

## VYUŽITÍ GEOGEBRY PŘI DISTANČNÍ VÝUCE MATEMATIKY NA ZŠ A SŠ

JITKA NOVÁKOVÁ

**ABSTRAKT.** GeoGebra je vhodný nástroj pro distanční výuku. Podporuje názornost výkladu učitele při online výuce, pomáhá žákům při samostudiu. Umožňuje ověřování znalostí žáků ústní i písemnou formou. Nahrazuje při výuce geometrie distančním způsobem v plném rozsahu klasické rýsování na tabuli. Velké možnosti nabízí i při zařazení badatelsky orientovaného vyučování. Díky své vícejazyčnosti se uplatní i při CLIL výuce.

### ÚVOD

Distanční výuka klade zvýšené nároky na počítačovou gramotnost učitelů i žáků. První přechod základních i středních škol na distanční výuku na jaře roku 2020 zastihl učitele i žáky nepřipravené na tento odlišný způsob výuky. Hledaly se cesty, jak výuku efektivně provádět při online i off-line výuce. Následovalo masivní zapojení počítačů do výuky. Učitelé matematiky museli mimo jiné zvládnout psaní matematického textu, naučit se rýsovat ve vhodném programu a umět sestavit grafy funkcí. Tento příspěvek se bude věnovat možnostem, které GeoGebra nabízí pro úspěšnou realizaci distanční výuky. Uvedeny budou příklady pro základní i střední školy, které mohou posloužit jako inspirace pro případnou další distanční výuku. Její trvalé zařazení do systému českého školství je s ohledem na opakované návraty epidemie Covid velmi pravděpodobné.

### 1. RÝSOVÁNÍ PŘI ONLINE VÝUCE

Potřeba hovořit o problémech distanční výuky vedla při druhé vlně uzavírání škol pro prezenční výuku k neformálním setkáním učitelů matematiky základních škol. Tato setkání pomáhaly organizovat například Místní akční skupiny v Jižních Čechách. Učitelé na nich často uváděli, že mají problémy s online výukou geometrie. Rýsování na tabuli přenášené kamerou se příliš neosvědčilo. Ani posílání hotových obrázků, ve kterých žáci nevidí pořadí jednotlivých kroků, nepřispívá k pochopení probíraného učiva. GeoGebra tyto problémy může odstranit. Učitel rýsuje s užitím jednotlivých nástrojů GeoGebry na svém počítači a pomocí sdílené obrazovky zobrazuje každý krok konstrukce žákům. Ti rýsují do sešitu. Pokud učitel cíleně komentuje, který nástroj použil, žáci se mimoděk učí s GeoGebrou pracovat. Během dvou vyučovacích hodin pochopí většina žáků strukturu GeoGebry a sami ji začnou využívat. Tím se zdokonalují v geometrii, protože musí používat přesnou terminologii a chápat postup konstrukce. Na ovládnutí základních nástrojů rýsování v online verzi GeoGebry 6, potřebných pro konstrukce na úrovni základní i střední školy, stačí žákům většinou jedna vyučovací hodina, při které pracují na svých zařízeních. Nebo již výše zmíněné dvě až tři hodiny, kdy žáci sice rýsují do svých sešitů, ale zároveň vnímají způsob, jakým vyučující s GeoGebrou pracuje.

---

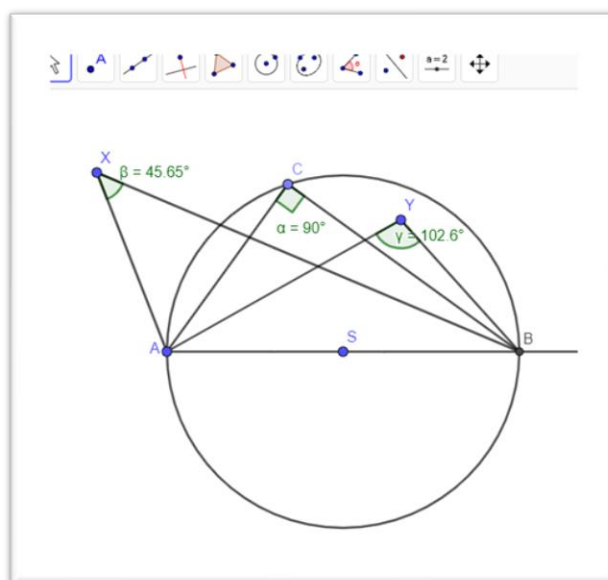
*Received by the editors:* 20.02.2022.

