

GEOGEBRA A SYNTETICKÉ ŘEŠENÍ GEOMETRICKÝCH PROBLÉMŮ

JIŘÍ BLAŽEK

ABSTRAKT. Dynamická Geometrie (DGE) představuje model Euklidovské geometrie, který, díky své názornosti, usnadňuje studentům porozumění. DGE ale také může představovat významnou pomoc při procesu řešení geometrické úlohy. Tento článek prezentuje výzkum, který se zabýval otázkou, jak „náročné“ (s ohledem na studentův důvtip a matematické znalosti) je objevit s pomocí softwaru relevantní fakta,. Bylo zjištěno, že u většiny faktů, která studenti objevili, byly nástroje softwaru vedeny konkrétní úvahou a na základě teoretických znalostí.

ÚVOD

Je obecně přijímáno, že vhodné začlenění softwaru dynamické geometrie (DGE) zlepšuje výuku na všech stupních vzdělávacího procesu – od základních škol po univerzity. DGE poskytuje model abstraktního geometrického světa a tím usnadňuje jeho chápání. Hlavní výhody softwaru při výuce geometrie můžeme rozdělit do tří kategorií:

- Přesnost konstrukce je mnohem lepší, než by student dokázal při sebezpřesnějším rýsování. Navíc software dokáže zobrazit i takové konstrukce, které by bez něj byly nerealizovatelné (typickým příkladem mohou být konstrukce v prostoru).
- Software je dynamický. Význam tohoto rysu rozebírá např. článek [1]. Student nemusí uvažovat pouze nad konkrétním případem konstrukce, ale může ji měnit. Díky tomu je snazší přejít od konkrétního k obecnému. Některé články poukazují na to, že díky dynamičnosti lze v určitých případech odhalit logickou závislost závěru teorému na jeho předpokladech.
- Možnost prozkoumávání problému s pomocí nástrojů softwaru. Možnost experimentovat a „hrát si“ s problémem.

Výše uvedené faktory usnadňují nejenom chápání geometrické látky, ale měly by usnadňovat i hledání řešení problému. Způsob, jak pomoc softwaru na obecné úrovni funguje, je popsán v několika kvalitativních studiích (např. [2]). Obvykle student díky softwaru objeví nějakou domněnku, která souvisí s řešením problému. Objev domněnky může mít různé funkce – od pouhého ujištění, že nějaký fakt je pravdivý až po objev relevantního tvrzení, které studenta předtím nenapadlo.

Tento článek se zabývá otázkou, jakým způsobem je možné objevit domněnku s podporou softwaru, a to ve dvou rovinách: „teoretické“ a „praktické“. Teoretická rovina obsahuje obecný popis způsobů, které můžou vést subjekt k objevu domněnky

Received by the editors: 15.12.2025

2020 Mathematics Subject Classification: 97G40, 97D50

Keywords and phrases: GeoGebra, řešení problémů, geometrie, pomoc softwaru.

s podporou softwaru. Praktická rovina pak obsahuje výsledky výzkumu prezentovaného v dizertaci [3]. Tohoto výzkumu se účastnili budoucí učitelé matematiky a jeho snahou bylo zmapovat konkrétní způsoby nalezení relevantních domněnek s podporou softwaru v reálných situacích (s ohledem na teoretický model) a jaké strategie studenti obvykle využívají. Otázky, kterými se zabývá tento článek, znějí: Teoretická otázka.

- Jak lze na obecné úrovni popsat způsoby objevu hypotéz v prostředí DGE s ohledem na řešitelovy argumenty, které objev hypotézy doprovázejí?

Výzkumné otázky.

- I. Jak výrazně se na objevu domněnky podílí řešitelovy znalosti a logické uvažování – jinými slovy, může být objev domněnky spíše výsledkem „náhody“ (např. vizuálního vnímání) nebo je obvykle výsledkem nějaké strategie, jejíž relevanci je možné podpořit konkrétními argumenty?
- II. Jaké mohou být důvody, proč student objeví domněnku snáze se softwarem než bez něj?

V tomto článku se pokusíme načrtnout odpovědi na tři výše položené otázky. Jak už bylo řečeno, jedná se o závěry publikace [3], které jsou pro účely článku vhodně zkráceny.

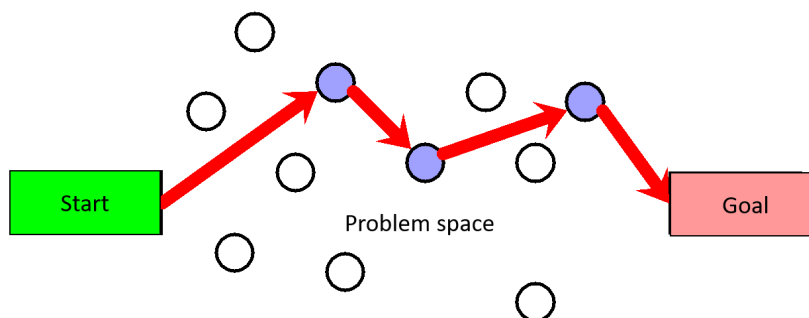
Struktura článku je následující: Nejprve uvedeme obecný popis pomoci softwaru při řešení problému (1. sekce). Další sekce poskytne teoretický rámec, který slouží jako odpověď na první z výše uvedených otázek. Poté uvedeme výsledky výzkumu provedených na studentech učitelství matematiky (4. sekce). Tato data jsou použita k zodpovězení zbylých dvou otázek. Nakonec v Závěru shrneme výsledky, jejich interpretaci, uvedeme limity výzkumu a další možné otázky.

