

MOŽNOSTI VYUŽITÍ DIGITÁLNÍCH TECHNOLOGIÍ PŘI VÝUCE GEOMETRICKÝCH ZOBRAZENÍ V PROSTORU

PETRA PIRKLOVÁ, DANIELA BÍMOVÁ

ABSTRAKT. Výuka prostorových geometrických zobrazení není obsažena v RVP ZŠ ani SŠ. Bohužel studenti učitelství prvního stupně ZŠ, a nejen oni, v rámci výukových aktivit i praxí zaměňují geometrická zobrazení v rovině a geometrická zobrazení v prostoru. Jednotlivé typy zobrazení také nesprávně používají. Naším cílem proto bylo studenty efektivně seznámit s těmito zobrazeními. Kvůli vysokým nárokům na prostorovou představivost je vhodné při jejich výuce zapojit moderní technologie, např. program GeoGebra, 3D tisk či AI.

ÚVOD

Je zřejmé, že již na základní škole je nutné věnovat zvýšenou pozornost výuce geometrie. Právě žáci základní školy si vytvářejí základní geometrické představy, seznamují se s prvními definicemi geometrických pojmů a vztahy mezi geometrickými objekty. Tím dochází k významnému rozvoji jejich vizuálně-prostorových schopností. Mnohé studie však ukazují, že budoucí učitelé primárního vzdělávání nedosahují dostatečné úrovně geometrického myšlení nezbytné pro jejich budoucí povolání (např. [9]).

Unal a kol. v [13] uvádějí, že jedním z důvodů nízkých znalostí žáků v geometrii je skutečnost, že mnozí učitelé základních škol postrádají dostatečné geometrické znalosti a nejsou schopni poskytovat svým žákům odpovídající vzdělávací příležitosti, které by podporovaly rozvoj jejich geometrického porozumění. Hloubka porozumění učitele vyučovanému tématu tedy nejvíce ovlivňuje způsob výuky matematiky [14]. Unal a kol. v [13] dále konstatují, že učitelé s nízkými geometrickými a vizuálně-prostorovými schopnostmi nemusí mít dostatečné dovednosti k přizpůsobení výuky žákům s rozmanitými vzdělávacími potřebami. Proto je velmi nutné věnovat výuce budoucích učitelů 1. stupně ZŠ náležitou pozornost.

Na Fakultě přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci je geometrie vyučována ve studijním programu Učitelství pro 1. stupeň ZŠ v rámci předmětů Elementární geometrie 1 a 2. V sylabu předmětu Elementární geometrie 2 jsou obsažena kromě mnoha jiných témat nejen geometrická zobrazení v rovině, ale také geometrická zobrazení v prostoru, ačkoliv prostorová geometrická zobrazení nejsou uvedena v Rámcovém vzdělávacím programu žádného stupně škol. Důvody jejich zařazení do sylabu uvedeného předmětu jsou popsány v následující kapitole.

1. VÝCHODISKO A MOTIVACE

V rámci plnění předmětu Elementární geometrie 2 odevzdávají studenti seminární práci, která má obsahovat dvě výukové aktivity pro žáky 1. stupně ZŠ na dvě libovolná geometrická zobrazení, a to včetně metodických pokynů. Každá odevzdaná aktivita by měla obsahovat zadání aktivity, její vzorové řešení, popis průběhu a řešení aktivity žáky, věk žáků, pro které je aktivita určena, organizační formu výuky, pomůcky, výchovně vzdělávací cíle aktivity atd.

Received by the editors: 15.12.2025

2020 Mathematics Subject Classification: 00A35

Key words and phrases: Spatial transformations, prospective primary teachers, digital technologies.

