South Bohemia Mathematical Letters
Volume 30, (2022), No. 1, 6-18.

VYUŽITÍ ELIMINACE PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH NA MNOŽINY BODŮ DANÉ VLASTNOSTI

SOŇA KÖNIGSMARKOVÁ

ABSTRACT. Loci of a given property belong to the difficult topics in school mathematics. The problem for students is to construct the set of equations, then modify the system of equations, eliminate certain unknowns and determine what kind of the locus it is. With this problem helps computer software, for example GeoGebra. The program GeoGebra eliminates variables and also shows students the set of all solutions. However, we may encounter the problem, that we obtain the elimination ideal, that will be null or extra sets due to degenerate instances of the constraction. Elimination in GeoGebra is based on the theory of Gröbner bases. The goal is to obtain a system of equations that is easier to solve and equivalent to the original system. The principle is similar to the Gauss elimination, where we try to adjust the set of equations to a triangular shape.

ÚVOD

S tématem množiny bodů dané vlastnosti, se setkávají již žáci středních škol. Patří mezi obtížná témata ve školské matematice. Při řešení úloh na množiny všech bodů dané vlastnosti je výhodné použít počítač. Při řešení úloh je pro studenty nejtěžší sestavit rovnice, pak soustavu rovnic upravit, eliminovat určité neznámé a poznat, o jakou křivku se jedná. S vyřešením soustavy rovnic a s určením, o jakou křivku se jedná může pomoci například program GeoGebra. Studenti mohou s jeho pomocí experimentovat a seznamovat se s novými křivkami. Mohou se však při řešení setkat s problémy, že získají nulový eliminační ideál nebo navíc nějakou množinu bodů jako např. přímku nebo kružnici.

1. APLIKACE TEORIE ELIMINACE

Eliminace v GeoGebře je založena na použití moderních metod řešení – Gröbnerových bází. Cílem je získat soustavu rovnic, která bude ekvivalentní s danou soustavou, ale bude se snáze řešit. Princip je podobný jako u Gaussovy eliminační metody – úprava na trojúhelníkový tvar. Ukážeme nějaké příklady na využití teorie eliminace.

Příklad 1. Je dána kružnice $k(A, r = |AB|)$, délka úsečky $|AB| = a$. Sestrojme rovnoramenný trojúhelník ABC; body B, C leží na kružnici a platí $|AB| = |AC| = a$. Označme O průsečík výšek v_a, v_b a v_c. Bodem C pohybujeme po kružnici k. Zjistěte, co je množinou průsečíků výšek O rovnoramenného trojúhelníku ABC.

Received by the editors: 26.02.2023
2020 Mathematics Subject Classification: 13P10, 97M99, 97G99, 97H99
Keywords and phrases: Množina bodů dané vlastnosti, eliminace, GeoGebra, ideál, Gröbnerova báze.

Řešení:

1. způsob

Trojúhelník umístíme do soustavy souřadnic tak, že $A = [0,0]$, $B = [a,0]$, $C = [u,v]$. Bod $O = [p,q]$. Kružnice k má tedy rovnici $x^2 + y^2 = a^2$. Bod $C \in k$: $u^2 + v^2 - a^2 = 0$.

Výšky trojúhelníku mají rovnice:

$$\begin{aligned} v_a: \quad (u-a)x + vy \quad &= 0, \\ v_b: \quad ux + vy' - ua \quad &= 0. \end{aligned}$$

Bod $O = [p,q]$ leží na výškách:

$$\begin{aligned} O \in v_a: \quad (u-a)p + vq \quad &= 0, \\ O \in v_b: \quad up + vq' - ua \quad &= 0. \end{aligned}$$

Získáme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - a^2 &= 0, \\ (u-a)p + vq &= 0, \\ up + vq - ua &= 0. \end{aligned}$$

Bod $C = [u,v]$ je pohyblivý bod, proto ze soustavy eliminujeme proměnné u, v a tím dostaneme rovnici křivky. Eliminace proměnných u, v *vyžaduje hodně matematických úprav.* Pomocí GeoGebry bychom proměnné snadno eliminovali pomocí funkce $\mathrm{Elim}(u,v)$. Ze soustavy eliminujeme ručně proměnné u, v:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - a^2 &= 0, \\ up - ap + vq &= 0, \\ up + vq - ua &= 0. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice vyjádříme $u = \frac{ap-vq}{p}$ a dosadíme do 1. a 3. rovnice:

