačů v matematickém vzdělávání.

ÚVOD

Matematické vzdělávání je podněcováno prostředími, která umožňují specifickým způsobem studovat vybrané úlohy. Umožňují studentům a vyučujícím vstupovat do ohraničeného světa, do vymezeného „herního prostoru“ charakterizovaného omezenými možnostmi pohybu nebo omezenými nástroji. Jeho limitace paradoxně netvoří překážky. Naopak, pomáhají uživatelům zorientovat se v dané oblasti a inspirují k nacházení řešení problémů a k porozumění jejich podstatě. Jedním z podněcujících prostředí pro výuku geometrie jsou geodesky (také geoboardy). Jedná se o dřevěné nebo plastové destičky s hřebíky či kolíky v pravidelných rozestupech, pravděpodobně nejčastěji užívané mají kolíky umístěné ve vrcholech čtvercové mříže.

V tomto příspěvku ukazujeme řešení úloh na geodeskách žáků pátého ročníku základní školy a studentek vysoké školy oboru učitelství pro první stupeň základní školy. Společně se čtvercovými mřížemi pracujeme také s trojúhelníkovou mříží. Problémy zadáváme v elektronickém prostředí aplikace GeoGebra Classroom, ukazujeme tedy možnosti využití počítačů pro geometrické vzdělávání, čímž chceme čtenáře inspirovat.

1. GEODESKY

Geodesky vytvářejí plochu pro studium polohových úloh rovinné geometrie, pro modelování geometrických útvarů a objevování jejich vlastností, pro řešení metrických úloh, určování obvodů a obsahů objektů, nebo pro ilustrace platností vybraných tvrzení, práci se souřadnicemi a propedeutiku středoškolské analytické geometrie. Všechny problémy řešené na geodeskách spojuje soustředění se či omezení se pouze na vrcholy dané mříže; geometrické útvary jsou na fyzických geodeskách modelovány gumičkami nataženými přes kolíky, není možné je sestrojit volně. Tato limitace, jak výše naznačujeme, je klíčová, a to v dobrém slova smyslu. Není překážkou, vyznačuje „herní prostor“ a umožňuje zorientovat se. Tvoří strukturu pro rovinnou eukleidovskou geometrii a inspiruje studenty k vidění, hledání a argumentování v této disciplíně (Pei et al., 2018).

Received by the editors: 17.02.2022.
2020 *Mathematics Subject Classification.* 97C70, 97D70, 97E50, 97G40, 97U50.
Key words and phrases: Kolmice, geodesky, čtvercová mříž, trojúhelníková mříž, GeoGebra Classroom.

Užití geodesek ve výuce matematiky bylo popsáno pracemi Caleba Gattegna (1911–1988), významné osobnosti matematického vzdělávání 20. století známé svými viditelnými a hmatatelnými přístupy k výuce (Gattegno, 1971). Z psychologického hlediska je toto pojetí zarámováno tzv. enaktivismem, koncepcí říkající, že lidské poznání znamená performanci neboli „poznání je dělání“ a také opačně, tvoření ukazuje vědění, tedy „dělání je poznání“ (Maturana & Varela, 1987). Práce na geodesce totiž vyžaduje fyzickou manipulaci, vizualizuje geometrické představy a vede k hmatatelným tvarům.

