

## J. J. SYLVESTER A JEDNA JEHO ÚLOHA

JAROSLAV HORA

ABSTRAKT. Článek popisuje životní a profesní cestu J. J. Sylvestera a přináší jednu jeho úlohu, která je dostupná i dnešním středoškolským studentům.

### ÚVOD

James Joseph Sylvester byl významný matematik z éry viktoriánské Anglie. Pozoruhodné jsou nejen jeho životní peripetie, ale hlavně jeho přínos k rozvoji algebry včetně dnes klasických částí lineární algebry.

#### 1. ŽIVOTNÍ OSUDY J. J. SYLVESTERA – NEŠŤASTNÝ ZAČÁTEK KARIÉRY – VIRTUÁLNÍ VRAH

J. Sylvester navštěvoval dvě základní školy v Londýně, jeho středoškolská studia proběhla na Royal Institution v Liverpoolu a r. 1833 se stal studentem na St. John's College v Cambridge. Závěrečné zkoušky složil jako druhý před Georgem Greenem (4.) a Duncanem Gregorym (5.).

Tehdy se ještě vyžadovalo, aby student složil církevní přísahu (v anglikánské církvi) předtím, než byl graduován. Sylvester byl ale Žid a odmítl přísahat, takže graduován být nemohl. Z tohoto důvodu nebyl přijatelný ani pro Smithovu cenu ani pro Fellowship. Z náboženských důvodů pak Sylvesterovi nezbývalo mnoho míst, kde by mohl učit, proto přijal místo vyučujícího fyziky na University of London (jeho kolegou se stal jeho dřívější učitel Augustus De Morgan).

Ve věku 27 let konečně získal místo profesionálního matematika. Byl pozván do USA na University of Virginia. Do Charlottesville přijel v závěru listopadu 1841 a s entuziasmem se pustil do výuky, která byla rozsáhlá. První ročník měl studovat aritmetiku a algebru podle Lacroixovy učebnice; druhý ročník pak pokračoval Legendreovou Geometrií, tj. studenti měli zvládnout trigonometrii a projektivní geometrii a základy diferenciálního počtu. Poslední ročník měl pokračovat v diferenciálním a integrálním počtu. Navíc by pokročilí studenti, „kteří to budou považovat za užitečné“, mohli studovat Poissonovu Mechaniku a Laplaceovu Nebeskou mechaniku. Nabídku University of Virginia tehdy nepředčili nikde v Americe.

Sylvester byl zároveň prvním židovským profesorem v USA. Brzy se o něm kriticky vyjádřil místní časopis, kterému vadila nejen odlišnost náboženství, ale též (správně) předpokládal, že Sylvester jakožto Angličan bude pravděpodobně silně proti otrokářství.

Samotný Sylvester byl prudké a vášnivé povahy, byl nejen velice nadaný, ale i egocentrický a hašteřivý. Brzy došlo k osudné události, kterou ovšem vyvolal jeden z jeho studentů. Ten již na jedné z předchozích Sylvesterových přednášek četl noviny či jakousi knihu, odpovídal a choval se arogantně. Pak prý došlo k incidentu, který byl o řadu let později popsán reverendem R. L. Dabneym následovně (viz [3], [6]): „*V Sylvesterově třídě byla dvojice bratrů, hloupých a mimořádně okázalých v chování. Když Sylvester mladšího z nich upozornil na chyby, učiněné při přednesu, se tomuto individuu zdálo, že je dotčena jeho čest a čest rodiny, a vyzval prof. Sylvestera, aby se ihned omluvil, jinak že bude tělesně ztrestán.*

---

Received by the editors: 02.02.2023

2020 Mathematics Subject Classification: 01A55, 11A07, 97E99.

Key words and phrases: J. J. Sylvester, modulární aritmetika, vytvořující funkce, Mathematica.

*Sylvester uchopil hůl, kterou nosil, když byl napaden bratry, přičemž mladší byl ozbrojen těžkou holí. (Sylvesterova zbraň je v anglickém textu popisována jako „sword – cane“, zřejmě tedy šlo o hůl, kterou bylo v nebezpečí možno použít jako kord). Blízký přítel Dr. Dabneyho byl přítomen momentu střetnutí. Mladší bratr se postavil před prof. Sylvestera a vyžadoval okamžitou a pokornou omluvu. Téměř ihned se na něj obořil, srazil mu klobouk, a pak svou těžkou holí zasadil zničující ránu na Sylvesterovu hlavu.*

