

O KOŘENECH BIKVADRATICKÝCH POLYNOMŮ

LUDEK SPÍCHAL

ABSTRAKT. V článku je ukázáno, že množiny kořenů bikvadratických polynomů s reálnými koeficienty lze v komplexní rovině charakterizovat pomocí regulárních kuželoseček (kružnice, hyperbola).

1. ÚVOD

Studium vlastností množin bodů určených algebraickými výrazy patřilo a stále patří mezi důležitá témata matematiky, resp. algebry. Zájem se mimo jiné např. soustřeďuje do oblasti vlastností křivek určených polynomy daného stupně, nebo na zkoumání vlastností n -úhelníků jejichž vrcholy se nachází v nekolineárních kořenech zmíněných polynomů. Mezi klasické problémy řešené celou řadou autorů tak můžeme zařadit studium polynomů stupně 3 s reálnými nebo komplexními koeficienty.

Anatriello & Vincenzi se v [1] zabývají normovanými polynomy stupně 3, tj. polynomy ve tvaru $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ s reálnými koeficienty a_2, a_1, a_0 , jejichž (komplexní) kořeny z_1, z_2, z_3 pro pevně zvolené hodnoty koeficientů a_1, a_2 zkoumají jako množiny bodů v rovině v závislosti na hodnotě koeficientu a_0 . V článku ukazují, že množinou kořenů polynomu stupně 3 je sjednocení množiny reálných čísel a množiny bodů tvořících hyperbolu, jejíž rovnice závisí pouze na hodnotách koeficientů a_1, a_2 . Jako důležitý výchozí předpoklad uvádějí následující větu.

Věta 1.1. (Siebeck-Marden) *Nechť f je polynom stupně 3 s komplexními koeficienty, jehož kořeny z_1, z_2 a z_3 jsou nekolineární body v komplexní rovině, a dále nechť \mathcal{T} je trojúhelník s vrcholy v kořenech polynomu f . Pak existuje právě jedna elipsa \mathcal{E}_{in} , která je vepsaná trojúhelníku \mathcal{T} , jehož strany jsou v bodech dotyku (středů stran) současně tečnami elipsy. Ohnisky elipsy \mathcal{E}_{in} jsou kořeny polynomu f' .*¹

Poznámka 1.2. Elipsa \mathcal{E}_{in} popsaná v předchozí větě je v literatuře označována jako *Steinerova vepsaná elipsa*. Za zmínku stojí skutečnost, že Steinerova vepsaná elipsa je vepsanou elipsou s největším obsahem.² V literatuře, např. [5, 10] je dále zmiňována *Steinerova opsaná elipsa* \mathcal{E}_{cir} , jejíž střed se nachází v těžišti trojúhelníku \mathcal{T} a jejíž obsah je minimální vzhledem ke všem elipsám opsaným trojúhelníku \mathcal{T} .

Minda & Phelps se v článku [8] zaměřují na vztahy mezi kořeny polynomů stupně 3 a kořeny derivací těchto polynomů, přičemž vychází zejména z tvrzení Gauss-Lucasovy věty.

Received by the editors: 09.12.2022

2020 Mathematics Subject Classification: 51N20, 11D25

Keywords and phrases: Bikvadratické polynomy, Steinerova vepsaná elipsa, Steinerova opsaná elipsa, kružnice, hyperbola.

¹Důkaz např. v [2, 6, 7].

²Více o o Steinerově vepsané elipse např. [8, 9].

Věta 1.3. (Gauss-Lucas) *Nechť $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ je polynom stupně n s komplexními koeficienty, tj. $f(z) \in \mathbb{C}[z]$. Pak kořeny polynomu $f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1$ leží uvnitř konvexního obalu, jehož vrcholy tvoří kořeny polynomu $f(z)$.*

Z dalších předpokladů v článku autory uvedených zmiňme vztah mezi kořeny a koeficienty polynomů f a f' . Jestliže $z_j, 1 \leq j \leq n$ jsou kořeny f a $z'_j, 1 \leq j \leq n-1$ kořeny f' , pak z rovností

$$(1.1a) \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} = -(z_1 + \dots + z_n),$$

$$(1.1b) \quad \frac{(n-1)a_{n-1}}{n a_n} = -(z'_1 + \dots + z'_{n-1}),$$

vyplývá, že

$$(1.2) \quad \frac{1}{n}(z_1 + \dots + z_n) = \frac{1}{n-1}(z'_1 + \dots + z'_{n-1}).$$