*2020 Mathematics Subject Classification:* 51M04, 51M20, 68U05.

*Key words and phrases:* GeoGebra, distance learning, drawing, function, constructional tasks.

### 1.1. Objevení Thaletovy kružnice

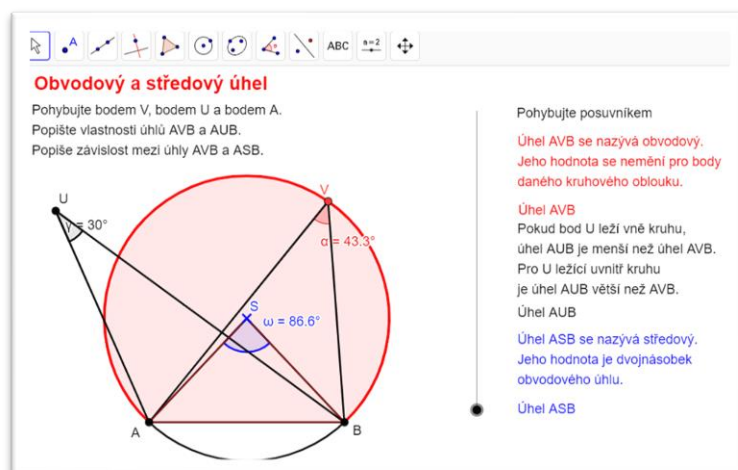
Pro objevení Thaletovy kružnice je vhodné užití badatelsky orientovaného vyučování. Učitel pracuje v GeoGebře, žáci rýsují do sešitu. Sestrojí bod, který označí S (nový bod). Narýsují kružnici se středem S a libovolným poloměrem (kružnice daná středem a bodem). Sestrojí polopřímku bodem A na kružnici a středem kružnice (polopřímka). Její průsečík s kružnicí (průsečík) vytvoří bod B, druhý bod průměru kružnice. Na kružnici zvolí libovolný další bod C (bod na objektu), různý od bodů A, B. Tento bod spojí s body A a B úsečkami (úsečka). Učitel vyzve žáky, aby ve svých sešitech změřili úhel s vrcholem v bodě C a rameny CA a CB a poloměr kružnice. Tyto hodnoty žáci postupně uvádějí. Sami přijdou na to, že úhel je vždy  $90^\circ$  bez ohledu na velikost poloměru a polohu bodu C. Učitel jejich zjištění potvrdí změřením úhlu (úhel), pohybem bodu C po kružnici, a nakonec i změnou poloměru kružnice pohybem bodu A. Žáci v sešitě sestrojí několik dalších bodů na kružnici a ověří úhlem kolmost úseček AC a CB. Učitel i žáci následně zvolí dva další body X a Y tak, aby jeden ležel vně kružnice a druhý uvnitř. Opět změří úhly AXB a AYB. Učitel body pohybuje, aby si žáci uvědomili a naformulovali skutečnost, že u bodu ležícího vně kružnice je úhel menší než  $90^\circ$  a u bodu z vnitřní oblasti kružnice větší. Sestrojení obrázku v GeoGebře mohou dostat žáci za dobrovolný úkol pro domácí přípravu. Zkušenost potvrzuje, že Geogebra je do té míry intuitivní, že úkol zvládnou žáci 8. ročníku bez obtíží. (Obrázek 1)



OBRÁZEK 1. Thaletova kružnice

### 1.2. Středový a obvodový úhel

Obdobnou úlohou je na střední škole objevení obvodového a středového úhlu, příslušného k danému oblouku. I v tomto případě rýsuje učitel v GeoGebře a žáci do sešitu. Sestrojí kružnici libovolného poloměru, na ní tětivu AB. Na oblouku nad tětivou, ve kterém leží střed kružnice, zvolí tři různé body  $V_1, V_2, V_3$  a změří úhly AVB. Společně naformulují zjištění, že úhel pro všechny body V oblouku s krajními body AB je stejný. Mění se však hodnota úhlu v závislosti na délce tětivy. Učitel toto demonstruje pohybem bodu V po oblouku a následně změnou délky tětivy. Dalším krokem je nalezení vztahu mezi středovým a obvodovým úhlem. Učitel zobrazí úhel ASB. Změnou délky tětivy vytváří různé velikosti středového úhlu a tím i obvodového. Žáci by měli objevit, že středový úhel je dvojnásobek obvodového úhlu. Ověří si změřením a porovnáním těchto úhlů v sešitě. Na závěr může využít učitel již předem připravený obrázek *Středový a obvodový úhel* se shrnutím objevených vztahů. (Obrázek 2)