1. V ČEM SPOČÍVÁ POMOC SOFTWARE?

Podle teorie problémového prostoru [4] při řešení problému prochází subjekt různými stavy znalostí o problému. Začíná v jistém základním stavu, ten postupně rozšiřuje a doufá, že nakonec dosáhne stavu cílového. Stavy mezi počátkem a cílem problému se mohou nazývat různě – lemmata, pomocné věty atd. Pokud tyto věty deduktivně dokážeme, můžeme je využít v dalších úvahách. Většinou však nemáme úplnou jistotu, zda lemma, které jsme právě objevili, skutečně lze využít v důkazu teorému. To se obvykle ukáže až v momentě, kdy dosáhneme cíle. Tato lemmata zde budeme nazývat trochu nepřesně „domněnkou“ nebo „hypotézou“.

Celý proces řešení geometrické úlohy vystihuje „zjednodušený Toulminův model“ (simplified Toulmin's Model, viz [5]). Ten vychází z představy, že důkaz matematického problému lze chápat jako sekvenci deduktivních kroků od premis přes přechodná tvrzení až k tvrzení, které se má dokázat. Během procesu řešení mají tato přechodná tvrzení obvykle podobu nedokázané hypotézy. Řešitel se snaží objevit vhodné hypotézy a lemmata, s jejichž pomocí hledá cestu v rámci problémového prostoru, která propojuje předpoklady úlohy s jejím závěrem. Celá situace je znázorněna na následujícím obrázku (obr. 1). Úkolem řešitele je 1) objevit řetězec hypotéz, který souvisí s řešením, 2) hypotézy zdůvodnit, logicky je propojit a dát důkazu deduktivní formu. Proces tedy může být rozdělen do dvou fází: Fáze vytváření domněnek a poté fáze konstrukce důkazu.

Pokud je subjekt při řešení problému odkázán pouze na „papír a tužku“, musí v průběhu první fáze spoléhat zejména na svůj důvtip a znalosti. Jestliže však



OBRÁZEK 1. V rámci problémového prostoru dané úlohy může řešitel přijít na mnoho hypotéz a tvrzení. Ne všechny lze ale v důkazu využít, subjekt musí nalézt cestu, která propojuje předpoklady se závěrem. Kroužky na obrázku představují tvrzení a lemmata, které se nacházejí “někde mezi” předpoklady a závěrem.

může používat nástroje DGE softwaru, stává se produkce relevantních domněnek mnohem snazší, protože mnoho otázek, které subjekt formuluje, může zodpovědět experimentálně a tak si výrazným způsobem usnadnit přechod od faktů k teoretickému zdůvodnění.

Případové studie (např. [6, 7]) ukazují, že proces důkazu začíná experimentálním průzkumem problému a končí jeho zdůvodněním.

V několika kvalitativních studiích se jejich autoři pokoušeli vymezit typické fáze práce studenta s DGE při řešení problému. V článku [2] je uveden velice obecný postup práce s DGE při řešení problému:

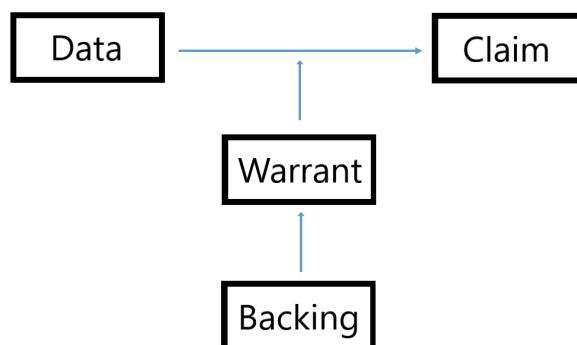
- (1) **Experimentální výsledky.** Problém zkoumáme empiricky s použitím softwaru.
- (2) **Postup k důkazu.** Identifikujeme klíčové části problému, logicky propojujeme empirická pozorování.
- (3) **Důkaz.** Z premis deduktivně odvodíme závěr.
- (4) **Případná zobecnění.** Otázky, co se stane, pokud od nějakého předpokladu zadání upustíme.

2. DRUHÝ ARGUMENTŮ, KTERÉ PŘEDCHÁZÍ OBJEVU DOMNĚNKY V DGE

Naším cílem v této sekci je popsat různé kategorie nebo důvody, do kterých by bylo možné zařadit studentovy akce v rámci softwaru, v závislosti na argumentaci, která studenta nebo studentku k těmto akcím motivovala. Tohoto tématu se dotkla Pedemonte v již zmíněném článku [5]. Snažila se v něm zodpovědět otázku, proč je někdy student schopen vytvořit validní důkaz a někdy ne. Jedna z odpovědí spočívá v tom, že v určitých případech může způsob objevu relevantní domněnky přispívat k jejímu důkazu a někdy tomu tak být nemusí. Jinými slovy, argumentace, která studenta dovedla k objevu domněnky, může být v některých případech použita k jejímu důkazu, v jiných ne. První případ se nazývá „kognitivní jednota“, druhý „strukturální propast“.

Ačkoli téma článku [5] úzce souvisí s použitím DGE, od tohoto článku se liší ve dvou ohledech: 1) závěry Pedemonte přímo nezávisí na tom, zda žák při řešení software používá nebo ne, zatímco my jsme zkoumali roli softwaru při hledání řešení problému 2) Pedemonte zkoumala závislost způsobu objevení domněnky a schopností studenta dokončit důkaz, naším cílem bylo popsat zejména způsob objevu domněnky v prostředí softwaru.