$$\begin{aligned} (\tfrac{ap-vq}{p})^2 + v^2 - a^2 &= 0, \\ \tfrac{ap-vq}{p} \cdot p + vq - \tfrac{ap-vq}{p} \cdot a &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{a^2p^2-2apvq+v^2q^2}{p^2} + v^2 - a^2 &= 0, \\ ap - vq + vq - \tfrac{a^2p-vqa}{p} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2p^2 - 2apvq + v^2q^2 + v^2p^2 - a^2p^2 &= 0, \\ ap^2 - vqp + vqp - a^2p + vqa &= 0. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice po úpravě $ap^2 - a^2p + vqa = 0$ vyjádříme $v = \frac{a^2p-ap^2}{qa}$ a dosadíme do 1. rovnice:

$$\begin{aligned} a^2p^2 - 2a\ p(\tfrac{a^2p-ap^2}{qa})q + (\tfrac{a^2p-ap^2}{qa})^2q^2 + (\tfrac{a^2p-ap^2}{qa})^2p^2 - a^2p^2 &= 0, \\ -2p(a^2p - a\ p^2) + \tfrac{a^4p^2-2a^2pa\ p^2+a^2p^4}{a^2} + \tfrac{a^4p^2-2a^2pa\ p^2+a^2p^4}{q^2a^2} \cdot p^2 &= 0, \\ -2a^2q^2p(a^2p - a\ p^2) + q^2a^4p^2 - 2a^3p^3q^2 + a^2p^4q^2 + a^4p^4 - 2a^3p^5 + a^2p^6 &= 0, \\ -2a^4p^2q^2 + 2a^3p^3q^2 + q^2a^4p^2 - 2a^3p^3q^2 + a^2p^4q^2 + a^4p^4 - 2a^3p^5 + a^2p^6 &= 0, \\ -a^4p^2q^2 + a^2p^4q^2 + a^4p^4 - 2a^3p^5 + a^2p^6 &= 0, \ / : a^2p^2 \\ -a^2q^2 + p^2q^2 + a^2p^2 - 2ap^3 + p^4 &= 0. \end{aligned}$$

Tato rovnice je rovnicí hledané křivky. Rovnici se budeme snažit dále upravit. V tomto okamžiku nám také může pomoci GeoGebra.

$$\begin{aligned} -a^2q^2 + p^2q^2 + a^2p^2 - a\ p^3 - a\ p^3 + p^4 &= 0, \\ p(p^3 + pq^2 - a\ p^2) - a(p^3 + a\ q^2 - ap^2) &= 0. \end{aligned}$$

Přičteme a odečteme člen apq^2 a dostaneme:

$$\begin{aligned} p(p^3 + pq^2 - ap^2 + a\ q^2) - a\ (p^3 + pq^2 - ap^2 + aq^2) &= 0, \\ (p-a)\cdot(p^3 + pq^2 - ap^2 + aq^2) &= 0, \\ (p-a)\cdot[p(p^2+q^2) - a\ (p^2 - q^2)] &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2(p^2+q^2) - ap(p^2+q^2) - ap(p^2-q^2) + a^2(p^2-q^2) &= 0, \\ (p^2+q^2)(p^2-ap) - (p^2-q^2)(ap-a^2) &= 0, \\ (p^2+q^2)\cdot p(p-a) - (p^2-q^2)\cdot a(p-a) &= 0, \\ p(p^2+q^2) - a\ (p^2-q^2) &= 0. \end{aligned}$$

Proměnné p, q nahradíme x, y a dostaneme:

$$x(x^2+y^2) \quad = \quad a\ (x^2 - y^2).$$

2. způsob

Soustava rovnic pro neznámé p, q s parametry u, v:

$$\begin{array}{lll} O \in v_a & \Rightarrow & (u-a)p + vq = 0, \\ O \in v_c & \Rightarrow & p = u, \\ \underline{C \in k} & \underline{\Rightarrow} & \underline{u^2 + v^2 = a^2 \ldots \text{podmínka pro parametry u, v}} \end{array}$$

Eliminace parametrů u, v

Eliminace u:
$u = p$ dosadíme do 1. a 3. rovnice.

Eliminace v:

$$\begin{array}{l} (p-a)p = -vq \quad |^2 \\ \underline{p^2 + v^2 = a^2 \ \Rightarrow\ v^2 = a^2 - p^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (p-a)^2p^2 = v^2q^2 \\ (p-a)^2p^2 = (a^2-p^2)q^2 \\ (p-a)^2p^2 + (p^2-a^2)q^2 = 0 \mid : (p-a) \neq 0 \\ \underline{(p-a)p^2 + (p+a)q^2 = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{p(p^2+q^2) - a\ (p^2-q^2) = 0} \end{array}$$

Tuto rovnici napíšeme do programu GeoGebra a zjistíme, jak křivka vypadá. Jedná se o **strofoidu**, viz Obr. 1.