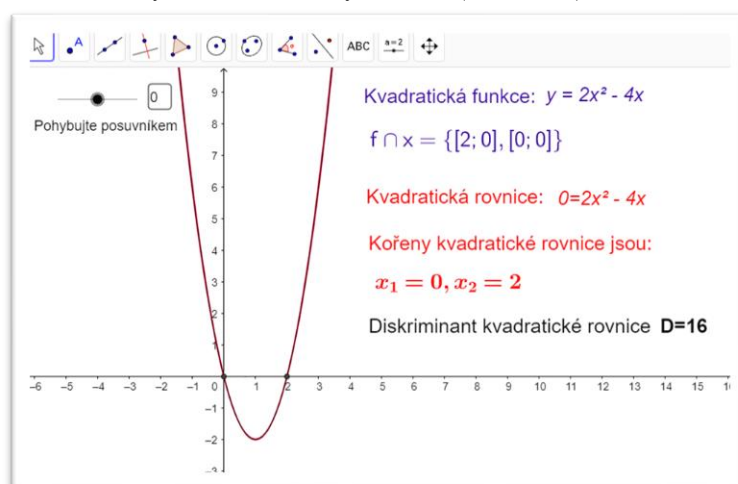
OBRÁZEK 2. Obvodový a středový úhel

## 2. PODPORA VÝKLADU UČITELE

Podpořit výklad názorným obrázkem je důležité nejenom v době distanční výuky. Příprava takových obrázků často zabere učiteli dost času, na druhou stranu může kvalitně vytvořené obrázky využít opakovaně v dalších letech. Při jejich tvorbě se často využívá dynamiky GeoGebry vkládáním posuvníků.

### 2.1. Počet kořenů kvadratické rovnice

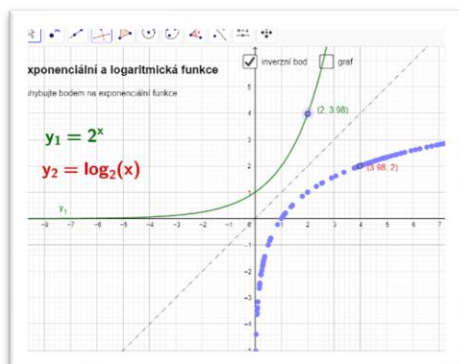
Jedna z možností zavedení jednotlivých typů rovnic je přes průsečíky grafu funkce s osou x. Následující obrázek *kvadratická rovnice* ukazuje počet řešení kvadratické rovnice v souvislosti s umístěním grafu příslušné kvadratické funkce v souřadnicovém systému. Zároveň ukazuje spojitost počtu řešení s hodnotou diskriminantu v porovnání s nulou. Je vhodnou motivační úlohou pro řešení kvadratické rovnice pomocí vzorce pro kořeny. Obrázek také usnadní žákům pochopit, že u kvadratické rovnice, na rozdíl od lineární, nenastane případ nekonečně mnoha řešení. Odkaz na obrázek může učitel žákům zaslat předem, aby mohli sami pohybovat posuvníkem, sledovat změny a vyslovit závěry svého pozorování. Tedy opět vhodné zařazení badatelsky orientovaného vyučování. (Obrázek 3)



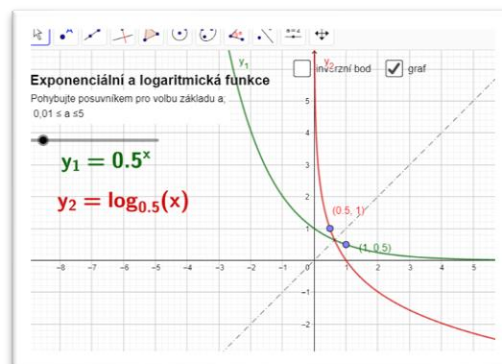
OBRÁZEK 3. Grafické řešení kvadratické rovnice