*Sylvester vytáhl svou zbraň a zaútočil přímo na agresora, přičemž ho zasáhl právě nad srdcem. Student se zoufalým zavytím padl do rukou svého bratra a vykřikl: „Jsem zabit! On mě zabil!“ Sylvester byl puzen pryč z tohoto místa, a aniž čekal na sbalení svých knih, odjel do New Yorku a nastoupil na loď do Anglie.*

*Zatím byl ke studentovi povolán lékař. Student byl smrtelně bledý, ve studeném potu, v kolapsu, jak se zdálo, umírající, šeptající své poslední modlitby. Lékař mu roztrhl vestu, rozřízl košili a ihned mu sdělil, že není ani trochu zraněn. Ostrý hrot Sylvesterovy zbraně narazil na žebro a dále neprorazil.*

*Když se ujistil, že zranění není o mnoho větší než po bodnutí moskyta, umírající muž vstal, upravil si košili, zapnul vestu a odkráčel, ačkoliv se ještě stále třásl od nervového šoku.“*

Následné rozborů historiků matematiky ukázaly v tomto dlouho tradovaném příběhu jisté korekce. Skutečnost byla mnohem méně dramatická. Někteří studenti byli nedisciplinovaní a jeden z nich, který si četl noviny či nějakou knihu, hrubě reagoval na Sylvesterovo napomenutí.

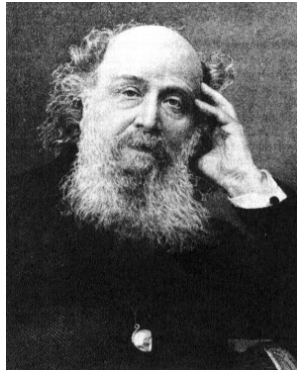
To pak vedlo k projednávání záležitosti Ballard vs. Sylvester před radou univerzity. Když ta nedospěla k Sylvesterem očekávanému závěru o potrestání studenta, podal samotný Sylvester rezignaci a skončil zde své učitelské působení po asi třech měsících. Poté žil u bratra v New Yorku a posléze se vrátil do Anglie. Stal se aktuárem a sekretářem u Equity and Law Assurance Company v Londýně. V období 1845–1855 se připravoval na kariéru obhájce.

## 2. JSOU I LEPŠÍ ŽÁCI!

Dával také hodiny matematiky. Mezi jeho žáky byla samotná Florence Naghtigalová, dívka z bohaté šlechtické rodiny, zakladatelka moderní ošetrovatelské péče, jejíž fascinující životní příběh je popsán např. na [https://cs.wikipedia.org/wiki/Florence\\_Nightingalová](https://cs.wikipedia.org/wiki/Florence_Nightingalová).

Šťastnou shodou náhod byl v téže době v Lincoln's Inn obhájcem a právníkem Arthur Cayley (1821–1895). Během společných procházek se spřátelili, ačkoliv se velice lišili temperamentem, a Sylvester se k matematice vrátil. Byl to právě on, kdo jako první použil termín „matrix“, matice, a to v r. 1851. Sylvester chápal matici jako „obdélníkové uspořádání termů“, Cayley pak v r. 1858 publikoval důležitou práci *Memoir on the theory of matrices* [2] a v ní již lze nalézt definice základních operací s maticemi. V r. 1851 objevil Sylvester diskriminant kubické rovnice a byl to on, kdo užil jména „diskriminant“ pro odpovídající výrazy pro kvadratickou rovnici, resp. pro rovnice vyšších stupňů. Spolu s Cayleym také vytvořili teorii algebraických forem.

Sylvester se snažil znovu získat místo profesionálního matematika a nakonec se vskutku stal profesorem matematiky na Royal Military Academy ve Woolwichi (jeho žádost byla nejprve zamítnuta, ale úspěšnější uchazeč za několik měsíců zemřel). Sylvester se rovněž stal v pořadí druhým prezidentem Londýnské matematické společnosti (prvním byl De Morgan).



OBRÁZEK 1. James Joseph Sylvester (1814–1897)  
(Zdroj: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk>)

Jako člen vojenské akademie odešel Sylvester do důchodu v 55 letech. V r. 1870 vydal svou první knihu, byla to však poezie: *The Laws of the Verse (Zákony verše)* [4]. (Na tuto sbírku byl zřejmě dosti hrdý, protože se někdy podepisoval J. J. Sylvester, autor Zákonů verše). Po tři roky zanechal matematických výzkumů, pak však navštívil Čebyšev Londýn a po jeho přednášce se Sylvester k matematice vrátil. A vrátil se i na univerzitu v USA: r. 1876 se stal profesorem na Johns Hopkins University v Baltimore. V r. 1878 založil časopis *American Journal of Mathematics* [1], který velmi přispěl k rozvoji vědecké práce v matematice v USA.

