South Bohemia Mathematical Letters
Volume 31, (2023), No. 1, 16–25.

KRITICKÉ A TVOŘIVÉ VYUŽÍVÁNÍ DYNAMICKÉ GEOMETRIE V MATEMATICE ZÁKLADNÍ ŠKOLY

LUKÁŠ VÍZEK

ABSTRAKT. Tento text uvažuje o významech dynamické geometrie pro matematické vzdělávání zejména na druhém stupni základní školy. Ukazuje souvislosti dynamických prostředí s klasickými přístupy v geometrii, naznačuje přidanou hodnotu digitálních nástrojů a prezentuje výsledky vybraných výzkumných šetření. Předkládá zjištění, že dynamická geometrie může hrát vedlejší roli ve školní praxi, může stát v pozadí výuky matematiky a současně podporovat vzdělávání impulzy, které jsou obtížně nahraditelné při tvorbě statických obrazců tužkou na papír.

ÚVOD

V tradičním přístupu ke geometrii na základní škole jsou rovinné objekty konstruovány pomocí tužky, pravítka a kružítka, jsou formovány strukturou přímek a kružnic a tedy zakotveny v pojetí Eukleidových Základů. Výpočetní technika však umožňuje modelovat objekty také v geometrických softwarech, zpřístupňuje jejich dynamické modifikace a proměňuje statické obrazce sestrojené na papír nebo školní tabuli. Současné vzdělávání tak vystupuje ve dvou rolích, na jedné straně přirozeně vyplývá z přesné, historické, ale stále aktuální antické matematiky, na druhé straně nachází možnosti moderních technologií pro práci a porozumění v geometrii. Druhá jmenovaná role v uplynulých letech čelila a de facto stále čelí výzvě, jakým konkrétním a efektivním způsobem využívat dynamické přístupy ve školské praxi a kriticky je reflektovat [13].

V tomto článku naznačujeme významy dynamické geometrie pro vzdělávání, prezentujeme výsledky vlastních výzkumných šetření a uvažujeme o správném a tvořivém používání moderních technologií v geometrii základní školy. Impulsem pro tento text byla plenární přednáška stejného názvu přednesená autorem na konferenci *Užití počítačů ve výuce matematiky* na Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích v listopadu 2023.

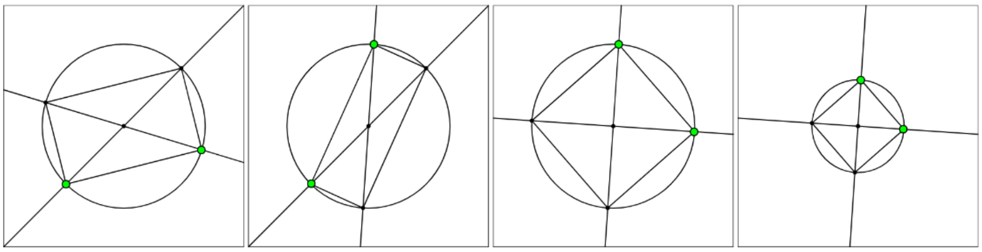
1. GEOMETRIE V DYNAMICKÉM PROSTŘEDÍ

V uplynulých desetiletích probíhá rozvoj programů dynamické geometrie společně s vývojem výpočetní techniky, jejich zavádění do školské praxe podněcuje zlepšující se materiální vybavení škol. Umožňuje pracovat v matematice s aplikacemi Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad, GeoGebra nebo Sketchometry. Tyto programy zprostředkovávají geometrické objekty dynamickým způsobem, tedy poskytují modifikace konstrukcí, které jednak proměňují sestrojené tvary, jednak zachovávají podstatu konstrukcí [8].

Tuto skutečnost můžeme ukázat na dynamické konstrukci obsahující kružnici s jistým středem a procházející bodem volně umístěným v nákresně. Dále na této kružnici leží bod, který se po ní může volně pohybovat. Následně jsou sestrojené dvě přímky, které prochází vždy jedním z volných bodů a středem kružnice a určují tak dva další body vázané jako průsečíky

Received by the editors: 5. 2. 2024.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 97-02, 97-06, 97C70, 97E50, 97G40.
Key words and phrases: Dynamic geometry, lower secondary school, geometric construction, classification of geometric objects, argumentation.

přímek s kružnicí. Dva volné a dva vázané body tvoří vrcholy obdélníku (OBRÁZEK 1a, volné body jsou zeleně zvýrazněné). Při změně polohy volných bodů můžeme získat sice jiný obdélník, ovšem podstata konstrukce je zachována. Stále je zajištěno, že vzniklý čtyřúhelník má stejně dlouhé úhlopříčky, které se půlí, je tedy obdélníkem (OBRÁZEK 1b). Pokud při dynamické proměně dojde k nastavení, ve kterém navíc úhlopříčky svírají pravý úhel, čtyřúhelník je čtvercem (OBRÁZEK 1c), který může mít také jinou velikost, pokud volným bodem určujícím kružnici změníme její poloměr (OBRÁZEK 1d).