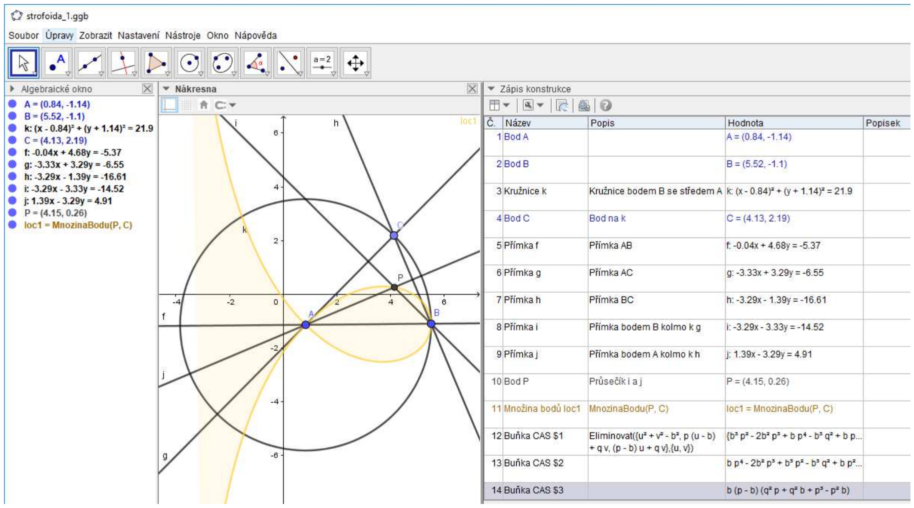

FIGURE 1. Strofoida

Za použití příkazu Elim v GeoGebře
Dostaneme rovnici 4. stupně, dáme faktorizovat a dostaneme lineární a kubickou rovnici. Lineární rovnice reprezentuje přímku a kubická rovnice je rovnicí strofoidy.

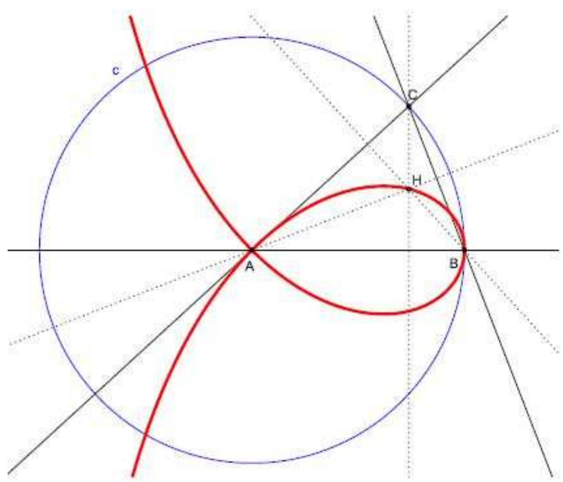

FIGURE 2. Strofoida

Problém nastává, když C dojde do B, tedy když přímka BC není definována, tj. když $u = a$, $v = 0$, potom systém $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $h_3 = 0$ přechází v rovnici $p - a = 0$, která reprezentuje přímku. Pokud tedy nechceme tuto přímku, musíme přidat podmínku $B \neq C$. Pak eliminujeme u, v, t. Dostaneme rovnici strofoidy $p^3 - ap^2 + aq^2 + pq^2 = 0$.

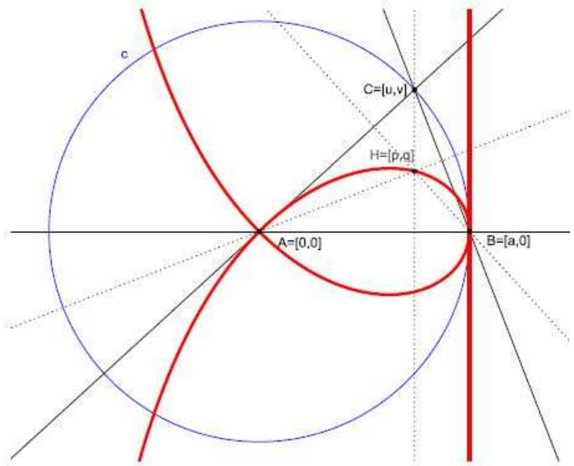

FIGURE 3. Strofoida a přímka

Závěr: Při eliminaci proměnných můžeme získat polynomiální rovnici, která ale nereprezentuje křivku.

Příkaz Locus počítač řeší numericky, tedy každému bodu na ose x přiřadí y, pokud se dostane do $B = C$, bodu na ose x by přiřadil nekonečně mnoho bodů - tuto možnost počítač vyloučí, proto se neobjeví přímka.