Samotný Sylvester napsal stovky článků. Jeho ohnivost a prudkost je patrná i na nich – jsou plné poznámek pod čarou, dodatků, doplňků, oprav a vylepšení důkazů, takže bylo velmi obtížné jeho díla tisknout. Sylvester měl ve zvyku přednášet o svých výzkumech a na jeho přednáškách bylo možné sledovat vznik těchto článků – studenti ale ve své většině preferují přehledné uspořádání látky a chtějí úspěšně složit zkoušky. Sylvesterovou jedinou matematickou knihou je *Treatise on Elliptic Functions* (1876).

Mezitím byl r. 1871 zrušen Universities Test Act, který zamezoval přístupu neanglikánských profesorů na řadu kateder. Tak se stalo, že po smrti Smithe v r. 1883 byl Sylvester, ačkoli byl již 68 let starý, povolán na slavnou saviliánskou katedru geometrie v Oxfordu, založenou sirem Henry Savilem již roku 1619. V r. 1892 pak Oxford jmenoval zastupujícího profesora a Sylvester, tou dobou již částečně slepý a trpící ztrátou paměti, odešel do Londýna, kde prožil své poslední roky.

### 3. JEDNA SLAVNÁ ÚLOHA

Mám velký počet známek v hodnotách 5 a 17 pencí. Jaká je největší hodnota, kterou nemohu vytvořit kombinací těchto dvou hodnot? (63 pencí).

Pokusme se nejprve problém vyřešit elementárními prostředky.

- Nepoužijeme-li žádnou známku v hodnotě 17 pencí, dokážeme zaplatit všechny násobky pěti, tj. hodnoty 5, 10, 15, .... Nacházíme se tedy ve zbytkové třídě 0 mod 5 a všimneme si mimochodem, že hodnotu 4 nelze vyplatit známkami 5p a 17p.
- Použijeme-li jedinou známku v hodnotě 17 pencí, dostáváme se do množiny 17, 22, 27, .... Nacházíme se ve zbytkové třídě 2 mod 5, objevujeme též, že hodnotu 16 bychom nedokázali známkami v hodnotách 5 a 17 pencí zaplatit.
- Použijeme-li právě dvě známky v hodnotě 17 pencí, dostáváme se do množiny 34, 39, 44, .... Nacházíme se ve zbytkové třídě 4 mod 5 a všimneme si také, že hodnotu 33 nelze známkami v hodnotách 5 a 17 pencí zaplatit.

- d) Použijeme-li právě tři známky v hodnotě 17 penčí a pak již samozřejmě jen pětipencové známky, jsme v množině 51, 56, 61, ..., tedy ve zbytkové třídě 1 mod 5. Trochu složitější je najít největší hodnotu před vstupem do této množiny, kterou nelze zaplatit žádnou kombinací známek v hodnotě 5p a 17p. Tou je zřejmě 48p.
- e) Využijeme-li k zaplacení právě 4 známky v hodnotě 17 penčí, dostáváme se do množiny vyplatitelných hodnot 68, 73, 78, ..., v níž jsou přirozená čísla mající zbytek 3 při dělení číslem 5. Snadno zjistíme, že hodnotu 63 penčí nelze vyplatit pomocí známek v hodnotách 5 a 17 penčí.

Protože jsme již prostudovali všechny možné zbytkové třídy mod 5, nahlížíme, že největší hodnotou, kterou nelze zaplatit s využitím známek o hodnotách 5 a 17 penčí, je právě 63 penčí.

Na uvedenou úlohu, kterou Sylvester zaslal do *Educational Times*, přišla pozoruhodná odpověď. Tehdejší řešení se opírá o teorii vytvářejících či vytvořujících funkcí. Té je věnován i svazek 29 edice *Škola mladých matematiků*, viz [7], který je dostupný z internetové adresy <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423>. Idea řešení by šla vysvětlit takto:

V části a) bychom mohli zaplatit hodnoty 0 penčí (kdybychom nenalepili nic), 5, 10, 15, ... a přistoupíme k formálnímu zápisu ve tvaru vytvořující funkce:  $x^0 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots$ . Tuto geometrickou řadu můžeme formálně sečíst:  $x^0 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \frac{1}{1-x^5}$ . V b) máme  $x^{17} + x^{22} + x^{27} + \dots = \frac{x^{17}}{1-x^5}$ , v bodě c)  $x^{34} + x^{39} + x^{44} + \dots = \frac{x^{34}}{1-x^5}$ , pro d)  $x^{51} + x^{56} + x^{61} + \dots = \frac{x^{51}}{1-x^5}$  a konečně pro e)  $x^{68} + x^{73} + x^{78} + \dots = \frac{x^{68}}{1-x^5}$ .