Pedemonte však zavedla do analýzy argumentace žáka „zjednodušený Toulminův model“. Jak bylo řečeno v předchozí sekci, proces důkazu je sekvencí tvrzení od premis přes přechodná tvrzení k závěru. Tato přechodná tvrzení mají obvykle zpočátku podobu nedokázané hypotézy. Abychom vzali nějaké tvrzení do úvahy, musí nás na něj něco navést, něco, co naznačuje jeho pravdivost. V Modelu tuto roli hraje takzvaný „**Warrant**“ (odůvodnění nebo záruka, svědčící pro pravdivost tvrzení). Další faktory, které v tomto modelu vystupují, jsou „**Data**“ (v matematickém kontextu empirická fakta, na jejichž základě lze formulovat hypotézy nebo verifikovat jejich pravdivost), „**Backing**“ („podpůrné argumenty tvrzení“, v našem kontextu je to exaktní matematické zdůvodnění), a již zmíněné „tvrzení“ neboli „**Claim**“ (tato tvrzení zpočátku mohou mít podobu hypotézy a nemusí být pravdivá).



OBRÁZEK 2. Zjednodušený Toulminův model

V článku [5] se objev hypotézy (ať už s podporou DGE nebo bez ní) rozděluje do dvou základních kategorií:

Objev domněnky není výsledkem argumentace. V takovém případě Pedemonte označuje objevenou domněnku jako „fakt“. Argumenty na podporu domněnky student hledá po jejím objevu a ty jsou označovány jako strukturální argumentace.

Objev domněnky je výsledkem argumentace, která jí předchází a která přispívá ke konstrukci domněnky. V takovém případě jsou subjektu známy nějaké důvody (být mohou mít jen heuristickou podobu), proč by domněnka měla platit. Pedemonte dále rozlišuje tři případy argumentace:

- Dedukce
- Abdukce (logická úvaha, která vychází z empiricky vypořádaných předpokladů)
- Indukce (klasická neúplná indukce, zobecňování)

Tato odůvodnění se pro naše účely staly základem pro různé kategorie argumentů, které mohou subjekt vést k objevu domněnek v prostředí dynamické geometrie.

2.1. Kategorie argumentů: Upravený Toulminův model (UTM). Cílem této sekce je stanovit kategorie argumentů, které mohou předcházet objevu relevantních domněnek v prostředí, které umožňuje experimentální průzkum problému, tzn. s asistencí softwaru DGE. Výchozím bodem je pro nás Toulminův Model prezentovaný výše, doplníme ho však o konkrétní kategorie odůvodnění, která mohou vést k objevu domněnek. Takto vytvořený model nazveme Upravený Toulminův Model (UTM)

Proces řešení problému se softwarem můžeme chápat jako dialog. Formulujeme otázku a software, pokud je tato otázka vhodně položena, nám ji zodpoví. Sekvenci „otázka-odpověď“ označíme slovem „experiment“. Hlavní rozdíl mezi prostředím papír-tužka a prostředím dynamické geometrie spočívá ve faktu, že zatímco v prvním případě musíme vedle otázky zformulovat i nějakou odpověď (hypotézu), kterou se následně snažíme ověřit, v prostředí dynamické geometrie nám stačí jenom vhodně položená otázka – odpověď (hypotézu) nám poskytne software.

Je tu další rozdíl: hypotéza, zformulována v prostředí papír-tužka, může být značně nejistá. Argumenty, které subjekt přivedly k formulaci této hypotézy, mohou mít jenom heuristickou povahu nebo se dokonce může jednat o hádání. Pak je na subjektu, aby se svoji hypotézu pokusil nějak ověřit nebo vyvrátit, což ho může stát značné množství času, pokud se mu to vůbec podaří. V softwaru DGE tato starost odpadá – subjekt během několika chvil může zjistit, zda je jeho domněnka pravdivá nebo ne. (Zdůrazněme, že empirická pravdivost domněnky a její dokazatelnost v rámci matematické teorie jsou dvě různé věci.) Čím méně si je subjekt jist svojí domněnkou, tím přínosnější jsou pro něj nástroje softwaru, které mu k rozhodnutí pomohou.

Tyto dva faktory představují hlavní rozdíl mezi klasickým a softwarovým prostředím. Hlavním kritériem, které utváří kategorie UTM, je povaha argumentů, které subjekt vedou k formulování otázky (kterou v DGE zkoumá) nebo hypotézy (kterou se snaží verifikovat). Tyto argumenty jsou rozdělovány podle toho, do jaké míry se na nich podílí řešitelova úvaha (důvtip, zkušenosti, znalosti) a do jaké míry je výsledkem mechanických procesů (vizuálního vnímání, náhody).

V rámci UTM rozlišujeme tři základní způsoby, které mohou vést k objevu hypotézy (tvrzení). První z nich, který nazýváme „konstruktivní argumentace“, je analogií deduktivního odůvodnění klasického TM. Druhý způsob je objev faktu na základě vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce. Třetí způsob je získání faktu pomocí experimentu, který subjekt nějakým způsobem vymyslí a realizuje. Na základě okolností, které subjekt k provedení experimentu vedly, rozlišujeme konstruktivní, heuristický a náhodný experiment. Jednotlivé případy modelu podrobně rozvedeme.

- (1) Objevení faktu pomocí úvahy. Tento případ nazveme „konstruktivní argumentace“.