## 2.2. Odvození grafu logaritmické funkce

Logaritmická funkce se zavádí jako funkce inverzní k exponenciální funkci. Postup je vidět na obrázku *graf exp. a log. funkce*. Při zaškrtnutém políčku inverzní bod pohybuje učitel bodem na exponenciální funkci a pomocí stopy inverzního bodu získá graf logaritmické funkce. Při volbě políčka graf volí pomocí posuvníku různé základy funkcí. Je názorně vidět vliv základu na průběh exponenciální a zároveň logaritmické funkce i osová souměrnost jejich grafů. (Obrázek 4 a 5)



OBRÁZEK 4. Odvození grafu log. funkce



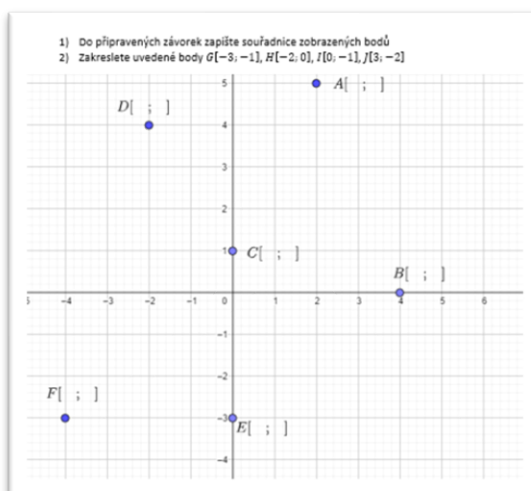
OBRÁZEK 5. Graf exp. a log. funkce

## 3. OVĚŘOVÁNÍ ZNALOSTÍ ŽÁKŮ

Jedna z nejnáročnějších částí distanční výuky je ověřování znalostí žáků. I tady má své místo GeoGebra, kterou učitel využije pro tvorbu obrázků. Ty pak vkládá do wordovských souborů. Snadno tak získá několik různých variant jedné úlohy. Žáci sice tuto snahu příliš neocení, ale trochu jim tím učitel zneprjemní tolik oblíbené opisování. Pokud již žáci zvládli základy práce v GeoGebře, může být zadání i vypracování součástí jednoho GeoGebra souboru, který si žáci otevřou ze zaslání odkazu. Přes sdílenou obrazovku může se souborem pracovat učitel, nebo své snažení prezentují jednotliví žáci.

### 3.1. Souřadnice bodu

Pro zvládnutí učiva o funkcích musí žák bezpečně ovládat souřadnice bodu. To může učitel



OBRÁZEK 6. Souřadnice bodu

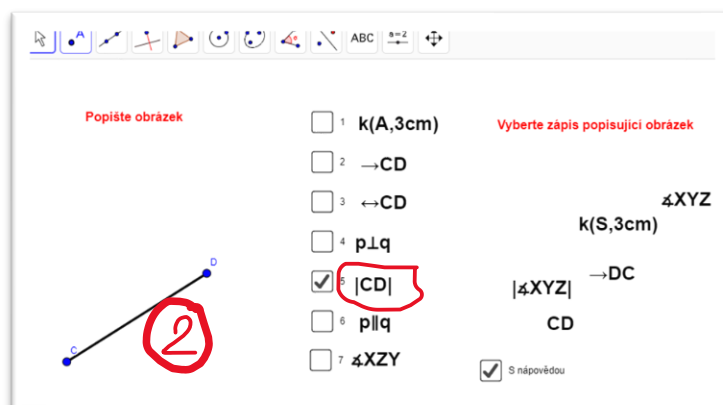
ověřit, když zvolí v nárysně zobrazení os a mřížky. Pak stačí umístit jeden zobrazený bod do různých mřížových bodů a žák určuje jeho souřadnice. Naopak žák může pracovat na svém počítači a podle zadávaných souřadnic zobrazovat bod. Pro písemné ověření může sloužit následující obrázek, vložený do souboru s pokyny k úkolu. (Obrázek 6)

### 3.2. Komplexní čísla

Podobným způsobem se dá procvičovat i zobrazení komplexního čísla v algebraickém tvaru v Gaussově rovině komplexních čísel. *Algebraický tvar komplexního čísla*. Obrázek může být použit k výkladu při zobrazeném zápisu nebo k procvičení při skrytém zobrazení.