Z rovnosti uvedené v rovnici (1.2) vyplývá, že n -úhelníky s vrcholy v kořenech polynomů f a f' mají shodné těžiště. V článku dále rovněž zmiňují vztah mezi kořeny polynomů f a f' a Steinerovou vepsanou elipsou \mathcal{E}_{in} , kde poznamenávají, že speciálním případem elipsy \mathcal{E}_{in} pro násobné kořeny polynomu f' je kružnice, tj. případ, kdy kořeny f' tvoří rovnostranný trojúhelník.

Clifford & Lachance se v článcích [3, 4] zabývají podmínkami, za kterých je možné zobecnit Siebeck-Mardenovu větu (v článku označena jako Bôcher-Graceova věta) a uvádí mimo jiné tvar zmíněné věty pro konvexní čtyřúhelníky a polynomy stupně 4.

Věta 1.4. *Nechť \mathcal{P} je rovnoběžník, jehož vrcholy leží v kořenech polynomu stupně 4. Pak existuje právě jedna elipsa \mathcal{E}_{in} vepsaná do \mathcal{P} , procházející středy stran \mathcal{P} a mající největší obsah mezi vepsanými elipsami. Hlavní osa \mathcal{E}_{in} je totožná s regresní přímkou sestavenou vzhledem ke kořenům polynomu f . Pokud je*

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

monický polynom, pak stacionární body f leží v ohniscích a středu \mathcal{E}_{in} . Jestliže je dále \mathcal{P} konvexní čtyřúhelník různý od rovnoběžníku, pak neexistuje vepsaná elipsa procházející středy všech stran \mathcal{P} .

V článku se budeme zabývat redukováným tvarem normovaného polynomu stupně 4 s reálnými koeficienty

$$(1.3) \quad f(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde položíme $a_3 = a_1 = 0$, tj. bikvadratickými polynomy (polynomy se sudými exponenty)

$$(1.4) \quad f(x) = x^4 + a_2 x^2 + a_0.$$

Podle rovnice (1.1a) pro kořeny polynomu určeného rovnicí (1.4) platí

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0,$$

přičemž kořeny leží na kružnici se středem v počátku. Kořeny tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$(1.5) \quad z_{1,2,3,4} = \pm a \pm bi,$$

nebo

$$(1.6) \quad z_{1,2} = \pm a, \quad z_{3,4} = \pm bi,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

V případě, že kořeny rovnice (1.4) jsou ve tvaru (1.5), pak zjednodušením rovnice

$$f(x) = (x - a - bi)(x + a + bi)(x - a + bi)(x + a - bi)$$

dostáváme

$$f(x) = x^4 + 2(b^2 - a^2)x^2 + (a^2 + b^2)^2$$

a porovnáním s rovnicí (1.4) dále soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2(b^2 - a^2) &= a_2, \\ (a^2 + b^2)^2 &= a_0, \end{aligned}$$

kde

$$(1.7) \quad \begin{aligned} a &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{-a_2 \pm 2\sqrt{a_0}}, \\ b &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{a_2 \pm 2\sqrt{a_0}}. \end{aligned}$$

V případě, že kořeny rovnice (1.4) jsou ve tvaru (1.6), pak zjednodušením rovnice

$$f(x) = (x - a)(x + a)(x + bi)(x - bi)$$

dostáváme

$$f(x) = x^4 + (b^2 - a^2)x^2 - a^2b^2$$

a porovnáním s rovnicí (1.4) dále soustavu rovnic

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= a_2, \\ -a^2b^2 &= a_0, \end{aligned}$$

kde

$$(1.8) \quad \begin{aligned} a &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}, \\ b &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}. \end{aligned}$$

Záměrem článku je ukázat, že pokud budeme uvažovat množinu polynomů stupně 4 ve tvaru určeném rovnicí (1.4), pak jejich kořeny leží buď na osách komplexní roviny, na osách kvadrantů komplexní roviny nebo tvoří v komplexní rovině regulární kuželosečku (kružnici či hyperbolu).