Poznámka: Křivku strofoidy jako první popsal ve svých dopisech italský matematik a fyzik Evangelista Torricelli kolem roku 1645. Znovu ji objevil anglický matematik Isaac Barrow ve své práci z roku 1670. Název strofoida z latinského *strophos* (*kroucený pás*) pochází až z roku 1848.

Příklad 2. Je dána kružnice k se středem O a poloměrem a v kartézské soustavě souřadnic (O; x, y). Libovolným (proměnným) bodem $M[u, v] \in k$ veďte kolmice k průměrům kružnice k v souřadnicových osách x, y a jejich paty označte X, Y. K úsečce XY sestrojte kolmici vedenou bodem $M[u, v]$ a její patu označte $P[p, q]$. Určete křivku, která je množinou všech těchto pat P kolmic (vedených všemi body $M \in k$).

Řešení:

Sestavíme rovnice pro určení souřadnic bodů $P[p, q]$ hledané křivky. Body Y, P, X jsou kolineární, takže pro jejich souřadnice $[0, v]$, $[p, q]$, $[u, 0]$ platí:

$$\begin{vmatrix} 0 & v & 1 \\ p & q & 1 \\ u & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{čili } uv - uq - vp = 0.$$

Z podmínky $MP \perp XY$ plyne, že $(P-M)\cdot(X-Y) = 0$, a tedy: $(p-u, q-v)\cdot(u, -v) = 0$ čili $(p - u)u - (q - v)v = 0$. Dostáváme tak soustavu rovnic pro neznámé p, q:

$$\begin{aligned}-vp - uq + uv &= 0,\\ up - vq - u^2 + v^2 &= 0,\end{aligned}$$

s doplňkovou podmínkou pro parametry u, v:

$$M[u,v] \in k \ \Rightarrow u^2 + v^2 = a^2.$$

Eliminace parametrů u, v z této soustavy rovnic snadno provedeme užitím parametrického vyjádření kružnice k:

$$u = a\ \cos t, \quad v\ = a\ \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi).$$

Po dosazení dostáváme soustavu lineárních rovnic pro neznámé p, q:

$$a \sin t\, p - a\ \cos t\, q = -a^2 \sin t \cos t,$$
$$a \cos t\, p - a\ \sin t\, q = a^2(\cos^2 t - \sin^2 t),$$

jež má řešení (určené např. pomocí deterinantů):

$$p = \frac{a^3 \cos^3 t}{a^2} = a \cos^3 t, \quad q = \frac{a^3 \sin^3 t}{a^2} = a \sin^3 t$$

.
Parametr t eliminujeme tak, že vypočteme odtud: $\cos t = \sqrt[3]{\frac{p}{a}}$, $\sin t = \sqrt[3]{\frac{q}{a}}$ a dosadíme do rovnice (doplňkové podmínky) $\sin^2 t + \sin^2 t = 1$. Dostáváme implicitní vyjádření hledané křivky ve tvaru:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{p}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{q}{a}}\right)^2 = 1$$

čili

$$\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Rovnici této křivky nazývané **asteroida** $p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, viz Obr. 4, lze upravit též na ekvivalentní tvar

$$(p^2 + q^2 - a^2)^3 + 27a^2p^2q^2 = 0.$$

Poznámka: Křivku asteroidu jako první zkoumal dánský matematik a astronom Ole Christensem Römer v r. 1674. V letech 1691–1692 její vlastnosti studoval švýcarský matematik a fyzik Johann Bernoulli. Poznatky o ní lze nalézt též v korespondenci německého matematika a filozofa Gottfrieda Wilhelma Leibnize z r. 1715. Název asteroida byl použit v literatuře poprvé roku 1836 a pochází z řec. *aster* (*hvězda*).