Do této kategorie se řadí dedukce a abdukce. Subjektu jsou známy nějaké logické argumenty, opírající se o matematickou teorii, které platnost podporují domněnky. Tyto logické argumenty většinou mají deduktivní podobu, ale předpoklady, ze kterých vycházejí, nemusí být dokázané v matematickém smyslu, mohou být pouze pravdivé v empirickém smyslu (abdukce). Role softwaru se omezuje na dvě oblasti: 1) Získání předpokladů (nebo obecněji dat) pro tuto úvahu. 2) Verifikace objeveného faktu.

- (2) Objev faktu na základě vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce. Měníme konstrukci (víceméně náhodně) a pozorujeme důsledky. Podvědomě hledáme invarianty nebo vzory, které konstrukce má. Náčrtek a vizuální vnímání je neodmyslitelnou částí řešení téměř všech geometrických úloh. Je však rozdíl mezi náčrtem, který usnadňuje pochopení problému tím, že ulehčuje pracovní paměti (nemusíme si pamatovat vše najednou, ale stačí se na to „kouknout“) a náčrtem, díky kterému objevíme na základě vizuálního vnímání úplně nový fakt, který nás předtím nenapadl. První případ je zcela běžný, druhý je – zejména ve středoškolské a vysokoškolské geometrii – mnohem vzácnější.

- (3) Objev faktu s pomocí experimentu.

Experimentem myslíme každou akci řešitele v rámci softwaru, která přesahuje pouhé vizuální vnímání. V tomto případě řešitel s pomocí nástrojů softwaru zkoumá konstrukci, ale více sofistikovaně než jen pouhým pohledem na pohybující se konstrukci. Elementárním příkladem může být nástroj měření: Student změří dvě úsečky, aby zjistil, zda mají stejnou délku. Komplikovanějším příkladem může být modalita „guided dragging“, v níž student upraví konstrukci tak, aby měla jistý tvar. K provedení experimentu mohou vést řešitele dva různé důvody:

a) Subjekt se experimentálně snaží zodpovědět nějakou otázku.

b) Subjekt se snaží potvrdit správnost své hypotézy.

V prvním případě subjekt může získat experimentem data, která buď neočekával (jsou pro něj úplně nová), anebo pro jejichž platnost neměl žádné matematické argumenty. V druhém případě subjekt hypotézu zformuloval předem, tedy ho k ní dovedla nějaká argumentace, a software byl použit jako prostředek verifikace.

Podle povahy argumentů, na jejichž základě subjekt zformuloval domněnku (kterou ověřuje) nebo otázku (na níž hledá odpověď) rozlišujeme konstruktivní, heuristický a náhodný experiment.

A) *Konstruktivní experiment*. Rozlišujeme dva případy. 1) Subjekt hledá odpověď na určitou otázku, jejíž relevanci vzhledem k řešení problému dokáže podpořit konkrétními argumenty. 2) Subjekt ověřuje domněnku, kterou zformuloval na základě úvahy opírající se o matematické argumenty (a ne třeba o prosté vizuální vnímání nebo hádání).

B) *Heuristický experiment*. I zde subjekt sleduje při použití softwaru určitý záměr (zkoumá otázku, na kterou nezná odpověď nebo domněnku, jejíž pravdivostí si není jistý), pro jeho provedení má však pouze heuristické argumenty.

Hlavní rozdíl mezi touto kategorií a přecházející spočívá v povaze argumentů, kterými je subjekt schopen podpořit relevantnost svého záměru. V tomto případě jsou argumenty heuristické, opírají se o obecné postupy a zkušenosti řešitele a jsou založeny na odhadu. Naopak v předchozím případě si je subjekt vědom konkrétní souvislosti svého záměru s řešením problému.

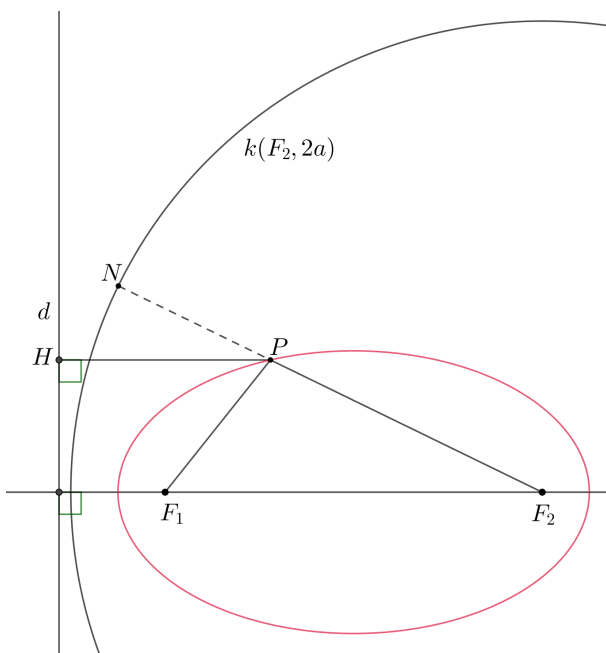
C) *Náhodný experiment*. S pomocí nástrojů DGE student provede experiment, který není schopen nijak zdůvodnit, nedokáže říct, s jakým záměrem ho dělá. Není si jist, zda výstup experimentu bude souviset s řešením problému.

Do této kategorie lze zahrnout případy, kdy o domněnku takříkajíc „zakopneme“: s pomocí nástrojů DGE zjistíme určitý fakt, který nás předtím vůbec nenapadl.

Autor dokáže každou kategorii reprezentovat určitým příkladem, zde však není dostatek prostoru k vyčerpávající ilustraci. Pro čtenáře ukážeme pouze dva úryvky, další jsou v [3] a [8] (v angličtině).