V akademickém roce 2024/2025 studenti kombinované formy studia programu Učitelství pro 1. stupeň ZŠ odevzdaly celkem 31 prací s 62 aktivitami. Tuto seminární práci studenti vypracovávali doma a mohli tedy využívat libovolné informační zdroje. Nutno podotknout, že práce byly odevzdávány na konci semestru, tedy po všech kontaktních setkáních (konzultacích), kterých však bohužel v rámci kombinovaného studia není mnoho. Všechny odevzdané aktivity byly vyučující ohodnoceny a opraveny jak po odborné, tak po didaktické stránce. Pro potřeby tohoto článku jsme se zaměřily pouze na konceptuální chyby, jak je uvádí Morales v [10] nebo Brown a Skow v [1]. Tedy chyby v konceptuálních znalostech studentů, což je například nesprávné chápání principů zobrazení nebo definic objektů, matematických faktů a vlastností objektů, které spolu vzájemně souvisejí.

Chyby jsou uvedeny od nejpočetnějších. Nejčastější chybou byla záměna osově souměrnosti v rovině za rovinovou souměrnost v prostoru (u 16 aktivit, 25,8 %). Příkladem takové nesprávné aktivity na osovou souměrnost v rovině je tato: dva žáci si stoupnou naproti sobě a jeden dělá stejné pohyby jako druhý (jako v zrcadle). V polovině příkladů ze 16 zmíněných aktivit (8 aktivit, 12,9 %) byly navíc aktivity označeny jako „zrcadlení“, což jistě není správným ani vhodným výrazem pro osovou souměrnost v rovině ani rovinovou souměrnost v prostoru. Druhou nejčastěji vyskytující se chybou (15 aktivit, 24,2 %) byla záměna shodného či podobného zobrazení za relace shodnost či podobnost, tedy uvedená aktivita nebyla zaměřena na shodné zobrazení, ale na shodnost; žáci měli např. nalézt mezi vyobrazenými trojúhelníky ty, které jsou vzájemně shodné. Dalším nedostatkem bylo nedostačující zadání uvedeného zobrazení (u 7 aktivit, 11,3 %), např. v aktivitě procvičující posunutí nebyla uvedena orientovaná úsečka anebo žádný jí odpovídající ekvivalent atp. Ve třech aktivitách (4,8 %) pak byla zaměněna osová souměrnost v rovině za osovou souměrnost v prostoru. Ojedinelé se pak objevovaly i chyby jiné, které zde však neuvádíme kvůli jejich nízkému počtu.

2. MOŽNÉ PŘÍČINY CHYB U GEOMETRICKÝCH ZOBRAZENÍ

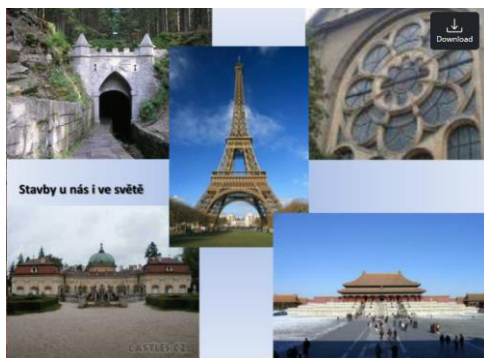
Na výše zmíněných chybách se podepisuje hned několik faktorů. Velkým problémem je nedostatečná výuka geometrie na nižších stupních škol. Mnoho studentů Učitelství pro 1. stupeň ZŠ přichází na univerzitu ze středních škol pedagogických, kde je snížena hodinová dotace výuky matematiky a vzhledem k nedostatku času je nejčastěji vynechávána právě geometrie.

Také téměř zcela chybí odborná literatura, která by se zabývala geometrickými zobrazeními v prostoru. A hledají-li studenti inspiraci pro výše zmíněné aktivity na internetu, nacházejí nezdědka chybné a nevhodné materiály. Například na obrázku 1 je vyobrazena aktivita, která by se měla věnovat dle svého popisu osové souměrnosti v rovině. Tato či podobné aktivity jsou velmi často prezentovány právě ve výše zmíněných seminárních pracích. Rámeček z lepenky má být přikládán na předměty tak, aby gumička v rámečku byla osou souměrnosti těchto předmětů. Pokud by byl rámeček přikládán na fotografii, byla by aktivita pojata správně. Je-li však rámeček užíván jako na obrázku 1, není tato aktivita vhodná pro osovou souměrnost v rovině.