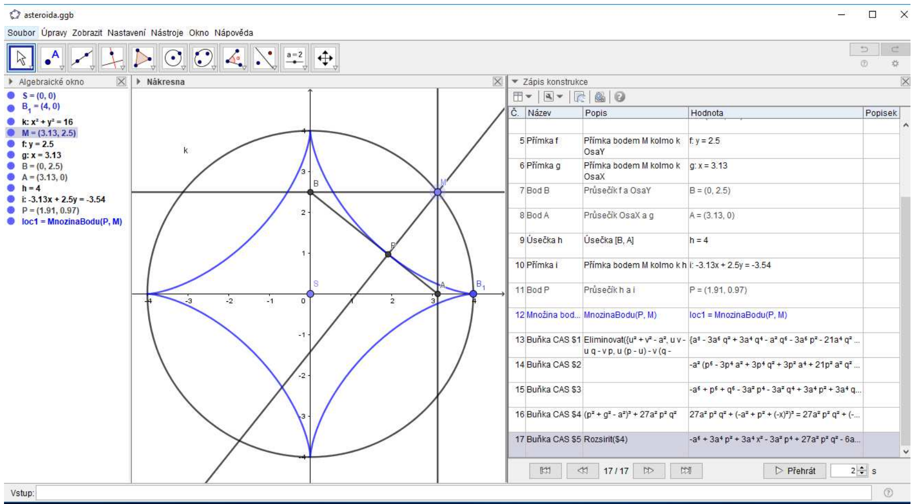

FIGURE 4. Asteroida

Příklad 3. Jsou dány přímky k, l, které jsou na sebe kolmé. Nechť O je průsečík přímek k, l. Bod A leží ve vzdálenosti b od přímky k a ve vzdálenosti a od přímky l. Pro libovolný bod M ležící na l sestrojme bod N na k tak, že MN je kolmá na AM. Určete množinu všech bodů paty kolmice P, sestrojené z O na MN, když se bod M pohybuje po přímce l.

Řešení:

Nejprve využijeme příkaz Locus v GeoGebře. Obrázek ukáže, o jakou křivku se jedná, viz Obr. fig:Ofiurida.

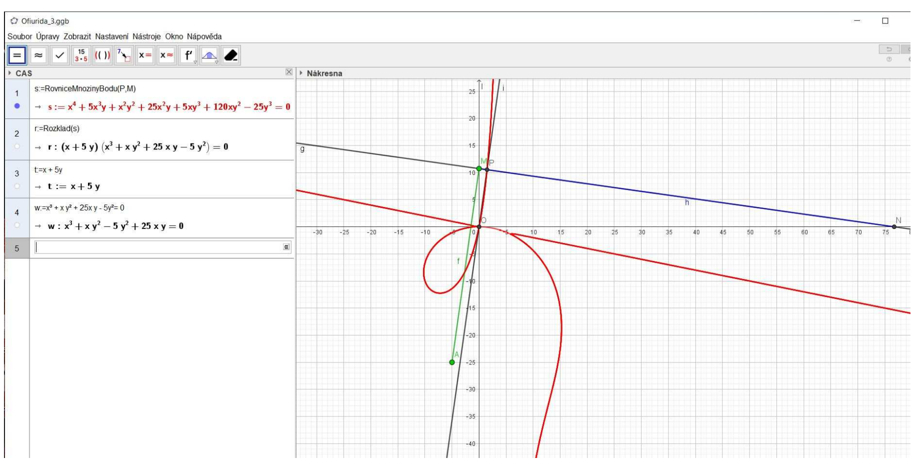

FIGURE 5. Ofiurida

Poté vypočteme ručně.
Označme body: $A = [a, b]$, $M = [0, v]$, $N = [u, 0]$, $P = [p, q]$, $O = [0, 0]$.

1. způsob výpočtu

$AM \perp MN \quad (M-A)(N-M) = 0;$

$$\begin{aligned} (-a, v-b)(u, -v) &= 0, \\ -au - v^2 + vb &= 0. \end{aligned}$$

$OP \perp MN \quad (P-O)(N-M) = 0;$

$$\begin{aligned} (p, q)(u, -v) &= 0, \\ pu - qv &= 0. \end{aligned}$$

$P \in MN \quad \vec{u}_{MN} = (u, -v), \vec{n}_{MN} = (v, u);$

$$vp + uq - uv = 0.$$

Dostaneme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} -au - v^2 + vb &= 0 \\ pu - qv &= 0 \\ vp + uq - uv &= 0 \end{aligned}$$

Budeme eliminovat proměnné u, v.

$$\begin{aligned} qv &= up \\ v &= \tfrac{pu}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} -a\left(\frac{qv}{p}\right) - v^2 + vb &=& 0 \\ vp + \left(\frac{qv}{p}\right)q + \left(\frac{qv}{p}\right)v &=& 0 \\ -aqv - v^2p + vbp &=& 0 \\ vp^2 + q^2v - qv^2 &=& 0 \\ \hline v &\neq& 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -aq - vp + bp &= 0 \\ p^2 + q^2 - qv &= 0 \\ -qv &= -p^2 - q^2 \\ v &= \tfrac{p^2+q^2}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -aq - \left(\tfrac{p^2+q^2}{q}\right)p + bp &= 0 \\ -aq^2 - p^3 - q^2p + bqp &= 0 \\ aq^2 + p^3 + q^2p - bqp &= 0 \\ p(p^2+q^2) - q(aq+bp) &= 0 \end{aligned}$$

Dostali jsme křivku, která se nazývá *ofiurida*, neboli *zmijí ocas*.