OBRÁZEK 1. Čtyři různé podoby jedné dynamické konstrukce; převzato z [20]

Představenou konstrukci by bylo možné sestrojit pomocí kružítka a pravítka, je založena na principech plynoucích z antických Základů [4], ovšem při rýsování na papír by bylo třeba její různé podoby tvořit opakovanou statickou konstrukcí. Její dynamická verze umožňuje přecházet plynule mezi jejími podobami posunováním volných objektů, resp. bodů (v angličtině dragging; [8]). Nevede tedy ke vzniku jediného objektu, zajišťuje jistou jeho vlastnost, tedy formuje celou skupinu útvarů shodujících se v této vlastnosti (v angličtině dragging family of shapes; [5]).

V literatuře je prezentována řada pedagogických studií, které dokládají význam dynamických prostředí pro rozvoj matematického uvažování v geometrii, identifikování společných znaků rovinných, případně prostorových útvarů nebo prohlubování argumentačních dovedností. Zatím je však méně prostudováno, jakou formální či obsahovou podobu mají úlohy zadávané v dynamických programech mít [13], aby byly podnětné pro studenty i učitele. V následujících odstavcích představujeme výsledky čtyř studií, které mohou poskytnout náměty pro podobu zejména konstrukčních úloh a pro užití dynamické geometrie ve školské matematice. Všechny studie byly zpracovány kvalitativní metodologií [15].

2. HLEDÁNÍ KOLMIC V GEOGEBRA LESSON

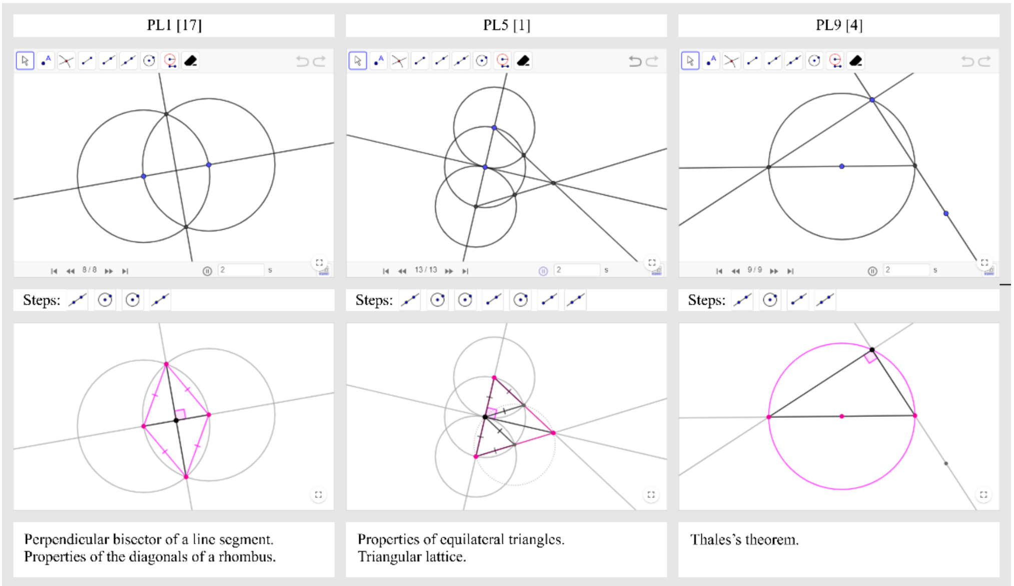
Zdravotní krize spojená s onemocněním covid-19 a z ní plynoucí potřeba distanční výuky v letech 2020 a 2021 zaostřila snad více než dosud pozornost na užití výpočetní techniky. V této době byla řada internetových vzdělávacích platforem doplněna o nové funkcionality, v případě systému dynamické geometrie GeoGebra se jednalo o Lesson, označovanou nejprve jako Classroom (s možností propojení s tzv. Google Classroom [7]).

GeoGebra Lesson umožnuje učiteli zadat úlohu pomocí přístupového kódu k předem připravené aktivitě se sérií úloh, sledovat v reálném čase práci studentů a jejich řešení zaznamenat. Dovede přispět k vedení distanční hodiny, nebo k prezenční výuce, při které studenti používají výpočetní techniku. Toho bylo využito ve studii s názvem How the students chased perpendicular lines in GeoGebra Classroom, jejíž výsledky byly prezentovány na konferenci *12th Congress of European Research in Mathematics Education* (*CERME-12*; [18]). Zúčastněnými participanty bylo 19 studentů 9. třídy základní školy v blízkosti krajského města České republiky, kteří pracovali na dotykových tabletech během jedné prezenční hodiny matematiky ve druhém pololetí školního roku 2020/21. Měli tedy prodiskutovanou většinu témat rovinné geometrie základní školy, ovšem s dynamickou geometrií dosud pracovali spíše sporadicky.