Na obrázku 2 je úvodní snímek k prezentaci, která se věnuje dle svého popisu osové souměrnosti v rovině, jenž má být názorně ukázána na souměrnosti budov. Tyto budovy jsou však symetrické v rovinové souměrnosti v prostoru. Obrázek 3 je pak snímek vystřižený z videa, které se věnuje osové souměrnosti v rovině. Zachycuje často uváděnou aktivitu „hra na zrcadlo“ v seminárních pracích studentů. Aktivita je však zřejmě zaměřena na rovinovou souměrnost v prostoru nikoliv na osovou souměrnost v rovině ani v prostoru. Pokud už studenti najdou vhodné materiály, bohužel je nevhodně přebírají a interpretují. Velkým problémem jsou také nedostatečně vyvinutá prostorová představivost studentů a rovněž vysoká náročnost modelování a zobrazování útvarů v prostoru. Ze všech výše zmíněných skutečností, jako nedostatečná výuka geometrie na nižších stupních škol, nedostatečně vyvinutá prostorová představivost atd., často také plyne averze studentů vůči geometrii.



OBRÁZEK 1. „Osová souměrnost v přírodě“,
zdroj: <https://www.mesto-orlova.cz/cz/404/aktuality-skolstvi/37993-z-k-dvoracka-1230-osova-soumernost-v-prirode.html>



OBRÁZEK 2. „Osová souměrnost“ staveb;
zdroj: <https://www.slideserve.com/bruce-medina/osov-soum-rnost>



OBRÁZEK 3. Aktivita na „osovou souměrnost“; zdroj: <https://edu.ceskatelevize.cz/video/5954-ucitelka-1-tr-osova-soumernost>

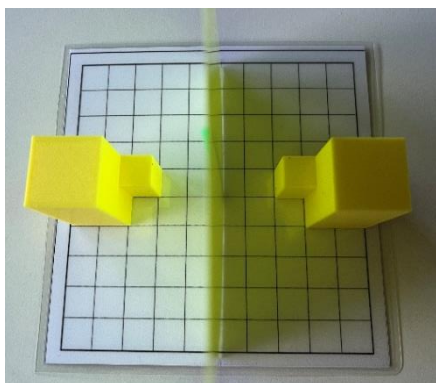
3. INOVACE VÝUKY

Abychom pomohly studentům lépe poznat a pochopit principy a vlastnosti prostorových geometrických zobrazení, zaměřily jsme se na inovaci jejich výuky, a to zejména tak, aby si uvědomili rozdíl mezi rovinnými a prostorovými geometrickými zobrazeními. Díky těmto inovacím bychom zároveň také chtěly změnit poměrně negativní postoj studentů oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ ke geometrii. Za tímto účelem byly ve výuce využity konstruktivistické přístupy, heuristické strategie (viz [5]) a aktivizační činnosti [15].

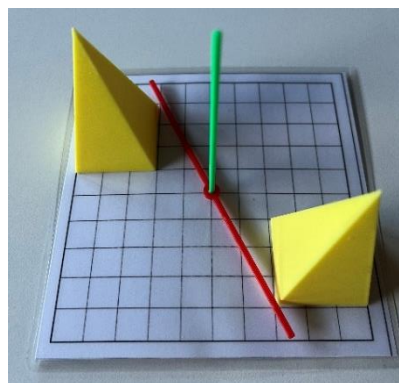
Základní změnou bylo vytvoření vhodných modelů a pomůcek také díky 3D tisku, protože důležitost vizualizace při výuce geometrie a s tím související využití modelů je plně prokázáno. Risma a kol. v [12] uvádějí slibné výsledky s rozvíjením vizuálně-prostorových schopností při plnění aktivit s krychlovými tělesy. Huleihil [7] i Jaakkola a Nurmi [8] popisují významný pokrok studentů v porozumění geometrie díky 3D tištěným modelům. Další výhodou používání pomůcek a aktivit při výuce geometrie je jejich potenciál motivovat studenty. Motivovaný student se stává aktivním v procesu výuky. Potenciál vnitřní motivace se u těchto studentů zvyšuje, což pozitivně ovlivňuje jejich zapojení do procesu učení [2]. Pokud jsou studenti aktivně zapojeni do celého procesu učení, dosahují hlubšího porozumění učivu, získané znalosti