Pokud použijeme eliminaci v GeoGebře, pak dostaneme **nulový eliminační ideál**, viz Obr. 6.

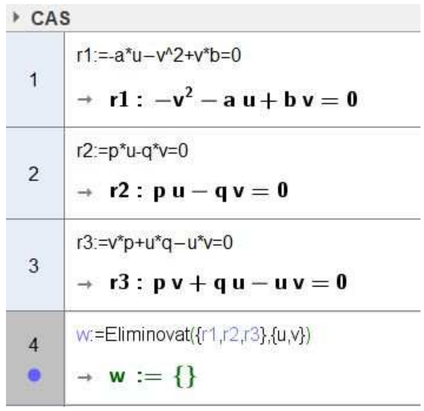

FIGURE 6. Výpočet v GeoGebře I

Proč jsme dostali nulový eliminační ideál? Zřejmě se jedná o součin dvou výrazů, který se rovná nule. Musíme přidat nějakou další podmínku. Při ručním výpočtu jsme využili podmínku $v \neq 0$. Přidáme tedy $vt-1=0$, kde t je pomocná proměnná. Tato rovnice znamená, že v je různé od nuly, viz Obr. 7.

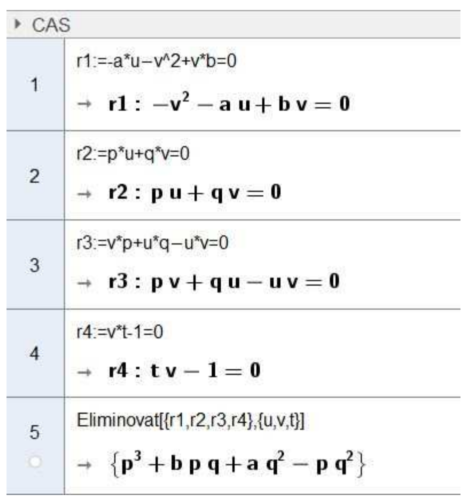

FIGURE 7. Výpočet v GeoGebře II

Zjistíme Gröbnerovu bázi, viz Obr. 8.

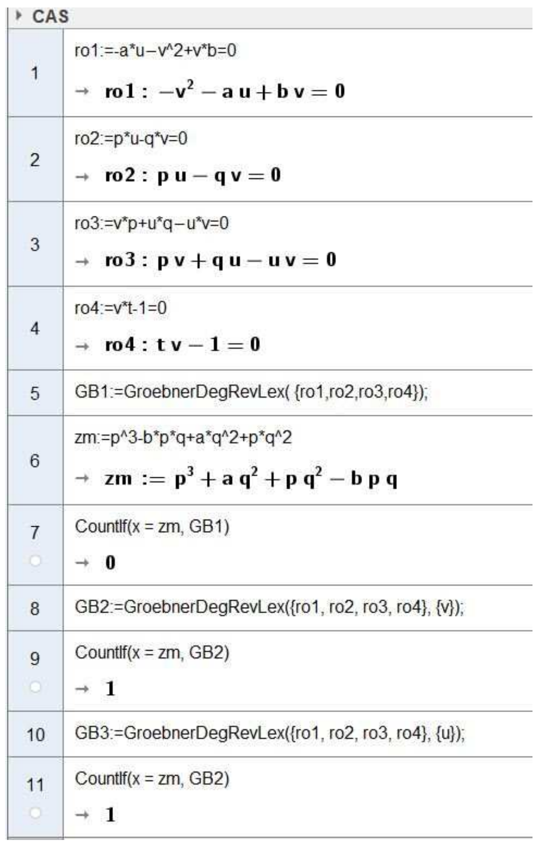

FIGURE 8. Výpočet v GeoGebře III

Pomocí GeoGebry zjistíme, že polynomy $v \cdot (p^3 + pq^2 + aq^2 - p^2qb) = 0$ a $u \cdot (p^3 + pq^2 + aq^2 - p^2qb) = 0$ patří do Gröbnerovy báze, ale nepatří tam polynom $p^3 + pq^2 + aq^2 - p^2qb = 0$.