Jako pracovní prostředí byla zvolena plocha, GeoGebra applet pro rovinnou geometrii, s omezenými nástroji. Studenti v ní mohli využít pouze *ukazovátko*, *bod*, *průsečík*, *úsečku*, *polopřímku*, *přímku*, *kružnici danou středem a bodem*, *kružítko* a nástroj *zrušit* (smazat), tedy mohli komponovat obrazce složené z kružnic a přímek, resp. jejich částí. Byli požádáni, aby na pracovní plochu samostatně sestrojili dvě navzájem kolmé přímky, následně konstruovali kolmice ještě jinou metodou a na závěr zkusili tvořivě sestrojit přímky svírající pravý úhel ještě třetím způsobem.

Předložená úloha nevyžadovala konstrukce kolmých přímek v jisté specifické poloze, neurčovala způsob řešení a měla více správných výsledků. Odpovídala tedy tzv. otevřenému přístupu k matematickému vzdělávání [9]. Omezeností nástrojů v GeoGebra appletu navíc vyžadovala po studentech tvořit pro ně v nestandardním prostředí a uplatnit řešitelské postupy lišící se od metod používaných pro rutinní úlohy. Umožnila tedy identifikovat náročnější myšlenkové operace studentů. Jejich řešení byla zaznamenána v GeoGebra Lesson a analyzována s cílem zodpovědět otázku: *Jaké metody řešení studenti vytvoří, pokud mají vícekrát konstruovat kolmé přímky pomocí přímek a kružnic v GeoGebra Lesson?*

Před rozborem výsledků jsme sami vymezili osm základních strategií konstrukce kolmých přímek. Dvě z nich jsme s přístupy participantů ztotožnili. V prvním případě se jednalo o sestrojení osy úsečky označené jako PL1 (OBRÁZEK 2a), tedy přímky kolmé na jistou úsečku procházející jejím středem. Ve druhém případě byla konstrukce založena na Thaletově větě, byla pojmenována PL9 (OBRÁZEK 2c).



OBRÁZEK 2. Tři konstrukční strategie v řešeních studentů; převzato z [18]

Ve studentských řešeních se však objevila ještě nová, v našem seznamu neobsažená metoda. Při finálním číslování konstrukcí byla opatřena zkratkou PL5 (OBRÁZEK 2b). Byla postavena na tvorbě rovnostranných trojúhelníků a vlastnostech trojúhelníkové mříže. Celkem tedy byly rozlišeny tři různé metody konstrukce kolmic, které jsou odpovědí na položenou otázku v našem šetření.

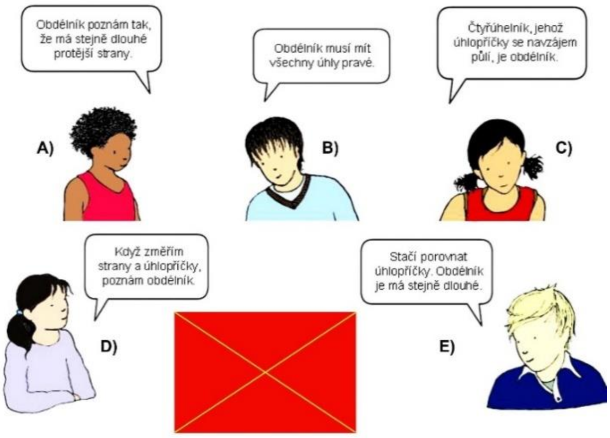
Přestože prezentovaná studie pracovala pouze s malým počtem participantů, kterým předložila pouze jednu úlohu řešenou různými způsoby, naznačila minimálně dva podnětné závěry. První z nich potvrzuje význam otevřeného přístupu k matematickému vzdělávání, který inspiruje studenty k tvořivosti. To koresponduje s identifikovanými různými strategiemi v jejich řešeních a zejména s objevením nové strategie PL5. Druhý závěr vychází z podoby GeoGebra appletu předloženého studentům, který oproti běžné praxi při konstrukčních úlohách neobsahuje nástroje pro přímou tvorbu kolmých nebo rovnoběžných přímek, naopak žádá vytvoření kolmic pouze pomocí elementárních objektů. Představuje tedy nestandardní prostředí pro řešitele. Ukazuje se, že takové nastavení evokuje vyšší úroveň matematického uvažování, které není aplikací předem osvojeného postupu pro jistý typ úlohy. Limitací naší studie je absence vyjádření studentů ke svým řešením, které by jejich uvažování představilo a vysvětlilo. Na něj jsme se proto zaměřili v dalším šetření, které bylo cílené na vlastnosti čtyřúhelníků. Výše ukázaná metoda PL1 totiž společně s osou úsečky konstruuje vrcholy kosočtverce, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé, a metoda PL9 vedle Thaletovy kružnice souvisí ještě s vlastnostmi úhlopříček obdélníku (OBRÁZEK 2a,c, spodní část).