### 3.3. Zápis konstrukce

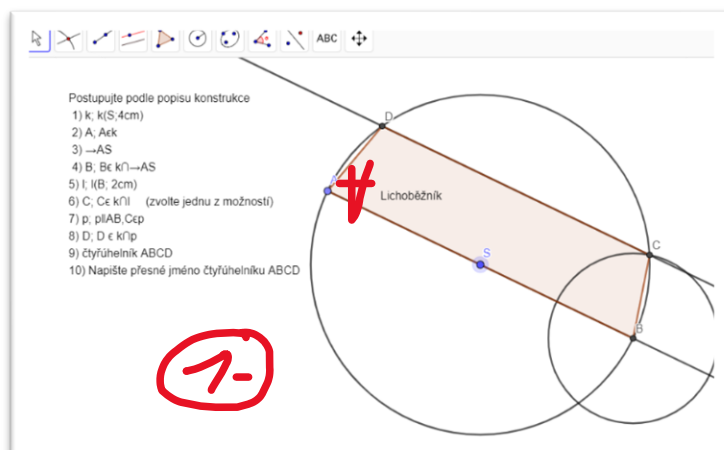
Další ukázka je z oblasti geometrie a slouží k nácviku matematického zápisu konstrukce. Vyučující zašle žákům tento odkaz: *Matematický zápis*. Žák si zobrazuje jednotlivé obrázky a vždy k nim přetáhne příslušný popis. Hotovou úlohu nafotí a zašle zpět učiteli. (Obrázek 7)



OBRÁZEK 7. Opravený test

### 3.4. Konstrukce podle zápisu

Předpokladem pro tuto formu ověření znalostí je základní zkušenost žáků s prací v GeoGebře. Učitel zašle žákům tento odkaz: *Konstrukce podle zápisu*. Žáci si úlohu otevrou a rýsují přímo



OBRÁZEK 8. Vypracovaný a opravený test

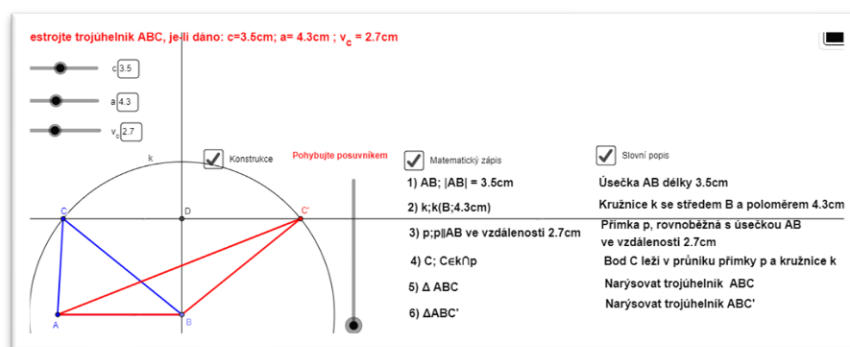
v souboru. Hotový obrázek formou výstřihu odešlou učitelé (například do Bakalářů, Teams, mailu). Výhodou je, že umístění středu kružnice a bodu A je náhodné, pokud by žák pouze obrázek okopíroval od spolužáka, bylo by to patrné na první pohled. Tento test zvládli úspěšně všichni žáci osmé třídy za necelých pět minut (až na nesprávné nebo neúplné pojmenování lichoběžníku). (Obrázek 8)

#### 4. PODPORA DOMÁCÍ PŘÍPRAVY ŽÁKŮ

Každý učitel matematiky se jistě setkal u nesplněného úkolu s výmluvou, že žák zadané učivo v učebnici nepochopil. I tady může GeoGebra pomáhat. Pohyblivý obrázek je jistě názornější než vytisknutý v učebnici. Velké uplatnění GeoGebry je v učivu o grafech a vlastnostech funkcí, nebo kapitolách o shodných a podobných zobrazeních.

##### 4.1. Konstrukční úloha

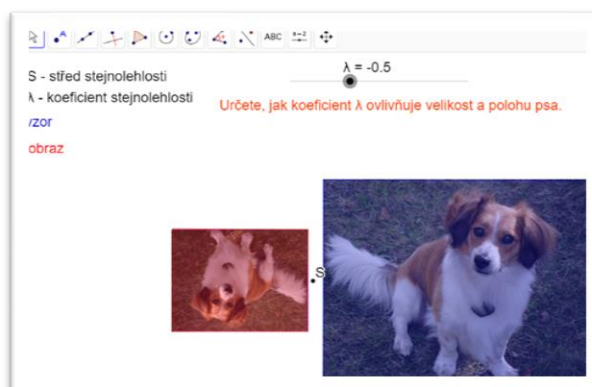
Konstrukční úlohy patří k učivu, které dělá potíže většině žáků jak na základní, tak na střední škole. Následující *Konstrukční úloha* jim může alespoň v jednom konkrétním případě konstrukci objasnit krok za krokem. Postup konstrukce je krokovaně pomocí posuvníku. V obrázku se současně zobrazují jednotlivé kroky konstrukce, jejich slovní i matematický popis. Pomocí posuvníků žáci mohou vytvářet různá zadání a diskutovat o počtu řešení s ohledem na hodnoty určujících prvků trojúhelníku. (Obrázek 9)