2. způsob výpočtu

Využijeme jen $OP \perp MP$ a $PM \perp AM$. Dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - qv &= 0, \\ -pa + qv - qb - v^2 + vb &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $v = \frac{p^2+q^2}{q}$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$-pa + q\left(\frac{p^2+q^2}{q}\right) - qb - \left(\frac{p^2+q^2}{q}\right)^2 + \left(\frac{p^2+q^2}{q}\right) b = 0$$

Po úpravě dostaneme:

$$p^4 + p^2q^2 + paq^2 - p^2qb = 0.$$

Rozložíme na součin:

$$p(p^3 + pq^2 + aq^2 - pqb) = 0.$$

Dostaneme *přímku* $p = 0$ a *rovnici křivky - ofiuridy*, viz Obr. 9. Přidali bychom podmínku $p \neq 0$ (Bod $P \neq O$.).

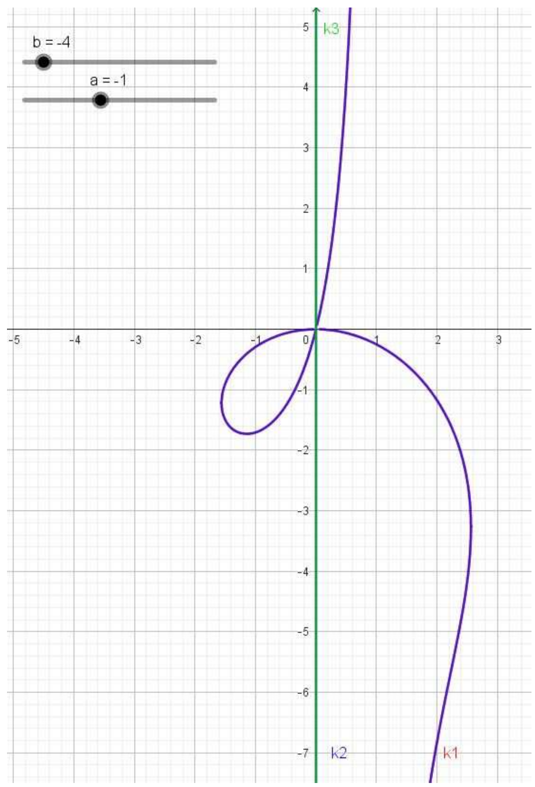

FIGURE 9. Ofiurida a přímka

Pokud eliminujeme v GeoGebře, pak dostaneme jen *křivku ofiuridu*, viz Obr. 10.

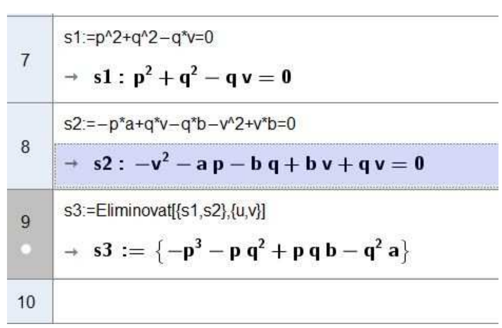

FIGURE 10. Výpočet v GeoGebře

3. způsob výpočtu
Využijeme $AM \perp MN: -au - v^2 + vb = 0$.
Body M, N, P jsou kolineární: $vp + uq - uv = 0$,

$AM \| OP$, tedy $\begin{vmatrix} v-b & a \\ -q & p \end{vmatrix} = 0$ a dostaneme $vp - pb + aq = 0$.
Dostali jsme opět soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} -au - v^2 + vb &= 0 \\ -vp + uq - uv &= 0 \\ vp - pb + aq &= 0 \end{aligned}$$

Vyjádříme z první rovnice $u = \frac{vb - v^2}{a^2}$ a z třetí rovnice $v = \frac{pb - aq}{p}$.

Dosadíme do druhé rovnice:

$$\frac{pb - aq}{p}p + \frac{\left(\frac{pb-aq}{p}\right) \cdot b - \left(\frac{pb-aq}{p}\right)^2}{a}q - \frac{\left(\frac{pb-aq}{p}\right) \cdot b - \left(\frac{pb-aq}{p}\right)^2}{a} \cdot \frac{pb - aq}{p} = 0.$$

Upravíme a dostaneme:

$$abp^4 - a^3q^3 + 2a^2q^2pb + p^2q^2ab - aqp^2b^2 - pq^3a^2 - a^2p^3q = 0.$$

Rozložíme na součin:

$$-a(bp - qa) \cdot (bqp - q^2p - q^2a - p^3) = 0.$$

Získáme *rovnici přímky* a *ofiuridy.* Pokud se M dostane do O, pak by zbyla rovnice $pb - qa = 0$. Přímku nedostaneme, pokud přidáme podmínku $M \neq O$, nebo jako v předchozím způsobu $vt - 1 = 0$.
Výsledky použití eliminace v GeoGebře viz Obr. 11 a 12.