3. OBDÉLNÍK POHLEDEM METODY CONCEPT CARTOON

Obdélník patří k jedněm ze základních geometrických útvarů diskutovaných již od nejnižších ročníků vzdělávání. V rámci matematiky prvního stupně základní školy představuje čtyřúhelník s pravými vnitřními úhly, protějšími stranami rovnoběžnými a stejně dlouhými a se sousedními stranami různé délky, aby byl odlišen od čtverce. Na druhém stupni je chápán jako jeden z rovnoběžníků rozlišovaných podle vlastností stran, úhlů nebo úhlopříček. Lze jej chápat jako čtyřúhelník s pravými vnitřními úhly. Pokud má navíc shodné sousední strany, je čtvercem jako jeho speciálním případem. Podle vlastností úhlopříček je jeho speciálním případem čtverec tak, jak je naznačeno dynamickou konstrukcí výše (OBRÁZEK 1).

Čtyřúhelníky je tedy možné uvažovat jako navzájem oddělené jedinečné objekty, nebo jako prvky skupiny tříděné podle vlastností čtyřúhelníků. První přístup odpovídá tzv. parciální klasifikaci těchto útvarů, druhý jejich hierarchickému rozlišování (v angličtině partition and hierarchical classification of quadrilaterals; [3], [6]).

Na přístupy ke třídění čtyřúhelníků jsme se zaměřili v práci Observing how future primary school teachers reason about quadrilaterals představené na konferenci *18th International Conference Efficiency and Responsibility in Education* [17]. Jako diagnostický nástroj jsme zvolili tzv. Concept Cartoon [2], [12], otevřenou úlohu, ve které děti na obrázku reagují na jistou situaci vyjádřeními v komiksových bublinách. V našem případě reagovaly na obdélník (OBRÁZEK 3). Účastníky šetření bylo 29 budoucích učitelů 1. stupně základní školy, studentů 2. ročníku příslušného magisterského vysokoškolského oboru v České republice. Byli požádáni, aby označili komiksové bubliny, které podle nich obsahují pravdivá tvrzení o obdélníku, a vysvětlili svoji volbu. Participanti svá řešení psali na listy s vytištěným Concept Cartoon.



OBRÁZEK 3. Concept Cartoon o obdélníku; obrázky dětí s bublinami převzaty z [2], texty bublin převzaty z [11]

Obdržená studentská vyjádření jsme rozlišovali s cílem odpovědět na otázku: *Jaké úvahy o čtyřúhelnících lze pozorovat u budoucích učitelů prvního stupně základních škol při užití Concept Cartoons jako diagnostického nástroje?* Zaměřili jsme se přitom na bubliny A), C) a E), které obsahují pravdivá tvrzení o obdélnících. Neurčují ovšem tento čtyřúhelník jednoznačně. Bubliny A), C) jsou platné pro všechny rovnoběžníky, bublina E) je pravdivá pro všechny čtyřúhelníky s úhlopříčkami stejné délky.

V řešeních participantů byly identifikovány a kategorizovány úvahy, které odpovídaly oddělenému chápání čtyřúhelníků (partition classification), obsahovaly chybná geometrická vyjádření nebo ukazovaly na protipříklady vyvracující pravdivost bublin. Také však obsahovaly základy dobrého deduktivního usuzování, které upozorňovalo na existenci ještě dalších čtyřúhelníků majících dané vlastnosti, a tedy korespondovalo s hierarchickým pojetím těchto objektů (hierarchical classification). Na ukázku citujme reakce jistého řešitele na bubliny C) a E):

C) Pokud znázorníme obě úhlopříčky, vzniknou 4 rovnoramenné trojúhelníky. Pozor: také ve čtverci, kosočtverci a kosodélníku se úhlopříčky půlí

E) Úhlopříčky rozdělí obdélník na dva shodné trojúhelníky. Pozor: také ve čtverci jsou úhlopříčky shodné.

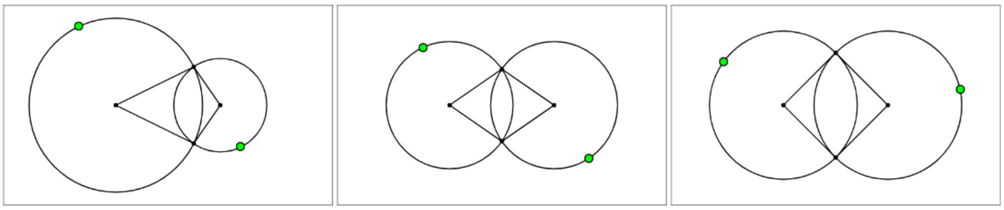
4. ČTYŘÚHELNÍKY V DYNAMICKÝCH KONSTRUKCÍCH

V tomto šetření jsme geometrické konstrukce v dynamickém prostředí propojili se studiem uvažování o čtyřúhelnících a jejich vlastnostech. Celkem 20 studentům 8. ročníku základní školy nedaleko krajského města České republiky jsme během jedné vyučovací hodiny matematiky předložili sérii šesti dynamických konstrukcí. Pojmenovali jsme ji *Který čtyřúhelník je sestrojen?*, a zasadili do appletů rovinné geometrie v GeoGebra Lesson. Konstrukce byly připraveny pomocí přímek, jejich částí a kružnic, obsahovaly volné, zeleně označené body a umožňovaly zobrazovat kroky vedoucí k jejich podobě. Byly uvedeny textem: *Na obrázcích níže jsou sestrojené různé čtyřúhelníky. O které se jedná? A z jakého důvodu? Prostudujte konstrukce obrazců, zelenými body pohybujte a sledujte změny. Projděte také konstrukční kroky a pozorujte vznik obrazců.*