jsou trvalejší a celý výukový proces je tak efektivnější. Používání modelů, pomůcek a vhodného softwaru jako komplexního celku přispívá k rychlejšímu a důkladnějšímu pochopení obsahu, takže učení se pro studenty stává smysluplnější [11]. Hobson a kol. [6] prokázali, že studenti získali hlubší vhled do diskutovaných problémů propojením počítačových virtuálních modelů s fyzickými modely. Tyto dvě oblasti, hmotné modely a počítačové simulace, může efektivně propojit 3D tisk spolu s aktivním zapojením studentů do procesu učení. Správné využití všech výše zmíněných aspektů ve výuce geometrie vede k lepšímu pochopení učiva, rozvoji vizuálně-prostorových schopností studentů a zvýšení jejich matematického a abstraktního myšlení [3].

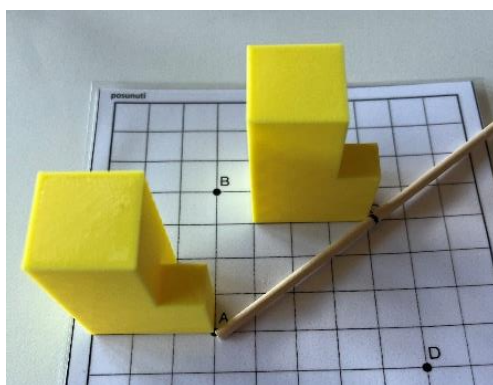
Abychom dosáhly maximální názornosti, vytvořily jsme fyzické modely díky 3D tisku a zároveň jsme použily odpovídající virtuální modely těles v úlohách ve 3D okně GeoGebry v rámci GeoGebra třídy. Vytisknuté modely těles byly doplněny papírovými podložkami, které pomáhají studentům se zobrazováním těles v prostoru (viz obrázky 4–7). Stejně tak lze místo 3D tištěných těles využít i pomůcky improvizované jako například kostky z dřevěné stavebnice nebo lega, špejle atp. Na obrázcích 5 a 7 jsou vyfoceny spojnice (červené „tyčky“) vzorů a obrazů bodů v daném zobrazení a zelená „tyčka“ znázorňující osu souměrnosti (obrázek 5) či osu rotace kolem přímky (obrázek 7). Na obrázku 4 je pak improvizovaná rovina souměrnosti znázorněna listem papíru.



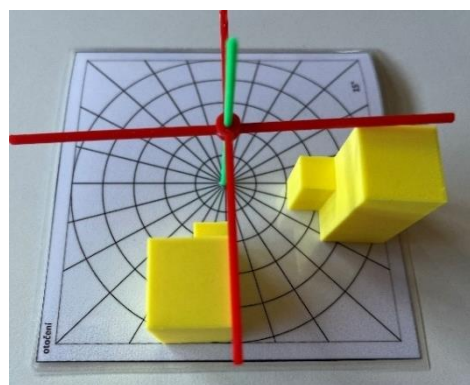
OBRÁZEK 4. Pomůcky pro zobrazování v rovinové souměrnosti.



OBRÁZEK 5. Pomůcky pro zobrazování v osové souměrnosti.



OBRÁZEK 6. Pomůcky pro posunutí.