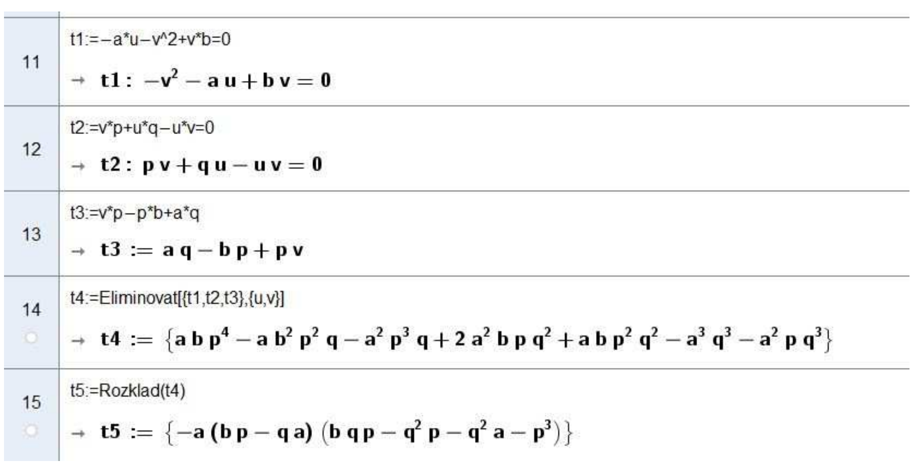

FIGURE 11. Výpočet v GeoGebře

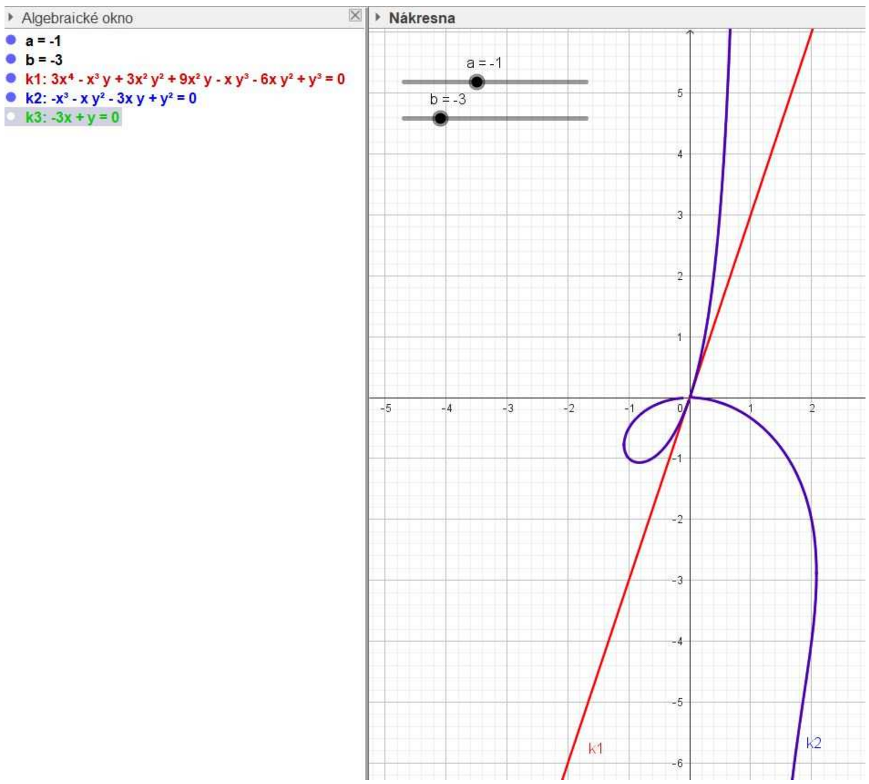

FIGURE 12. Ofiurida a přímka

ZÁVĚR

Uvedené úlohy na řešení množin bodů dané vlastnosti byly řešené s nadanými studenty učitelství matematiky na fakultách připravujících učitele. Podle průzkumů tyto úlohy činí potíže těmto studentům učitelství matematiky. Problémy nastávají při sestavení rovnic a poté i při řešení soustavy rovnic. Při řešení těchto příkladů je vhodné využití GeoGebry, neboť eliminace ručně bývá obtížná a GeoGebra nám pomůže při zjištění, o jakou křivku se jedná.

LITERATURA

[1] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: Ideals, Varieties and Algorithms - An Introduction to Computational, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Second Edition, Springer-Verlag, New York, Inc., 1997.

[2] Hora, J.: O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole - II. díl. Pedagogické centrum, Plzeň, 1998.

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH, PEDAGOGICKÁ FAKULTA, ČESKÉ BUDĚJOVICE, ČESKÁ REPUBLIKA

Email address: `sonakonig@centrum.cz`