Pod každým appletem byli participanti vyzváni k určení čtyřúhelníku vyskytujícího se v konstrukci a k slovnímu zdůvodnění svého rozhodnutí. Svá řešení psali na dotykových tabletech do odpovědních polí otázek v GeoGebra Lesson (viz on-line dostupnou aktivitu https://www.geogebra.org/m/bsanmp9q).

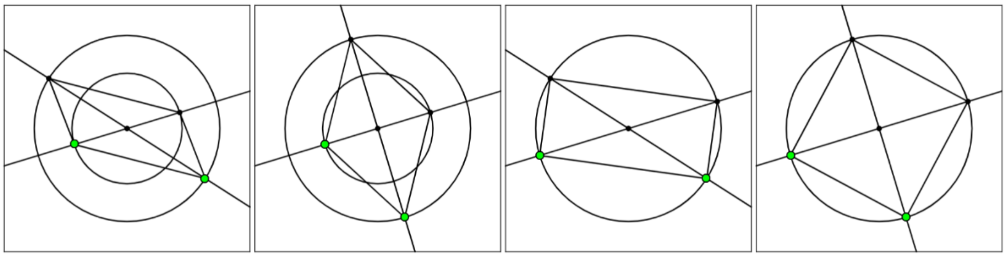
Záměrem našeho šetření bylo zjistit: *Jakou povahu geometrického uvažování lze odhalit při použití série dynamických konstrukcí čtyřúhelníků jako základu pro zadávání nestandardních úloh studentům druhého stupně základní školy?* Výsledky jsme prezentovali a diskutovali v časopiseckém příspěvku Investigating how lower secondary school students reason about quadrilaterals emerging in dynamic constructions [20].

Při analýze studentských prací jsme z celé série šesti úloh vybrali tři. Čtyřúhelníky z první z nich ukazujeme a poznámkami doplňujeme výše, viz OBRÁZEK 1. Níže zařazujeme OBRÁZEK 4 a tím představujeme applet druhé dynamické konstrukce. Obsahuje dvě kružnice určené jistými středy a procházejícími zelenými body volně se pohybujícími v nákresně. Středy kružnic společně s jejich průsečíky tvoří vrcholy čtyřúhelníku. Při změně polohy zelených bodů, resp. změně poloměrů kružnic, jsou modelovány deltoid, kosočtverec a čtverec, přitom všechny tyto čtyřúhelníky mají sousední strany stejné délky shodné s poloměrem příslušné kružnice.



OBRÁZEK 4. Deltoid, kosočtverec a čtverec v dynamické konstrukci; převzato z [20]

Kosodélník, kosočtverec, obdélník a čtverec představují všechny rovnoběžníky, které byly společně s jejich vlastnostmi a hierarchií participanty diskutovány v matematice předchozího 7. ročníku. Jsou to čtyřúhelníky, jejichž úhlopříčky se půlí. Ve třetí analyzované dynamické konstrukci to bylo zajištěno pomocí dvou soustředných kružnic procházejících zelenými body. Obrázek 5 ukazuje vznik těchto útvarů i jejich podoby.



OBRÁZEK 5. Různé rovnoběžníky vymodelované v dynamické konstrukci; převzato z [20]

V průběhu školních let se mění a vyvíjí geometrické myšlení studentů, jejich konceptuální porozumění objektům a zdůvodňování v matematice. Van Hiele [16] rozlišuje k tomu pět úrovní, které mohou být nazvány a charakterizovány jako: 1 – rozpoznání (identifikování a pojmenování geometrických objektů), 2 – analýza (určení vlastností objektů), 3 – uspořádání (třídění objektů podle jejich vlastností), 4 – dedukce (zdůvodňování vlastností objektů) a 5 – rigoróznost (abstraktní uvažování plynoucí z axiomatického zavedení geometrie). Simon a Blume [14] vymezují pět úrovní argumentace v matematice: 0 – reakce dokládající motivaci, ale nezabývající se zdůvodněním, 1 – prohlášení o platnosti matematických tvrzení odvolávající se na vnější autoritu, 2 – vysvětlení podaná na základě empirie, 3 – deduktivní argumentace založená na konkrétních příkladech nebo protipříkladech a 4 – obecná deduktivní argumentace nezávislá na konkrétních případech.