2. BIKVADRATICKÉ POLYNOMY S KONSTANTNÍ HODNOTOU a_0

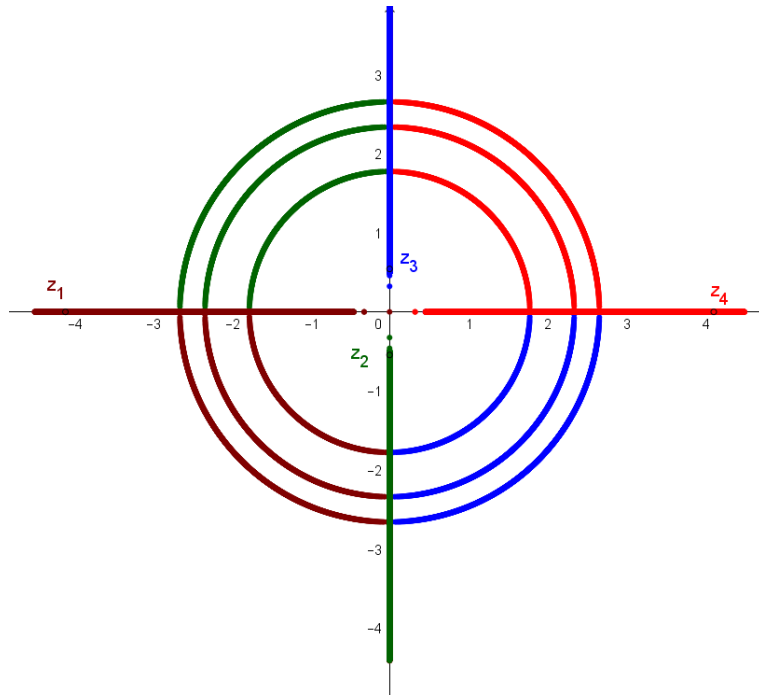
Pro $a_2, a_0 \in \mathbb{R}$ bude

$$\mathcal{F}_{a_0} = \{x^4 + a_2x^2 + a_0 \in \mathbb{R}[x]\}$$

označovat množinu polynomů f_{a_2} s konstantní hodnotou koeficientu a_0 a proměnlivou hodnotou koeficientu a_2 a

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}_{a_0}} = \{z \in \mathbb{C} : \exists f_{a_2} \in \mathcal{F}_{a_0}, f_{a_2}(z) = 0\}$$

bude označovat množinu jejich řešení.



Obr. 1. Množiny kořenů polynomů $f_{a_2} = x^4 + a_2x^2 + a_0$, pro $a_0 = 50$ (vnější), $a_0 = 30$ (prostřední) a $a_0 = 10$ (vnitřní kruh). Grafy byly vytvořeny pomocí softwaru Geogebra, pro $a_2 \in [-20, 20]$, krokování s hodnotou 0,1.

Jestliže $a_0 \leq 0$, pak podle rovnic (1.7) a (1.8) leží všechny kořeny polynomů f_{a_2} pouze na reálné ($a_2 \leq 0$) nebo imaginární ose ($a_2 > 0$). V případě, že $a_0 > 0$, pak podle rovnic (1.7) a (1.8) mají polynomy f_{a_2}

- pro $a_2 \leq 0 \wedge a_2^2 > 4a_0$ pouze reálné kořeny,
- pro $a_2 > 0 \wedge a_2^2 > 4a_0$ pouze ryze imaginární kořeny,
- pro $a_2^2 \leq 4a_0$ komplexní kořeny ležící na kružnici \mathcal{K}_{a_0} určené rovnicí

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a_0}.$$

Poznámka 2.1. Kružnici \mathcal{K}_{a_0} budeme označovat jako *kružnici přidruženou množině bikvadratických polynomů \mathcal{F}_{a_0} .*