2. ŘEŠENÉ ÚLOHY

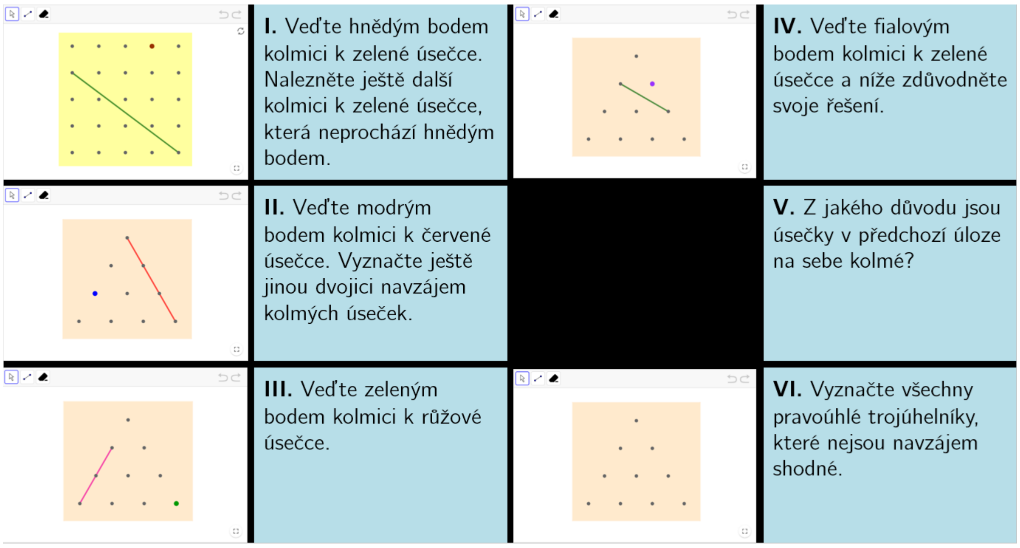
V souladu s nastíněnou podstatou prostředí geodesek jsme se soustředili na úlohy vyžadující tvorbu kolmých úseček jednak ve čtvercové mříži, jednak v trojúhelníkové mříži. Zaměřujeme se tedy na zcela elementární geometrický objekt – pravý úhel, který zasazujeme do ohraničeného prostoru desky a zároveň do méně běžné, i když rovněž elementární situace. Poznamenejme totiž, že geodesky s kolíky v trojúhelníkovém sponu jsou na trhu minimálně zastoupené. Ovlivněni také naší osobní zkušeností považujeme práci v trojúhelníkové mříži za nestandardní, přestože je založena na vlastnostech vedle sebe položených rovnostranných trojúhelníků.

2.1. Zadání

Našimi úlohami jsme studovali, jaké úsečky ve čtvercové a trojúhelníkové mříži řešitelé považují za kolmé a jakým způsobem kolmost zdůvodňují. Na doplnění jsme také zjišťovali, jaké pravoúhlé trojúhelníky konstruují. Zadali jsme proto tyto úlohy:

1. Veďte hnědým bodem kolmici k zelené úsečce. Nalezněte ještě další kolmici k zelené úsečce, která neprochází hnědým bodem.
2. Veďte modrým bodem kolmici k červené úsečce. Vyznačte ještě jinou dvojici navzájem kolmých úseček.
3. Veďte zeleným bodem kolmici k růžové úsečce.
4. Veďte fialovým bodem kolmici k zelené úsečce a níže zdůvodněte svoje řešení.
5. Z jakého důvodu jsou úsečky v předchozí úloze na sebe kolmé?
6. Vyznačte všechny pravoúhlé trojúhelníky, které nejsou navzájem shodné.

Pro každou úlohu byl vytvořen applet v internetové aplikaci dynamické geometrie GeoGebra, který společně se zadáním přehledně ukazujeme na obrázku 1. První problém byl řešen ve čtvercové mříži, druhý, třetí, čtvrtý a šestý v trojúhelníkové. Páté zadání představovalo otevřenou otázku navazující na čtvrtý problém.