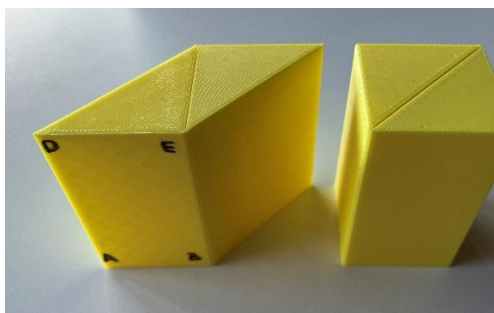


OBRÁZEK 7. Pomůcky pro otočení kolem přímky.

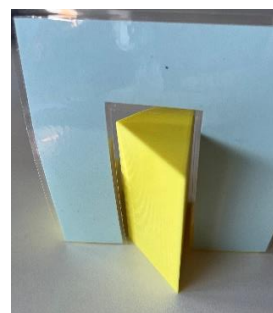
Na obrázcích 8–10 jsou zobrazeny další příklady 3D tištěných pomůcek. Například k pomůcce na obrázku 9 může být toto zadání úlohy: Jak je nutno posunout jedno z těles vlevo, abychom získali těleso vpravo? Zde je důležité si uvědomit a dbát u studentů na to, že je nutné správné určení zobrazení pomocí orientované úsečky. Na obrázku 10 je improvizovaná rovina souměrnosti zobrazeného hranolu.



OBRÁZEK 8.
Pomůcka na/k
otáčení jehlanu



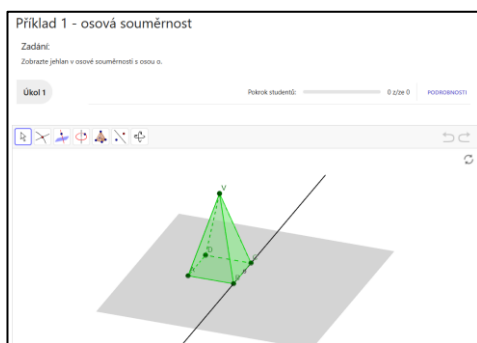
OBRÁZEK 9. Prostorová teselace nebo
posunutí



OBRÁZEK 10. Rovina
souměrnosti modelu
tělesa

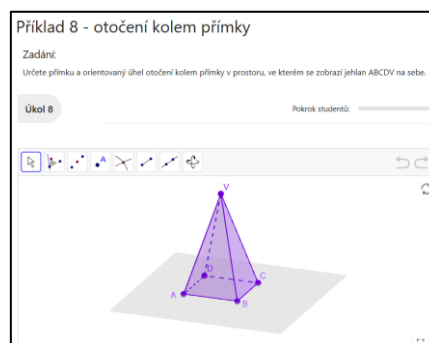
Aby byl přínos pomůcek co možná největší, je důležité, aby každý student měl možnost s nimi pracovat sám nebo v malé skupince. Pokud pracují studenti ve skupince, mohou také zdokonalovat své kompetence profesní spolupráce, zpětné vazby a hodnocení.

Jako další pomůcka byl využit dynamický software GeoGebra, konkrétně jeho 3D okno. V tomto okně jsou vytvořeny úlohy k procvičování různých prostorových zobrazení. Zároveň však jsou pro studenty přístupné pouze některé nástroje. Tedy studenti musí sami sestavit např. obraz bodu v daném zobrazení. Nástroj pro dané prostorové zobrazení je zde ponechán spíše pro kontrolu konstrukce (viz obrázek 11 a 12).