1. Příklad

Řešitel se snažil geometricky dokázat ekvivalenci dvou definic elipsy – pomocí řídící kružnice (nebo také ohnisková definice) a pomocí řídící přímky. Začal tak, že si do GeoGebry narýsoval elipsu, její řídící kružnici a řídící přímku. Zvolil libovolný bod P elipsy, odpovídající bod H řídící přímky a bod N řídící kružnice (viz obr. 3)

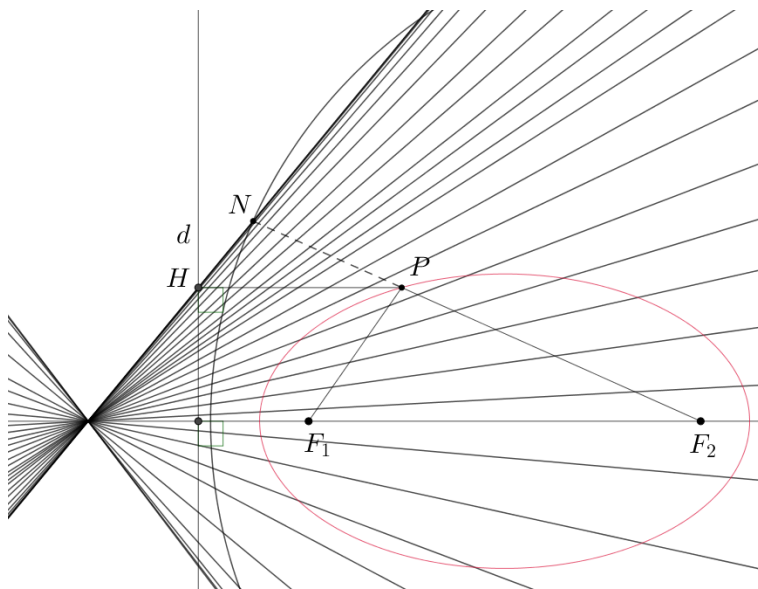


OBRÁZEK 3. Elipsa, řídící přímka d a řídící kružnice k .

Řešitel začal otázkou: „V jakém jsou vztahu body H a N ? Konkrétně, neprochází přímka HN libovolného bodu P fixním bodem?“ Pak provedl experiment: narýsoval přímku HN , zapnul její stopu a pohyboval bodem P po elipse, získal následující obraz (obr. 4):

Závěr: přímka HN prochází fixním bodem, který leží na spojnici ohnisek.

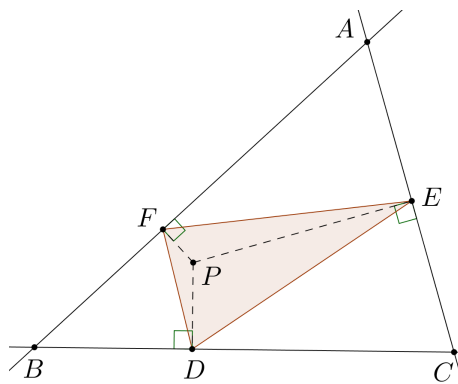
Výše uvedený experiment nepatří pod konstruktivní argumentaci nebo konstruktivní experiment, protože subjekt neznal konkrétní matematické argumenty svědčící pro platnost hypotézy, ani zda souvisí s řešením. Nebyl to ani náhodný experiment, protože subjekt sledoval konkrétní otázku a výsledek částečně antcipoval. Byl to

OBRÁZEK 4. Variabilní přímka HN prochází fixním bodem E

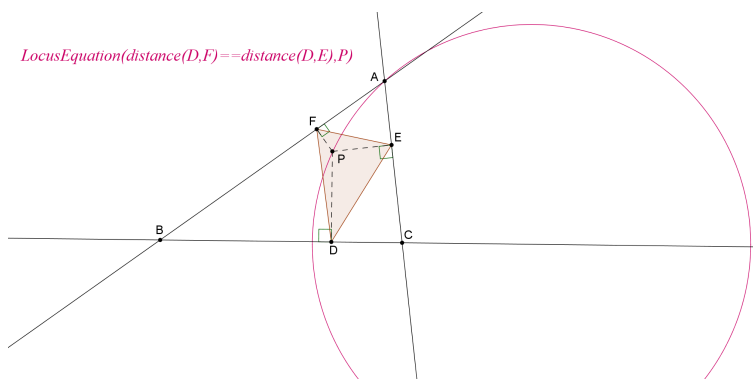
experiment založený na odhadu, víru v symetrii problému, byl to heuristický experiment.

2. Příklad

Subjekt řešil problém: Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Nalezněte a zdůvodněte způsob, jak zkonstruovat v rovině trojúhelníku bod P takový, že paty kolmic D, E, F spuštěných z bodu P na strany trojúhelníka a, b, c jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka. (obr. 5)

OBRÁZEK 5. Příklad trojúhelníku DEF pro náhodně zvolený bod P

Řešitel začal otázkou: jak vypadá množina bodů, pro které je trojúhelník DEF rovnoramenný, například $DF = DE$? Pomocí příkazu *LocusEquation* tuto množinu určil (obr. 6)



OBRÁZEK 6. Hledanou množinou bodů je kružnice.

Bylo zřejmé, že se jedná o kružnici. Dalším úkolem bylo zdůvodnit, o jakou kružnici se jedná a proč má požadovanou vlastnost. Detaily viz [3].