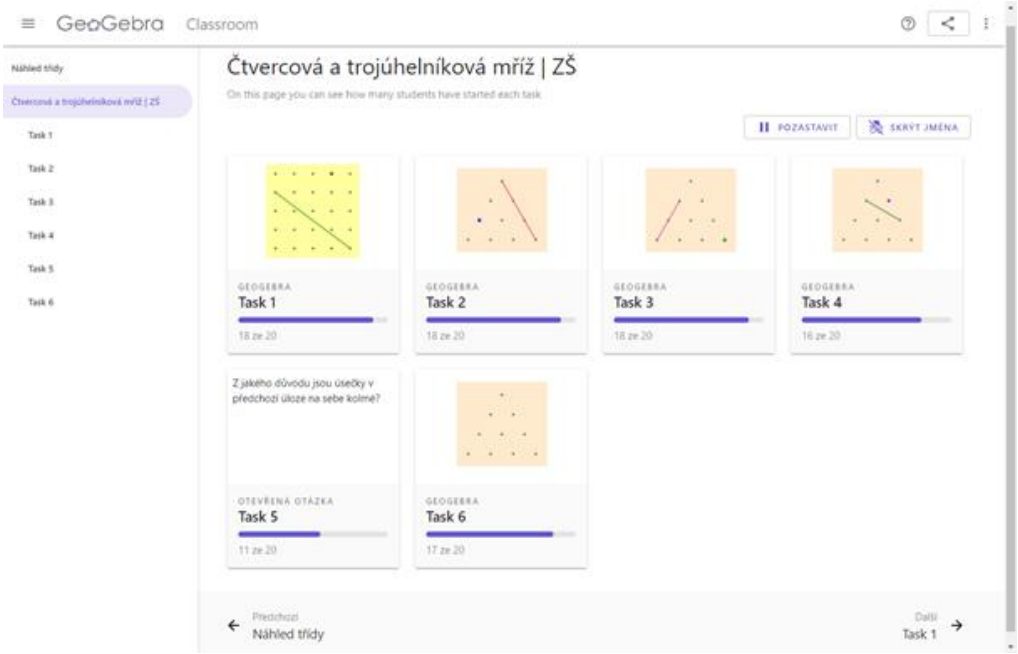


OBRÁZEK 1. Applety a zadání úloh; zdroj: vlastní tvorba v aplikaci GeoGebra

2.2 Řešitelé

Všechny vytvořené úlohy byly součástí jediné tzv. Aktivity prostředí GeoGebra, ze které byly zhotoveny tzv. GeoGebra Classroom. Kód pro vstup do učebny byl předán řešitelům, jimiž bylo 56 studentek učitelství pro první stupeň základní školy (vysoká škola, ČR) a 16 žaček a žáků pátého ročníku (základní škola, region Hradce Králové). Na obrázku 2 je představena GeoGebra Classroom pro skupinu žáků ze základní školy, na níž je patrná podoba zmíněných appletů.

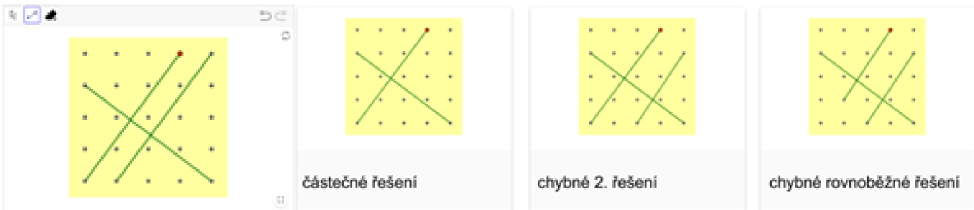
Pro záznam řešení bylo použito webové rozhraní GeoGebry z několika důvodů. Naše šetření bylo realizováno na jaře roku 2021, kdy nebyla kvůli zdravotní krizi spojené s onemocněním Covid-19 umožněna prezenční výuka na školách a nebylo realizovatelné tvořit na fyzických geodeskách. Program GeoGebra jsme zvolili proto, že se se jedná o volně dostupný software s velmi intuitivním ovládáním. Volbou GeoGebry, dynamického softwaru, také navazujeme na řadu výzkumných studií ukazujících význam současných technologií pro vzdělávání v geometrii (Battista, 2002). Doplňme, že GeoGebra vytvořená Markusem Hohenwarterem (2002) je neustále obohacována o nové funkce. V dnešní době představuje aplikace pro práci v rovinné i prostorové geometrii, analytické geometrii, algebře, statistice nebo matematické analýze, a to na různých stupních školy. GeoGebra Classroom je jednou z nejnovějších součástí prostředí (GeoGebra, 2021), umožňuje detailně pozorovat výstupy studentů.