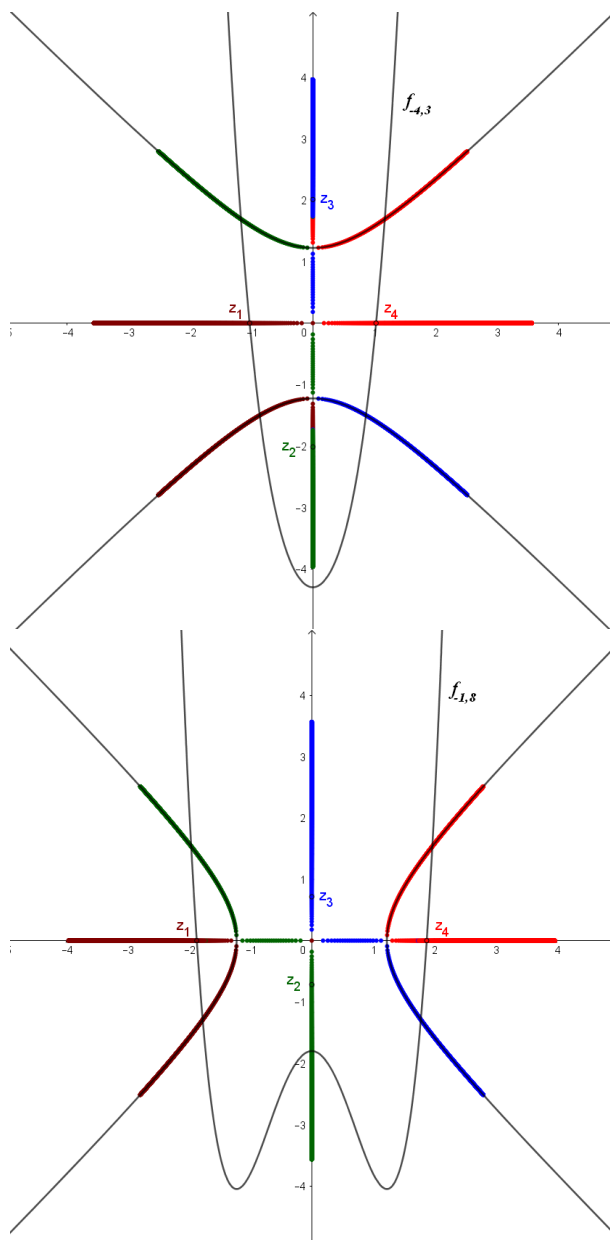
Následující tvrzení, které shrnuje výše uvedené poznámky, je analogické k (věta 2.1.) v [1], důkaz viz tamtéž.

Věta 2.2. *Nechť $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_{a_0}}$ je množina kořenů všech polynomů f_{a_2} , které náleží množině $\mathcal{F}_{a_0} = \{x^4 + a_2x^2 + a_0, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Pak $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_{a_0}} = \mathcal{K}_{a_0} \cup \mathcal{I}$, kde \mathcal{K}_{a_0} je kružnice přidružená množině bikvadratických polynomů \mathcal{F}_{a_2} a \mathcal{I} je množina kořenů ležících na osách roviny komplexních čísel.*

3. BIKVADRATICKÉ POLYNOMY S KONSTANTNÍ HODNOTOU a_2

Pro $a_2, a_0 \in \mathbb{R}$ bude

$$\mathcal{F}_{a_2} = \{x^4 + a_2x^2 + a_0 \in \mathbb{R}[x]\}$$



Obr. 2. Množiny kořenů polynomů $f_{a_0} = x^4 + 3x^2 + a_0$ (nahore) a $f_{a_0} = x^4 - 3x^2 + a_0$ (dole), $a_0 \in [-200, 200]$. Pro $a_0 \in \mathbb{R}$ tvoří kořeny polynomů množinu, která je sjednocením reálné osy, imaginární osy a hyperboly s rovnicí $2y^2 - 2x^2 - 3 = 0$ (nahore), resp. $2y^2 - 2x^2 + 3 = 0$ (dole). Grafy byly vytvořeny pomocí softwaru Geogebra, pro a_0 bylo použito krokování s hodnotou 0,1.

označovat množinu polynomů f_{a_0} s konstantní hodnotou koeficientu a_2 a proměnlivou hodnotou koeficientu a_0 a

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}_{a_2}} = \{z \in \mathbb{C} : \exists f_{a_0} \in \mathcal{F}_{a_2}, f_{a_0}(z) = 0\}$$

bude označovat množinu jejich řešení.

Jestliže je $a_2 = 0$, pak podle rovnic (1.7) a (1.8) pro $a_0 \leq 0$ leží kořeny polynomů f_{a_0} na osách komplexní roviny (tj. polynomy mají pouze reálné nebo ryze imaginární kořeny), pro $a_0 > 0$ leží kořeny polynomů f_{a_0} na osách 1. a 3. (resp. 2. a 4.) kvadrantu komplexní roviny.