Tento experiment byl konstruktivní: Subjekt si byl vědom konkrétní souvislosti otázky, kterou zkoumá, s řešením problému.

Tolik k teoretickému rámci UTM. Další příklady aplikace Modelu jsou uvedené v publikaci [3].

3. AKCE STUDENTŮ V DGE Z POHLEDU UTM: VÝZKUM

V této sekci budeme prezentovat některé části výsledků výzkumu. Nejdříve uvede výzkumné otázky, poté provedení výzkumu a nakonec získaná data.

Výzkumné otázky zněly:

- I. a Napomáhá použití softwaru DGE k objevu relevantních faktů, vztahujících se k řešení problému, ve srovnání s prostředím „papír – tužka“?
- I. b Napomáhá použití softwaru DGE k nalézání deduktivního zdůvodnění řešení ve srovnání s prostředím „papír – tužka“?

Druhá otázka

- II. a Jaká je četnost výskytu jednotlivých způsobů objevování ve vztahu k UTM? Konkrétně, jak výrazně se na objevu hypotézy podílí řešitelovy znalosti a logika?
- II. b Existuje souvislost mezi způsobem objevu relevantních faktů a úspěšností při řešení problému?

Podoba výzkumu byla následující: uskutečnilo se několik setkání, při každém řešili 2 až 7 studentů jeden ze dvou geometrických problémů (znění jednoho z nich uvádíme dále). Celkem se výzkumu účastnilo 31 studentů. Studenti řešili problém postupně ve čtyřech fázích, každá fáze představovala určitou pomoc, která byla poskytnuta, pokud student nebyl schopen problém vyřešit. Poslední dvě fáze se

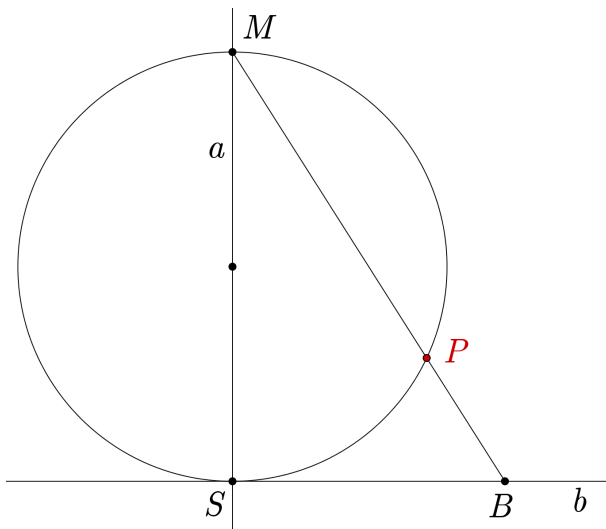
ale týkaly otázek, které v tomto článku nejsou rozebírány, a tak se jim nebudeme věnovat. V první fázi bylo úkolem studenta samostatně vyřešit problém pouze s papírem a tužkou – tím myslíme nejen nalézt řešení problému, ale také ho matematicky zdůvodnit. Ve druhé fázi stál student před stejným úkolem, tentokrát však mohl používat software. Akce studenta v softwaru byly zaznamenány nahráváním obrazovky. Každá fáze trvala 20 minut a po jejím skončení vždy následoval krátký rozhovor, jehož účelem bylo zjistit, zda 1) student problém vyřešil, 2) objevil nějaké domněnky, které by se mohly vztahovat k řešení 3) jakým způsobem tyto domněnky objevil (tato otázka byla důležitá zejména po druhé fázi, neboť ta poskytla data pro druhou výzkumnou otázku). Zdůrazněme, že způsob objevu domněnky byl posuzován z hlediska kategorií UTM. Aby těchto kategorií nebylo příliš mnoho, byly vytvořeny dvě základní, podle toho, zda objevu domněnky předcházela nějaká argumentace studenta, nebo ne. Pokud ano, jednalo se o „konstruktivní objev“, v rámci UTM se jednalo o tyto případy: konstruktivní argumentace, konstruktivní experiment, heuristický experiment. Pokud objevu domněnky argumentace nepředcházela, jednalo se o „náhodný objev“ a v UTM se jednalo o tyto kategorie: Objev faktu na základě vizuálního vnímání, Náhodný objev.

Porovnání výsledků studenta dosažených v různých fázích byla získána data k zodpovězení první otázky. Data získaná ve druhé fázi sloužila k zodpovězení druhé výzkumné otázky.

Nyní uvedeme jeden ze dvou problémů, který studenti řešili:

Zadání 1. problému

V rovině jsou dány dvě vzájemně kolmé přímky a, b . Jejich průsečík označme S . Na přímce a zvolte bod M a na přímce b bod B . Zkonstruuje kružnici k s průměrem MS a dále přímku BM . Druhý průsečík přímky BM s kružnicí k označte P . Určete a zdůvodněte množinu bodů P pokud bod M 'projde' celou přímku a . (obr. 7)



OBRÁZEK 7. Zadání 1. problému

Idealizované řešení 1. problému, provedené klasickým způsobem

Zaměříme pozornost na velikost úhlu MPS . Uvědomíme si, že je to úhel nad průměrem kružnice a vybavíme si Thaletův teorém.

- Tvrzení 1 (deduktivní odůvodnění): úhel MPS je pravý.