K odpovědi na otázku našeho šetření poznamenáme, že geometrické uvažování nabývalo u sledované skupiny participantů rozličných podob. Z pohledu různých úrovní argumentace v matematice přecházelo od projevu motivace pro ni, přes odkazy na vnější autoritu při zdůvodňování a různá empirická pozorování až k deduktivnímu usuzování podpořenému zejména příklady a protipříklady [14]. Z perspektivy úrovní geometrického myšlení korespondovala vyjádření studentů s rozpoznáváním objektů, dále s určováním jejich vlastností a konečně tříděním podle jejich charakteristik, celkově tedy s první, druhou a třetí van Hieleho úrovní [16].

Některá vyjádření obsahovala explicitní odkazy na dynamické modifikace s objekty. Doložme to ukázkou odpovědi na zadané otázky jistého participanta v první úloze se čtvercem a obdélníkem:

> Čtverec a obdélník. Čtverec, protože když to správně nastavíme, tak jsou úhlopříčky na sebe kolmé. Obdélník, protože když se to zase správně nastaví, tak se protínají ve středu úhlopříčky a nejsou na sebe kolmé.

Někteří účastníci studie si všímali společných vlastností čtyřúhelníků, které konstrukce zajišťovaly, a tyto objekty vyjmenovali. Určili tedy skupinu útvarů jisté charakteristiky plynoucí z podoby dynamického modelu [5]. Zároveň naznačili své porozumění hierarchické klasifikaci čtyřúhelníků [3], i když explicitně ji nezmínili nebo nerozlišili mezi sebou jednotlivé čtyřúhelníky podle jejich vlastností. Následuje citace reakce jistého studenta ze třetí úlohy:

> Kosodélník, kosočtverec, obdélník, čtverec – úhlopříčky se půlí, protější strany jsou stejně dlouhé a rovnoběžné

V otázce našeho šetření citované výše zmiňujeme, že určování čtyřúhelníků objevujících se v dynamických konstrukcích představovalo pro participanty nestandardní výzvu. Bylo to z toho důvodu, že do jejich hodin matematiky věnovaných rovinné geometrii sice byla zařazena práce v prostředí GeoGebra, avšak pouze nahodile a bez zadání identifikovat dynamicky se proměňující objekty. Tyto okolnosti společně s obdrženými studentskými řešeními naznačují dva možné závěry celé studie. Zaprvé, v reakcích participantů byla identifikována řada zajímavých argumentačních postřehů, které ukazují na potenciál dynamických konstrukcí pro rozvoj deduktivního uvažování v geometrii a přechod na vyšší úrovně myšlení v tomto oboru. Zadruhé, v řešeních se objevila neúplná tvrzení, na která by bylo možné během výuky konkrétně reagovat a přispět tím ke zlepšení argumentačních dovedností studentů. Naše studie tedy ukázala, jakým způsobem může ke vzdělávání přispět určitá podoba úloh předložená v dynamické geometrii [13].

5. Studenti hodnotí využívání dynamické geometrie

Na závěr představme studii, během které jsme pracovali s participanty delší dobu. Pro 7. ročník základní školy nedaleko krajského města České republiky jsme připravili sérii 10 po sobě jdoucích vyučovacích hodin matematiky, věnovali jsme ji čtyřúhelníkům a v souladu s tematickým plánem jsme ji realizovali v květnu roku 2022. Zúčastnila se jí jedna třída o 25 studentech.

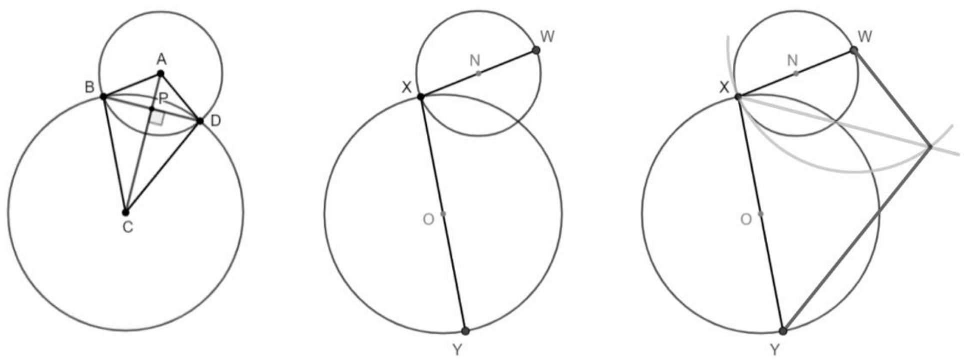
Z perspektivy klasifikace čtyřúhelníků jsme směřovali k hierarchickému porozumění těmto útvarům a jejich třídění do skupin podle společných vlastností. K naplnění takového cíle jsme připravili aktivity různého druhu. Se studenty jsme rýsovali čtyřúhelníky na papír pomocí pravítka a kružítka, vyznačovali je ve čtvercové a trojúhelníkové mříži [1] a diskutovali jejich vlastnosti. Studentům jsme předkládali pracovní listy s připravenými kompozicemi přímek a kružnic, ve kterých čtyřúhelníky identifikovali.