OBRÁZEK 2. GeoGebra Classroom pro žáky základní školy; zdroj: vlastní tvorba v aplikaci GeoGebra

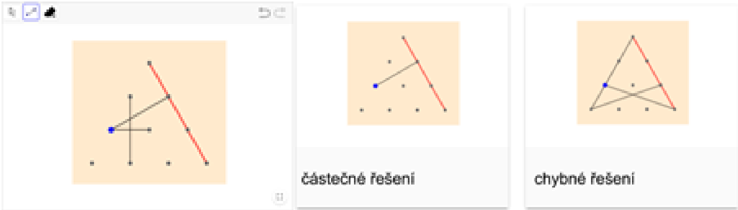
3. VÝSLEDKY

U první úlohy jsme získaná řešení respondentů, studentek učitelství pro 1. stupeň ZŠ a žáků 5. ročníku ZŠ, roztřídili do třech kategorií, sice na správná řešení, částečná řešení a na chybná řešení. Správné řešení bylo v tomto případě pouze jediné možné (viz na obrázku 3 zcela vlevo). U částečného řešení řešitelé splnili pouze první část úlohy, vedli kolmici k zeleně vyznačené úsečce hnědým bodem, ale už nehledali další kolmici, která tímto bodem neprochází. Chybná řešení se vyskytovala dvě, v prvním případě jím bylo chybné určení další kolmice, neprocházející hnědým bodem, ve druhém chybné určení první z kolmic a následně k tomu na základě dodržení rovnoběžnosti chybné určení druhé kolmice (ukázky všech typů řešení rovněž na obrázku 3).



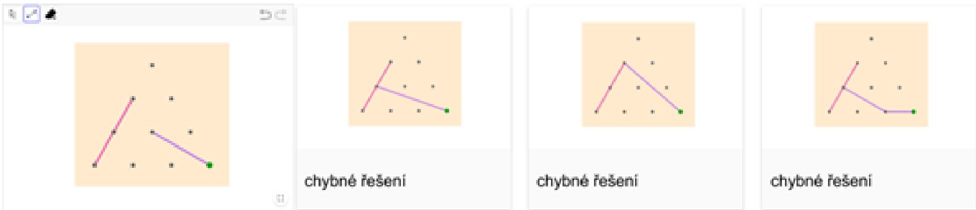
OBRÁZEK 3. Řešení první úlohy; zdroj: vlastní tvorba v aplikaci GeoGebra, výsledky řešitelů

U druhé úlohy, která se již týkala trojúhelníkové mříže, jsme opět získaná řešení jednotlivých respondentů roztřídili na správná, částečná a chybná. Správné řešení této úlohy, na rozdíl od úlohy předchozí, dávalo řešitelům více možností vyznačení jiné dvojice navzájem kolmých úseček, a tím i větší prostor pro kreativitu. Částečným řešením opět rozumíme správně vedenou kolmici modrým bodem k červené úsečce, ale bez vyznačení další dvojice navzájem kolmých úseček. Chybná řešení v sobě zahrnují nedodržení kolmosti. (Viz přehled všech typů řešení druhé úlohy na obrázku 4.)



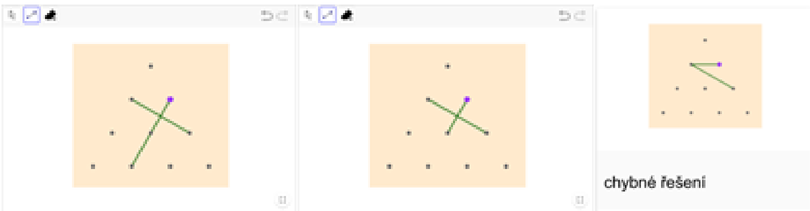
OBRÁZEK 4. Řešení druhé úlohy; zdroj: vlastní tvorba v aplikaci GeoGebra, výsledky řešitelů

V pořadí třetí úloha byla pro některé řešitele obtížná z důvodu absence průsečíku růžově vyznačené úsečky a hledané kolmice. Někteří respondenti nejspíš proto úlohu neřešili. Na obrázku 5 je ukázka správného řešení (zcela vlevo) a tři ilustrace chybného řešení (všechna se důsledně snaží při řešení opírat o průsečík růžové úsečky s „kolmicí“).