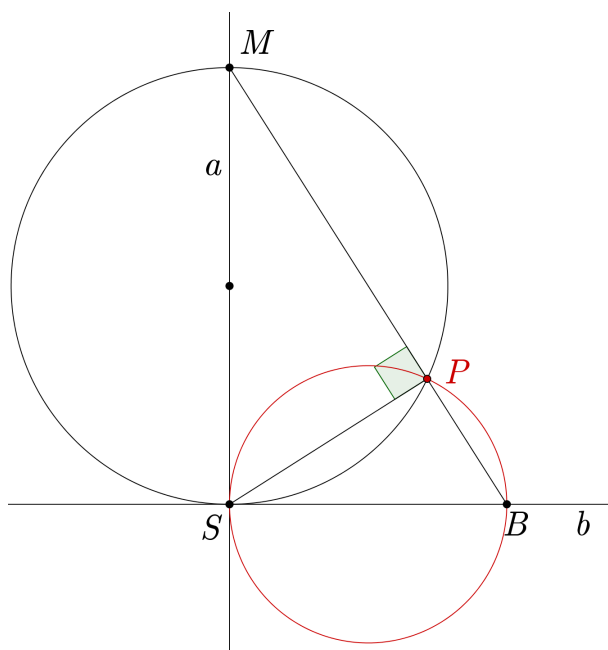
Zatím není jasné, zda má Tvrzení 1 k řešení nějaký vztah. Otázka: má předchozí tvrzení nějaké důsledky? Odpověď: úhel SPB je pravý.

- Tvrzení 2 (deduktivní odůvodnění): úhel SPB je pravý.

Opět si vybavíme Thaletův teorém, tentokrát v opačném znění: Množina bodů, z nichž je úsečka vidět pod pravým úhlem, je kružnice, jejímž průměrem je daná úsečka. Docházíme k závěru:

- Tvrzení 3 (deduktivní odůvodnění): Řešením je kružnice s průměrem SB s vyloučením bodu B (tomuto bodu neodpovídá žádný bod M na přímce a).

Jelikož všechna tři tvrzení máme deduktivně zdůvodněná (vychází od předpokladů k závěru), je důkaz dokončen.



OBRÁZEK 8. Řešení 1. problému

Fakta (hypotézy, tvrzení) 1. problému, která souvisejí s řešením

Jednotlivé kroky matematického zdůvodnění jsou tyto (obr. 8):

Tvrzení 1: Úhel MPS je pravý.

Tvrzení 2: Úhel SPB je pravý.

Tvrzení 3: Řešením je kružnice s průměrem SB .

Ze tří faktů, které může software DGE poskytnout, jsou dvě „netriviální“ – jde o velikosti úhlů *MPS* a *SPB*. U těchto faktů totiž není zřejmé ze zadání, že souvisí s řešením úlohy. Způsob objevu těchto faktů studenty je předmětem výše uvedených výzkumných otázek.

Naopak zjištění hledané množiny spadá do kategorie „triviálních faktů“. Tímto pojmem myslíme, že tuto množinu student s podporou DGE vždy určí – stačí k tomu, aby porozuměl zadání problému. Proto jsme ve výzkumných testech ve druhé fázi kladně oceňovali nalezení pouze netriviálních faktů, nalezení triviálního faktu jsme pokládali za samozřejmé.

Získaná data výzkumu:

- I. a Napomáhá použití softwaru DGE k objevu relevantních faktů, vztahujících se k řešení problému, ve srovnání s prostředím „papír – tužka“?

Získaná data:

Počet případů, kdy student byl schopen zformulovat relevantní hypotézu bez softwaru:

4 / 31 (počet pozitivních případů/celkový počet studentů)

Celkem objeveno domněnek:

5/62 (každý problém obsahoval dvě netriviální fakta, v kumulativním hodnocení tedy studenti mohli objevit až 62 faktů)

Počet případů, kdy student byl schopen zformulovat relevantní hypotézu s DGE: 18/31

Celkem objeveno domněnek: 28/62

Pokud výsledky shrneme slovně: Z 31 studentů, pouze 4 studenti byli schopni nalézt netriviální experimentální fakt bez softwarových nástrojů. Jde o necelých 13 % případů.

Z celkového počtu 62 domněnek, které souvisely s řešením, bylo bez softwaru objeveno pouze 5, tedy 8 %.

Pokud studenti používali software, objevili alespoň jednu netriviální domněnku v 58 % případech, což představuje výrazný nárůst.

Z celkového počtu 62 domněnek, které souvisely s řešením, jich bylo objeveno s podporou softwaru 28, tedy 45 %. To je významný nárůst, ale pohybuje se pouze kolem poloviny celkového počtu.

- I. b Napomáhá použití softwaru DGE k nalézání deduktivního zdůvodnění řešení ve srovnání s prostředím „papír – tužka“?

Získaná data:

Počet správných řešení bez pomoci počítače: 0/31

Počet správných řešení s pomocí GeoGebry: 9/31

Z dat vyplývá, že pomoc GeoGebry byla významná, přesto ale ve většině případů nebyla dostatečně velká.

- II. a Jaká je četnost výskytu jednotlivých způsobů objevování ve vztahu k UTM? Konkrétně, jak výrazně se na objevu hypotézy podílí řešitelovy znalosti a logika?

Data získaná k hypotéze:

<i>Konstruktivně objevená fakta</i>	<i>Počet náhodně objevených fakt</i>	<i>Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili</i>
21 (34 %)	12 (19 %)	29 (48 %)

V souhrnu všech zkoumaných případů byla objevena zhruba polovina relevantních hypotéz. Z tohoto počtu byla většina (65 %) objevena s pomocí logické (konstruktivní) argumentace. Zbytek byl objeven s pomocí nástrojů softwaru a vizuálního vnímání, ale bez konstruktivního záměru studenta. Proto můžeme konstatovat: I s podporou softwaru se student při objevování hypotéz musí spoléhat na logickou úvahu a teoretické znalosti. Pouze menší část hypotéz je možné objevit jen s pomocí nástrojů softwaru, jejichž použití není vedeno konkrétním záměrem, ale je dáno pouze náhodou a vizuálním vnímáním.