Jestliže je $a_2 \neq 0 \wedge a_0 \leq \frac{a_2^2}{4}$, pak podle rovnic (1.7) a (1.8) leží kořeny polynomů f_{a_0}

- pouze na reálné ose pro $a_2 < 0 \wedge a_0 \geq 0$,
- po dvou na reálné a imaginární ose pro $a_0 < 0$,
- pouze na imaginární ose pro $a_2 > 0 \wedge a_0 \geq 0$.

Pro $a_2 \neq 0 \wedge a_0 > \frac{a_2^2}{4}$ mají polynomy f_{a_0} komplexní kořeny ležící na hyperbole \mathcal{H}_{a_2} určené rovnicí

$$(3.1) \quad 2y^2 - 2x^2 - a_2 = 0,$$

kde

- pro $a_2 < 0$ je hlavní osa hyperboly \mathcal{H}_{a_2} shodná s reálnou osou, její ohniska jsou

$$F_{1,\mathcal{H}_{a_2}}[-\sqrt{a_2}, 0], F_{2,\mathcal{H}_{a_2}}[\sqrt{a_2}, 0]$$

- pro $a_2 > 0$ je hlavní osa hyperboly \mathcal{H}_{a_2} shodná s imaginární osou, její ohniska jsou

$$F_{1,\mathcal{H}_{a_2}}[0, -i\sqrt{a_2}], F_{2,\mathcal{H}_{a_2}}[0, i\sqrt{a_2}].$$

Poznámka 3.1. Z výše uvedeného je zřejmé, že rovnice hyperbol \mathcal{H}_{a_2} závisí pouze na hodnotě koeficientu a_2 . Hyperbolu \mathcal{H}_{a_2} budeme označovat jako *hyperbolu přidruženou množině bikvadratických polynomů \mathcal{F}_{a_2}* .

Poznámka 3.2. Jestliže je $a_2 = 0$ a $a_0 > 0$, pak leží kořeny polynomů f_{a_0} na osách 1. a 3. (resp. 2. a 4.) kvadrantu komplexní roviny, které jsou současně asymptotami hyperbol \mathcal{H}_{a_2} .

Následující tvrzení, které shrnuje výše uvedené poznámky, je analogické k (věta 2.1.) v [1], důkaz viz tamtéž.

Věta 3.3. *Nechť $a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_{a_2}}$ je množina kořenů všech polynomů, které náleží množině $\mathcal{F}_{a_2} = \{x^4 + a_2x^2 + a_0, a_0 \in \mathbb{R}\}$. Pak $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_{a_2}} = \mathcal{H}_{a_2} \cup \mathcal{I}$, kde \mathcal{H}_{a_2} je hyperbola přidružená množině bikvadratických polynomů \mathcal{F}_{a_2} a \mathcal{I} je množina kořenů ležících na osách roviny komplexních čísel.*

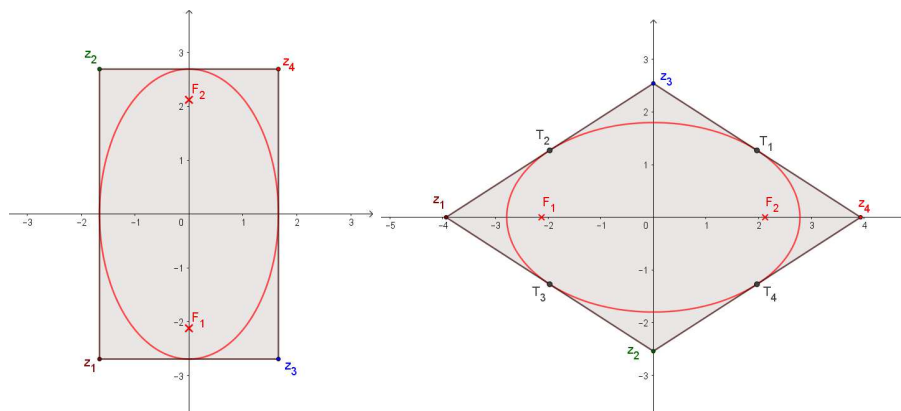
4. STEINEROVY ELIPSY

V případě, že má polynom f_{a_0} po třech nekolineární kořeny, pak tyto kořeny podle věty (1.4) tvoří v komplexní rovině rovnoběžník, kterému lze jednoznačně přiřadit dvě Steinerovy elipsy. Elipsa \mathcal{E}_{in} má podle věty (1.4) největší obsah mezi vepsanými elipsami (obr. 1), elipsa \mathcal{E}_{cir} (obr. 2) pak mezi opsanými elipsami obsah minimální [5, 10].