OBRÁZEK 9. Konstrukční úloha

##### 4.2. Stejnolehlost

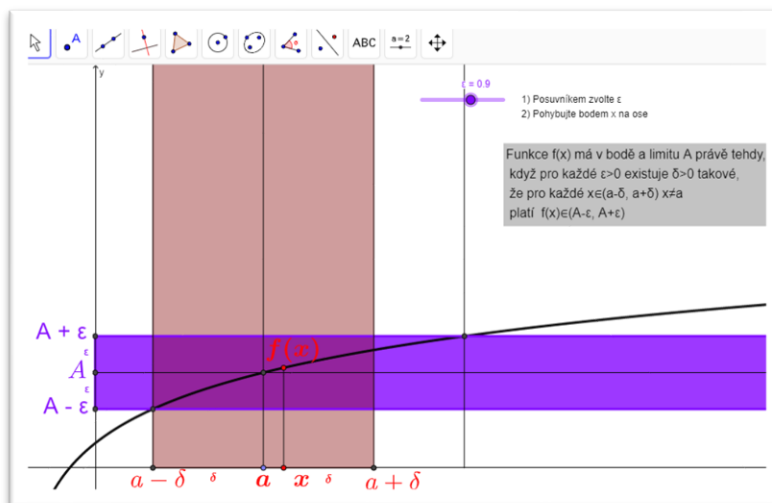
Matematika nemusí být vždy vážná a důstojná. Pochopit vliv koeficientu  $\lambda$  na velikost a umístění obrazu při stejnolehlosti pomůže třeba i pes, jak ukazuje následující obrázek *Stejnolehlost – samostudium*. (Obrázek 10)



OBRÁZEK 10. Stejnolehlý pes

### 4.3. Definice limity

Na závěr se hodí něco sofistikovanějšího než pes hlavou dolů. Definice limity funkce v daném bodě jistě nepatří k učivu, které by žák pochopil na první pohled. Pokud si ale může definici znázornit a k tomu ještě pohyblivě, má větší naději na úspěch. *Definice limity funkce.* Posuvníkem umožní volbu velikost  $\varepsilon$  okolí limity. Automaticky se upravuje  $\delta$  okolí bodu. Pak už stačí pohybovat bodem  $x$  na ose a sledovat jeho funkční hodnotu  $f(x)$ . (Obrázek 11)



OBRÁZEK 11. Definice limity funkce

### ZÁVĚR

GeoGebra je nepostradatelný pomocník při výuce matematiky. Pokud je učitel zvyklý GeoGebrou zařazovat do prezenční výuky, má pak mnohem méně potíží při výuce distanční. Také pro žáky je výhoda, když v GeoGebře pracovali ještě před zavedením distanční výuky. I v opačném případě jsou schopni rychle GeoGebrou zvládnout a sami ji využívat při studiu. Distanční výuka bude jistě aktuální i nadále, proto je třeba hledat stále nové možnosti, jak učit co nejefektivněji i za takto ztížených podmínek. A jednou z těchto možností je právě GeoGebra.

### LITERATURA

- [1] *Rámcové vzdělávací programy pro gymnázia (RVP G\*)* [online]. Praha, 2021, září 2021. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/>
- [2] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV)*. [online]. Praha, 2017, březen 2017. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacii-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>
- [3] Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Sepekov, 2018, 3. 9. 2018 [cit. 2021-12-05]. Dostupné z: <http://www.zssepekov.cz/dokumenty/svp.pdf>

GYMNÁZIUM PIERRA DE COUBERTINA, NÁMĚSTÍ FRANTIŠKA KŘÍŽÍKA 860, TÁBOR, ČESKÁ REPUBLIKA  
E-mail address: jnovakova@gymta.cz