OBRÁZEK 5. Řešení třetí úlohy; zdroj: vlastní tvorba v aplikaci GeoGebra, výsledky řešitelů

Čtvrtá úloha dávala žákům i studentům prostor pro výběr ze dvou správných řešení, která se od sebe liší délkou vyznačené kolmice. Chybné řešení se vyskytlo jen ojediněle a je možné u něj vysledovat fixaci průsečíku na mřížový bod. (Obě varianty správného řešení i ukázka řešení chybného jsou předvedeny na obrázku 6.)



OBRÁZEK 6. Řešení čtvrté úlohy; zdroj: vlastní tvorba v aplikaci GeoGebra, výsledky řešitelů

Jak už bylo řečeno výše, v pořadí pátá úloha se lišila od předchozích úloh tím, že vycházela z řešení čtvrté úlohy a byla úlohou argumentační. Odpovědi řešitelů jsme třídili podle hlediska, zda obsahují zdůvodnění nebo jeho náznak, či jen znovu opakují tvrzení, že úsečky předchozí úlohy jsou na sebe kolmé, nebo je odpověď na tuto úlohu zcela vynechána. Zdůvodnění se většinou opírala o vlastnosti obrazce, jehož vrcholy určují krajní body navzájem kolmých úseček, například:

„Po propojení všech stran nám vznikne deltoid, který se skládá ze čtyř pravoúhlých trojúhelníků.“

„Krajní body tvoří kosočtverec, úsečky jsou jeho úhlopříčky, které svírají pravý úhel.“

„Vzdálenost mezi dvěma body v této síti je vždy stejná, takže z krajních bodů těchto úseček můžeme sestavit kosočtverec a tyto úsečky se poté stanou jeho úhlopříčkami. Úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé.“

„Protože to jsou úhlopříčky v kosočtverci.“

Náznak zdůvodnění ilustruje další ukázka:

„Obě úsečky spojí strany trojúhelníku, a proto jsou na sebe kolmé, svírají pravý úhel.“

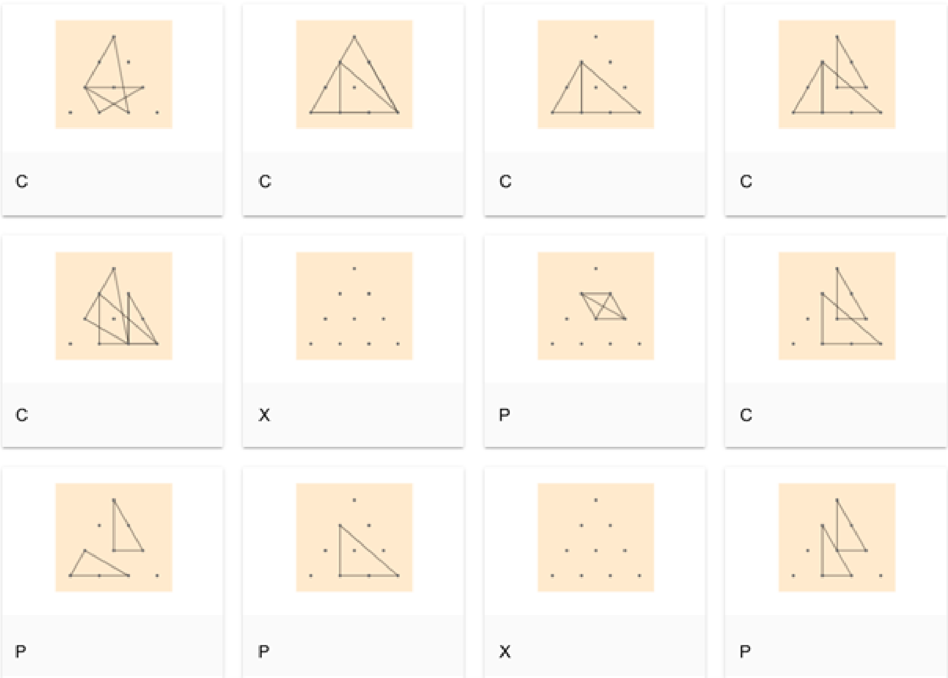
Pouhé opakování tvrzení je většinou založeno na pravém úhlu, který obě úsečky svírají:

„Protože mají 90 stupňů.“

„Svírají pravý úhel.“

„Protože svírají úhel 90º.“

Poslední, tedy šestá úloha v pořadí, přinesla nejrozmanitější výsledky, i ty je však možné roztřídit do čtyř kategorií. Mezi správná řešení (v ukázce na obrázku 7 označená jako C) jsme zahrnuli všechna řešení, která obsahovala od každého ze dvou typů pravoúhlých trojúhelníků s vrcholy v mřížových bodech, které je možné v prostředí této trojúhelníkové mříže nalézt, aspoň jednu reprezentaci. Částečná řešení (na obrázku 7 označená jako P) pak obsahují aspoň jednu reprezentaci pouze od jednoho z obou typů pravoúhlých trojúhelníků nebo pravoúhlé trojúhelníky, kde některý z vrcholů není mřížový bod. Našla se i řešení chybná, která zobrazovala pouze zdánlivě pravoúhlý trojúhelník, ve skutečnosti ale trojúhelník pravoúhlý nebyl. Někteří respondenti úlohu neřešili (na obrázku 7 označeno jako X).



OBRÁZEK 7. Řešení šesté úlohy; zdroj: výsledky řešitelů v aplikaci GeoGebra

ZÁVĚR

Ačkoli ne všechna řešení jednotlivých úloh respondenty byla správná, potěšitelné je, že většina řešitelů (jak žáků 5. ročníku základní školy, tak studentek učitelství pro 1. stupeň základní školy) vyřešila první čtyři úlohy správně. Za podnětné považujeme odhalit příčiny chybných řešení první úlohy, kde se pracuje v prostředí čtvercové mříže, tedy v prostředí, se kterým měli respondenti větší předchozí zkušenosti. Otázkou ale je, zda je možné na úrovni základní školy zdůvodnit kolmost úseček v této úloze. Za příčinu chybného řešení druhé a třetí úlohy lze považovat určitou fixaci na krajní body zadané úsečky a na hledání společného průsečíku kolmých úseček. Čtvrtou úlohu vyřešila správně významná většina zapojených řešitelů, na druhou stranu ale zdůvodnit geometrickou podstatu řešení v následující páté argumentační úloze dokázal jen zlomek z nich. Dalším podnětem může být otázka, zda může řešení šesté úlohy o trojúhelnících souviset se správností předchozího řešení druhé a třetí úlohy.

Předložené náměty úloh nabízíme jako inspiraci pro učitele, zároveň je ale chceme naším příspěvkem inspirovat i k práci v prostředí GeoGebra Classroom, které nám dobře posloužilo jako šikovný nástroj pro sledování práce skupiny respondentů jako celku, pro srovnávací pohled na řešení jednotlivých úloh různými řešiteli, ale také jako nástroj, který dokáže „pod lupou“ sledovat i vývoj práce jednotlivých žáků napříč všemi úlohami.

LITERATURA

[1] Battista, M. T. (2002). Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. *Teaching Children Mathematics*, 8(6), pp. 333-339.

[2] Gattegno, C. (1971), *Geoboard geometry*. New York: Education Solution Worldwide.

[3] GeoGebra (2021). GeoGebra. Citováno v listopadu 2021 z https://www.geogebra.org.

[4] Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra − ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene* [Master thesis]. Universität Salzburg.

[5] Maturana, H., & Varela, F. (1987). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding*. Boston: Shambala.

[6] Pei, C. et al. (2018). Cultivating Computational Thinking Practices and Mathematical Habits of Mind in Lattice Land. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(1), 75–89.

KATEDRA MATEMATIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY HRADEC KRÁLOVÉ
HRADEC KRÁLOVÉ, ČESKÁ REPUBLIKA
E-mail addresses: jana.cachova@uhk.cz; lukas.vizek@uhk.cz