Podle věty (1.4) jsou stacionární body polynomu f_{a_0} totožné se středem a ohnisky elipsy \mathcal{E}_{in} , jejich polohu určíme z derivace polynomu f_{a_0} , kterou je polynom

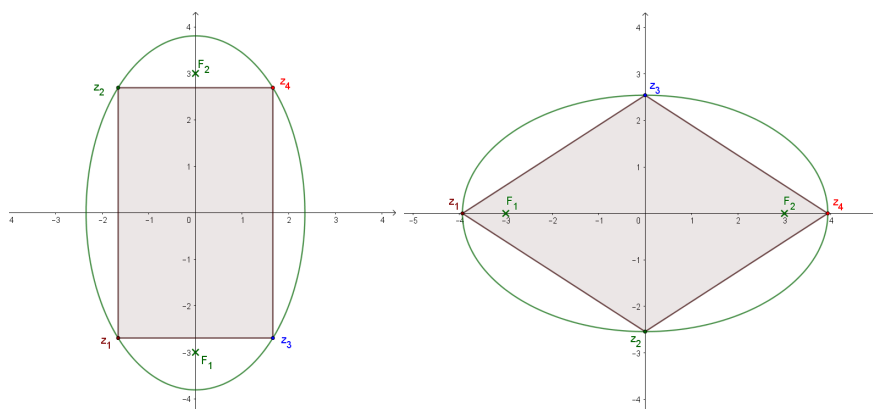
$$(4.1) \quad f'_{a_0} = 4x^3 + 2a_2x = 4x\left(x^2 + \frac{a_2}{2}\right).$$

Střed elipsy \mathcal{E}_{in} se nachází v počátku a dále



Obr. 3. Steinerova elipsa vepsaná do rovnoběžníku s vrcholy v kořenech polynomu $f(x) = x^4 + 9x^2 + 100$, ohnisky elipsa jsou komplexní kořeny polynomu $f'(x) = 4x^3 + 18x$ (vlevo). Steinerova elipsa vepsaná do rovnoběžníku s vrcholy v kořenech polynomu $g(x) = x^4 - 9x^2 - 100$, ohnisky elipsa jsou reálné kořeny polynomu $g'(x) = 4x^3 - 18x$ (vpravo).

- pro $a_2 < 0$ leží ohniska na reálné ose, tj. $F_{1,in}[-\sqrt{\frac{a_2}{2}}, 0], F_{2,in}[\sqrt{\frac{a_2}{2}}, 0]$,
- pro $a_2 > 0$ leží ohniska na imaginární ose, tj. $F_{1,in}[0, -i\sqrt{\frac{a_2}{2}}], F_{2,in}[0, i\sqrt{\frac{a_2}{2}}]$.



Obr. 4. Steinerova elipsa opsaná rovnoběžníku s vrcholy v kořenech polynomu $f(x) = x^4 + 9x^2 + 100$ (vlevo). Steinerova elipsa opsaná rovnoběžníku s vrcholy v kořenech polynomu $g(x) = x^4 - 9x^2 - 100$ (vpravo).

Poznámka 4.1. Je zřejmé, že ohniska elipsy \mathcal{E}_{in} jsou současně totožná s vrcholy hyperboly \mathcal{H}_{a_2} .

Poznámka 4.2. Střed opsané elipsy \mathcal{E}_{cir} se nachází v počátku, ohniska \mathcal{E}_{cir} jsou totožná s ohnisky hyperboly \mathcal{H}_{a_2} , tj.

- pro $a_2 < 0$ leží ohniska na reálné ose, tj. $F_{1,cir}[-\sqrt{a_2}, 0], F_{2,cir}[\sqrt{a_2}, 0]$,
- pro $a_2 > 0$ leží ohniska na imaginární ose, tj. $F_{1,cir}[0, -i\sqrt{a_2}], F_{2,cir}[0, i\sqrt{a_2}]$.