Množinu všech částek, které můžeme známkami s hodnotami 5 a 17 penčí zaplatit, kóduje vytvořující funkce  $f(x) = \frac{(1+x^{17}+x^{34}+x^{51}+x^{68})}{1-x^5} = \frac{1-x^{85}}{(1-x^5)(1-x^{17})}$ . Na druhou stranu, množinu všech přirozených čísel včetně nuly kóduje vytvořující funkce  $g(x) = x^0 + x^1 + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ . Víme již, že některé částky nelze zaplatit. Jejich výskyt je kódován rozdílem

$$g(x) - f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{85}}{(1-x^5)(1-x^{17})} = \frac{(1-x^5)(1-x^{17}) - (1-x^{85})(1-x)}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{17})}.$$

Protože ale částek, které nelze zaplatit, je konečný počet, musí být výraz na pravé straně roven nějakému polynomu. (Algebraické úpravy, které by nás o tom přesvědčily, naštěstí nemusíme provádět sami. V dalším odstavci uvedeme pro zajímavost patřičné výpočty provedené v programu *Mathematica* [5]). Bezprostředně je jasné, že v čitateli je polynom stupně 86, ve jmenovateli 23, a až by došlo k vykrácení výrazů, dostali bychom polynom stupně 63. To odpovídá po odkódování tomu, že 63 je největší částka, kterou nelze zaplatit.

Pro zajímavost uveďme výpočet v programu *Mathematica*. Nejprve vypočteme čítecitel a jmenovatel posledně uvedeného zlomku:

$$p = \text{Expand} [((1 - x^5) (1 - x^{17}) - (1 - x^{85}) (1 - x))] \\ x - x^5 - x^{17} + x^{22} + x^{85} - x^{86}$$

$$q = \text{Expand} [((1 - x) (1 - x^5) (1 - x^{17}))] \\ 1 - x - x^5 + x^6 - x^{17} + x^{18} + x^{22} - x^{23}.$$

Poté ověříme, že polynom  $p$  je dělitelný polynomem  $q$  beze zbytku a vypočteme tento podíl:

$$\text{PolynomialRemainder}[p, q, x]$$

PolynomialQuotient[ $p, q, x$ ]

$$\begin{aligned} x + x^2 + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{16} + x^{18} + x^{19} + x^{21} \\ + x^{23} + x^{24} + x^{26} + x^{28} + x^{29} + x^{31} + x^{33} + x^{36} + x^{38} + x^{41} + x^{43} \\ + x^{46} + x^{48} + x^{53} + x^{58} + x^{63} \end{aligned}$$

V exponentech tohoto polynomu se nacházejí ty částky, které není možné vyplatit pomocí známek o hodnotě 5 a 17 pencí.

Další informace získá čtenář na <https://www.cut-the-knot.org/blue/Sylvester2.shtml>.

#### LITERATURA

- [1] *American Journal of Mathematics*. John Hopkins University Press [online]. Journal web page [cit. 20. 12. 2022]. <https://www.press.jhu.edu/journals/american-journal-mathematics>
- [2] Cayley, A. (1858) A Memoir on the Theory of Matrices. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 148 (1858), 17–37. <https://www.jstor.org/stable/108649>
- [3] Feuer, L. S. (1987) Sylvester in Virginia, *The Mathematical Intelligencer* 9, 13–19.
- [4] Sylvester, J. J. (1870) *The Laws of Verse*. London: Longmans, Green. <https://archive.org/details/laws-of-verse-or-pri00-sylviala>
- [5] *WOLFRAM MATHEMATICA. The world's definitive system for modern technical computing* [online]. [cit. 20. 12. 2022]. <https://www.wolfram.com/mathematica/>
- [6] Yates, R. C. (1937) Sylvester at the University of Virginia. *American Mathematical Monthly*, Apr. 1937, vol. 44, No. 4, 194–201.
- [7] Zitek, F. (1972) Vytvořující funkce. *Svazek 29 edice Škola mladých matematiků*. Mladá fronta, Praha. <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423>

KATEDRA MATEMATIKY FPE, ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI, PLZEŇ, ČESKÁ REPUBLIKA  
E-mail address: [horajar@kmt.zcu.cz](mailto:horajar@kmt.zcu.cz)