II. b Existuje souvislost mezi způsobem objevu relevantních faktů a úspěšností při řešení problému?

Získaná data:

<i>Počty studentů (vyřešili / nevyřešili)</i>	<i>Počet konstruktivně objevených fakt</i>	<i>Počet náhodně objevených fakt</i>	<i>Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili</i>
9	15 (83 %)	3 (17 %)	0
22	6 (14 %)	9 (20 %)	29 (67 %)

Jak z dat vyplývá, studenti, kteří problém vyřešili samostatně, většinu faktů objevili konstruktivně, tedy s pomocí úvahy nebo s pomocí nástrojů softwaru, jejichž použitím sledovali konkrétní záměr. Studenti, kteří problém nevyřešili, ve velké většině nepřišli na všechna fakta, související s řešením. Pokud na některá fakta přišli, stalo se tak většinou bez podpůrné argumentace, tzn., používali software bez vědomého záměru a problém prozkoumávali jen vizuálně a náhodně.

Na základě získaných dat můžeme formulovat obecný závěr: Studenti, kteří problém nakonec vyřeší, používají v průzkumu problému v rámci softwaru i logiku a matematické znalosti. Studenti, kteří problém nevyřeší, používají nástroje softwaru většinou bez plánu a náhodně nebo sledují záměr, který není vzhledem k řešení problému relevantní. Takové prozkoumávání je značně neefektivní a tak tito studenti na většinu faktů, vztahujících se k řešení, nepřijdou.

ZÁVĚR

Shrňme tedy výsledky výše prezentovaného výzkumu. Fakta objevená s pomocí úvahy studenta byla téměř dvakrát častější než fakta objevená náhodně. Lze tedy konstatovat, že způsob, kdy subjekt používá nástroje náhodně, bez vhodného plánu a se spoléháním na prosté vizuální vnímání, je neefektivní.

Položme si však ještě jednu otázku, totiž: Jaké byly důvody, proč student objevil domněnku snáze se softwarem než bez něj?

Když nebudeme uvažovat náhodně objevená fakta, která ze zřejmých důvodů nemohla být objevena bez softwaru, u faktů objevených konstruktivně a s podporou softwaru hrály roli dva faktory:

- (1) Student zjistil hledanou množinu („triviální fakt“). Dostal se tak do nové situace.
- (2) Software nahrazoval nedostatečné zkušenosti studentů. Ti si v mnoha případech nebyli jisti, zda je jejich úvaha korektní. Software jim tuto jistotu poskytl, tím získali sebedůvěru pokračovat v řešení dál.

Výzkum [3] měl určité limity, zde uvedeme jeden. Argumentace, která předcházela objevu domněnky, byla zjišťována retrospektivně (v rozhovoru na konci výzkumu, případně z nahrávek obrazovky). To však může být hodně nepřesné (např. [4]). Pokud bychom chtěli získat přesná a detailní data, měl by výzkumník studenta pozorovat a tato pozorování nějakým vhodným způsobem interpretovat, případně by měl student komentovat všechny své akce.

Zmíňme dva směry dalšího výzkumu. Tento výzkum se zaměřoval na argumentaci, která předchází objevu relevantní domněnky. To je však jenom část všech akcí studenta v softwaru. Bylo by zajímavé stejně tak zaznamenat argumentaci, která předchází všem akcím studenta v prostředí softwaru, tedy včetně těch, které nevedou k formulaci relevantního tvrzení.

Nakonec, v rámci tohoto výzkumu studenti řešili problémy, které obsahovaly vždy jeden triviální fakt – tedy takový fakt, který s podporou softwaru vždy získají, aniž by bylo potřeba nějakého důvtipu či rozhodování. Vzniká zde otázka, jak by se pozměnily závěry výzkumu v případě, že by úloha tento triviální fakt neobsahovala.

LITERATURA

- [1] Leung, A. (2008) Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. *Int J Comput Math Learning* 13, 135–157. <https://doi.org/10.1007/s10758-008-9130-x>
- [2] Guven, B. (2008): Using dynamic geometry software to gain insight into a proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 13(3), s. 251–262
- [3] Blažek, J. (2022): The effect of DGE on the attainability of mathematical reasoning for geometry problems among mathematics teacher education students. [online]. České Budějovice. <https://theses.cz/>. Dissertation.
- [4] Eysenck, M., Keane, M. (2008): *Cognitive psychology*. Translated by Radovan Šíkl. Praha: Academia. ISBN 978-80-200-1559-4.
- [5] Pedemonte, B., (2007): How can the relationship between argumentation and proof be analyzed?, *Educational Studies in Mathematics* 66, s. 23–41.
- [6] Baccaglioni-Frank, A., Mariotti, M. (2010): Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 15. s. 225–253.
- [7] Olivero, F., Robutti, O. (2007): Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 12(2), s. 135–156.
- [8] Blažek, J., Pech, P. (2022): Interaction between subject and DGE by solving geometric problems In: *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning*, Eds Philippe R. Richard, M. Pilar Vélez, Steven Van Vaerenbergh, Springer International Publishing, ISBN 978-3-030-86908-3, to appear.

Email address: jiri.blazek@tul.cz