Analogické aktivity jsme zasadili do dynamické geometrie, v polovině hodin jsme studentům zadávali úlohy v prostředí GeoGebra Lesson. Jednalo se o konstrukční úlohy a o problémy podobné těm ve výše představené studii [20]. Studenti během nich pracovali na dotykových tabletech. K řadě úloh mohli přistoupit tvořivým způsobem, mohli je řešit různými metodami, čímž jsme cílili na rozvoj jejich flexibility [10]. Stručný pohled na obsah série hodin podáváme níže (Tabulka 1), témata a aktivity přitom doplňujeme odkazy na literaturu a ilustracemi (Obrázek 6, Obrázek 7).

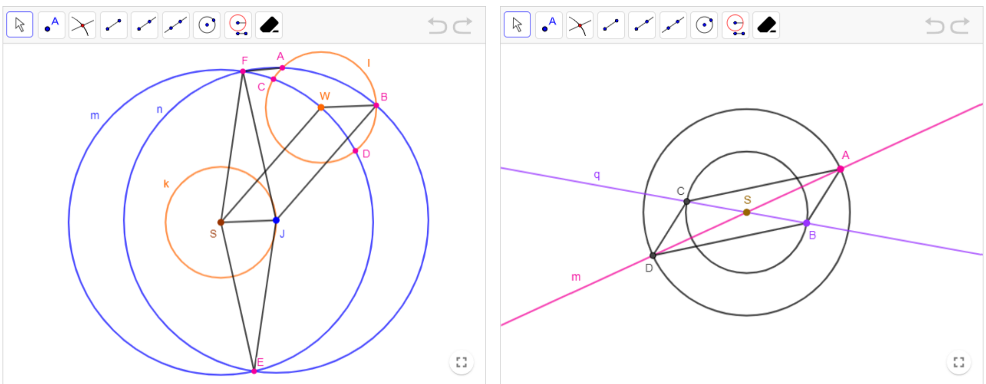
Tabulka 1: Přehled hodin o čtyřúhelnících

hodina	Témata a aktivity
1	Úvod, čtyřúhelníky jako jedinečné útvary, opakování poznatků z předchozích ročníků [3], vlastnosti stran a úhlů čtyřúhelníků, práce v GeoGebra Lesson ve čtvercové a trojúhelníkové mříži [1]
2	Součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníků, rýsování čtyřúhelníků na papír pomocí pravítka a kružítka, zadání úloh vázána na vlastnosti stran a úhlů čtyřúhelníků, představení deltoidu

3	Volné a vázané objekty v dynamické geometrii GeoGebra, konstrukce čtyřúhelníků ve čtvercových a trojúhelníkových mřížích [1], objevování pojmu rovnoběžník [6]
4	Sestrojení čtyřúhelníků na základě posloupnosti konstrukčních kroků do předem připravených pracovních listů, rýsování na papír pomocí pravítka a kružítka
5	Vlastnosti úhlopříček čtyřúhelníků, studium dynamických modelů v GeoGebra Lesson, opsaná a vepsaná kružnice čtyřúhelníku
6	Konstrukce čtyřúhelníků prováděné různými způsoby [10], rýsování čtyřúhelníků na papír pomocí pravítka a kružítka, identifikování čtyřúhelníků v připravených konstrukcích na papíře [4], ukázka: Obrázek 6
7	Opakování vybraných úloh předchozí 6. hodiny v GeoGebra Lesson, ukázka: Obrázek 7
8	Hierarchická klasifikace čtyřúhelníků [3], diskuze o vlastnostech těchto útvarů
9	Identifikování čtyřúhelníků v připravených dynamických konstrukcích v GeoGebra Lesson, skupiny čtyřúhelníků mající jisté vlastnosti [6], [5]
10	Závěr, zpětná vazba



OBRÁZEK 6. Různé konstrukce deltoidu, rýsování na připravený pracovní list pomocí pravítka a kružítka; převzato z [19]



OBRÁZEK 7. Různé konstrukce rovnoběžníků, tvorba v GeoGebra Lesson; převzato z [19]

V závěrečné hodině studenti vyplňovali pracovní list, ve kterém vyjadřovali svoji zpětnou vazbu. Odpovídali na otevřené a uzavřené otázky, určovali, který čtyřúhelník je nejvíce zaujal, co upoutalo jejich pozornost na čtvercových a trojúhelníkových mřížích, na geometrických konstrukcích nebo na různých metodách řešení úloh. Vyjadřovali se také k diskutované hierarchii čtyřúhelníků, k jejich vlastnostem nebo celkově k uplynulým hodinám matematiky.

Obdrženou zpětnou vazbu jsme analyzovali s cílem zodpovědět otázku: *Jak studenti druhého stupně základní školy reflektují své dvoutýdenní zkušenosti se čtyřúhelníky založené na dynamické geometrii?* Výsledky jsme představili v práci Lower secondary school students reflecting their two-week experience with quadrilaterals and GeoGebra během konference *13th Congress of European Research in Mathematics Education* (*CERME-13*; [19]).