Poznámka 4.3. Steinerova vepsaná a opsaná elipsa mají společný střed a společné směry os, jsou tedy stejnohlelé, se středem stejnolehlosti v počátku [11].

Příklad 4.4. Koeficient stejnolehlosti Steinerových elips vzhledem k polynomům určeným rovnicí (1.4) je $\sqrt{2}$, zapišme jejich rovnice.

Řešení 4.5. Pokud označíme $\mathcal{R}(x)$, $\mathcal{I}(x)$ reálnou, resp. imaginární část kořenů rovnice (1.4), pak

(i) pro $a_0 > \frac{a_2^2}{4}$ je \mathcal{E}_{in} určená rovnicí

$$\frac{x^2}{\mathcal{R}(x)^2} + \frac{y^2}{\mathcal{I}(x)^2} = 1$$

a \mathcal{E}_{cir} určená rovnicí

$$\frac{x^2}{2\mathcal{R}(x)^2} + \frac{y^2}{2\mathcal{I}(x)^2} = 1,$$

(ii) pro $a_0 < 0$ je \mathcal{E}_{in} určená rovnicí

$$\frac{2x^2}{\mathcal{R}(x)^2} + \frac{2y^2}{\mathcal{I}(x)^2} = 1$$

a \mathcal{E}_{cir} určená rovnicí

$$\frac{x^2}{\mathcal{R}(x)^2} + \frac{y^2}{\mathcal{I}(x)^2} = 1.$$

Poznámka 4.6. Vzhledem k hodnotě koeficientu stejnolehlosti pro poměr obsahů vepsané a opsané Steinerovy elipsy platí úměra $\mathcal{E}_{in} : \mathcal{E}_{cir} = 1 : 2$.

Poznámka 4.7. Ve speciálním případě pro $a_2 = 0$ má polynom f_{a_0} násobné kořeny, které tvoří v komplexní rovině pravoúhelník (čtverec), kterému je vepsaná a opsaná kružnice, s poloměrem $r_{in} = \sqrt{\sqrt{|a_0|}/2}$, resp. $r_{cir} = \sqrt[4]{|a_0|}$.

5. ZÁVĚR

V článku jsme zkoumali množiny kořenů bikvadratických polynomů s reálnými koeficienty. Ukázali jsme, že kromě kořenů ležících na osách komplexní roviny tvoří množiny kořenů regulární kuželosečky (kružnice, hyperbola). Kořenům polynomů lze přiřadit Steinerovy elipsy (vepsanou a opsanou), jejichž rovnice závisí na hodnotách koeficientů a_0, a_2 .

LITERATURA

- [1] Anatriello, G., Vincenzi, G. (2021). Cubics, hyperbolas and steiner ellipses. *J. Geom.*, 112(45).
- [2] Bogosel, B. (2017). A Geometric Proof of the Siebeck–Marden Theorem. *Am. Math. Mon.*, 124(5), 459–463.
- [3] Clifford, J. H., Lachance, M. (2013). Quartic Coincidences and the Singular Value Decomposition. *Mathematics Magazine* 86(5), 340–349.
- [4] Clifford, J. H., Lachance, M. (2018). A Generalization of the Bôcher–Grace Theorem. *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 48(4), 1069–1076.
- [5] Horwitz, A. (2010). Ellipses of minimal area and of minimal eccentricity circumscribed about a convex quadrilateral. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(1).
- [6] Kalman, D. (2008). An elementary proof of Marden’s theorem. *Am. Math. Mon.* 115, 330–338.
- [7] Kalman, D. (2008). The Most Marvelous Theorem in Mathematics, *Math Horizons*, 15(4), 16–17.
- [8] Minda, D., Phelps, S. (2008). Triangles, ellipses, and cubic polynomials. *Am. Math. Mon.* 115(8), 679–689.
- [9] Scimemi, B. (2010). Simple Relations Regarding the Steiner Inellipse of a Triangle. *Forum Geometricorum* 10, 55–77.

- [10] Sylvester, J. R. (2017). Extremal area ellipses of a convex quadrilateral. *The Mathematical Gazette*, 101(550), 11–26.
- [11] Sukdol, V. (1934). Steinerovy elipsy [II.]. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 63(5), 78–83.

ČESKÁ LESNICKÁ AKADEMIE, TRUTNOV, ČESKÁ REPUBLIKA
Email address: spichal@clatrutnov.cz