Představme alespoň jeden podnětný výsledek. Během desetihodinové série jsme se studenty účelně pracovali v systému GeoGebra, porovnávali jsme toto prostředí s klasickým rýsováním na papír a diskutovali jsme se studenty objekty proměňující se v dynamických konstrukcích. V jejich zpětné vazbě však byla zdůrazněna geometrická témata, charakter předložených úloh nebo možnost je řešit různými způsoby. Explicitní odkazy na práci v dynamické geometrii se ve vyjádřeních studentů nevyskytly.

ZÁVĚR

Studie představená jako poslední naznačila, že dynamická geometrie může být situována do pozadí ve výuce matematiky, může hrát vedlejší roli v interakci mezi pedagogy a studenty a přitom podněcovat vzdělávání způsobem, který je pouze obtížně proveditelný při statické tvorbě tužkou na papír. Umožňuje totiž propojit oddělené geometrické objekty do skupin dynamických tvarů, upozornit uživatele na jejich společné vlastnosti a nikoliv upoutat primárně pozornost „na sebe“, na digitální prostředí.

V appletech rovinné dynamické geometrie je možné připravit konstrukce, které svojí podstatou zcela odpovídají klasickým eukleidovským postupům, tedy mohou být dobře srozumitelné studentům, kteří mají zkušenosti s rýsováním tužkou na papír pomocí pravítka a kružítka. Proti němu však takové dynamické konstrukce umožňují zpětné modifikace obrazců, čímž podporují diskuzi o jejich podstatě a v důsledku schopnost tvořivě konstruovat i nestandardně zadané úlohy.

Dynamickou geometrii v matematice základní školy lze účelně propojit i s jinými prostředími, například s metodou Concept Cartoon. Její využívání bude účelné, pokud bude kriticky hodnoceno. Z našich studií a z literatury totiž neplyne, že dobré vzdělávání je předem zajištěno použitím programů GeoGebra, Sketchometry nebo dalších. Dobré vzdělávání podpoří dobře zadané úlohy, které zvýrazní geometrická témata a nikoliv digitální programy jako takové.

Poděkování. Autor děkuje za podporu Komisi J. Williama Fulbrighta a za spolupráci Jonu R. Starovi z Harvardovy univerzity a Libuši Samkové z Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích.

LITERATURA

[1] Cachová, J., & Vízek, L. (2021). Řešení úloh ve čtvercové a trojúhelníkové mříži pohledem GeoGebra Classroom. *South Bohemia Mathematical Letters, 29*(1), 13–19.

[2] Dabell, J., Keogh, B., & Naylor, S. (2008). *Concept Cartoons in Mathematics Education*. Millgate House Education.

[3] de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 11–18. https://www.jstor.org/stable/40248098

[4] Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103−131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

[5] Forsythe, S. K. (2015). Dragging maintaining symmetry: can it generate the concept of inclusivity as well as a family of shapes? *Research in Mathematics Education*, *17*(3), 198–219. https://doi:10.1080/14794802.2015.1065757

[6] Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, *9*(1), 3–20. https://doi.org/10.1080/14794800008520167

[7] GeoGebra. (2024). GeoGebra. https://www.geogebra.org

[8] Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic geometry systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 163–185. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282

[9] Pehkonen, E. (Ed.) (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. University of Helsinki.

[10] Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology*, *82*(3), 436−455. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02037.x

[11] Roubíček, F. (2014). *Soubor čtyř kreslených geometrických Concept Cartoon pro hodnocení znalostí budoucích učitelů základních škol*. Interní materiál, nepublikováno.

[12] Samková, L. (2020). *Metoda Concept Cartoons*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

[13] Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education, 48*, 691–719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

[14] Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(1), 3–31. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90036-X

[15] Švaříček R., & Šeďová, K. (2007). *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Portál.

[16] van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight*. Academic Press.

[17] Vízek, L., & Samková, L. (2021). Observing how future primary school teachers reason about quadrilaterals. In J. Fejfar, & M. Flégl (Eds.). *Proceedings of the 18th International Conference Efficiency and Responsibility in Education* (pp. 159–167). Czech University of Life Sciences Prague.

[18] Vízek, L., & Samková, L. (2022). How the students chased perpendicular lines in GeoGebra Classroom. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 2889–2896). Free University of Bozen-Bolzano, Italy and ERME.

[19] Vízek, L., & Samková, L. (2023). Lower secondary school students reflecting their two-week experience with quadrilaterals and GeoGebra. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 829–836). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

[20] Vízek, L., Samková, L., & Star, J. R. (2023). Investigating how lower secondary school students reason about quadrilaterals emerging in dynamic constructions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2255184

KATEDRA MATEMATIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITA HRADEC KRÁLOVÉ
HRADEC KRÁLOVÉ, ČESKÁ REPUBLIKA
E-mail address: lukas.vizek@uhk.cz