OBRÁZEK 11. GeoGebra třída – osová
souměrnost; zdroj:

<https://www.geogebra.org/classroom/gpkxcrw6>



Obrázek 12: GeoGebra třída – otočení
kolem přímky; zdroj:

<https://www.geogebra.org/classroom/gpkxcrw6>

Jako pomůcku lze také využít různé AI aplikace, např. ChatGPT. Využití AI aplikací pro řešení geometrických úloh je samozřejmě v této době stále velmi diskutabilní, zejména pak jejich fabulování. Můžeme však právě této nedokonalosti využít. Otázkou je nutné v AI aplikaci zadávat co možná nejpřesněji a samozřejmě správně a přesně se vyjadřovat. Což je dovednost, která je pro budoucí učitele velmi důležitá. Po zodpovězení dotazu chatbotem pak studenti kriticky hodnotí, kontrolují a opravují jeho odpověď. V odpovědi aplikace se mohou objevit

různé chyby stejně jako v písemných pracích žáků a učitel je samozřejmě musí dokázat odhalit. Např. na obrázku 13 je položena otázka v ChatGPT (neplacené verzi) a také zobrazena jeho odpověď. Na obrázku 13 je také navíc ilustrativní obrázek k položené otázce, který vytvořil právě ChatGPT.

Popiš otočení kolem přímky v prostoru, které zobrazí jehlan na tentýž jehlan.

Skvělá otázka – tohle přesně zkoumá **symetrie tělesa** a propojuje pojem **otočení kolem přímky** s **vlastní osovou souměrností**.

Podívejme se na to krok za krokem 🗨️

🧠 **1. Co znamená „otočení kolem přímky“ v prostoru?**

Otočení kolem přímky (osy) je **shodné zobrazení**, při kterém:

- všechny body tělesa se pohybují po **kružnicích**, jejichž středy leží na té přímce,
- body ležící na přímce se **nemění** (to jsou **pevné body zobrazení**),
- otočení je určeno **osou** a **úhlem otočení** (např. 90° , 120° , 180° ...).

🏠 **2. Kdy se jehlan zobrazí sám na sebe?**

Jehlan se zobrazí **sám na sebe** (tedy zůstane beze změny), jen pokud má **rotační symetrii** – to znamená, že jeho tvar je kolem nějaké osy **rotačně souměrný**.

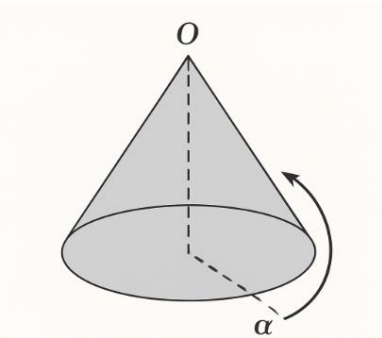
📌 **3. Typy jehlanů a jejich rotační osy**

a) **Pravidelný čtyřboký jehlan** (např. na čtvercové podstavě)

- Má 1 osu souměrnosti: přímku, která **prochází vrcholem a středem podstavy**.
- Otočení kolem této osy o úhly 90° , 180° , 270° , 360° zobrazí jehlan na sebe.
 - (Každé otočení o 90° přemístí jednu hranu podstavy na další, takže tvar zůstane stejný.)

🔑 **Osa symetrie:** přímka spojující vrchol s těžištěm čtvercové podstavy

🔑 **Úhly otočení:** násobky 90° (tj. 90° , 180° , 270° , 360°)



OBRÁZEK 13. Odpověď a obrázek „jehlanu“ vygenerované ChatGPT; zdroj: ChatGPT

Jak už je napsáno výše, je velmi přínosné, pokud lze současně kombinovat využívání všech výše uvedených typů pomůcek. Tedy například studenti mají za úkol vyřešit v GeoGebra třídě úlohu (viz obrázek 12), ke které mají k dispozici 3D fyzický model tělesa (viz obrázek 8) a zároveň

mohou zadat úlohu k vyřešení chatbotovi. Jeho odpověď pak mohou na základě manipulativní činnosti s 3D fyzickým modelem a svého řešení v GeoGebře vyhodnotit a opravit (viz obrázek 13).

ZÁVĚR

V článku jsme popsaly důvody, které nás vedly k zavedení a aplikaci nových výukových aktivit, které byly zvoleny pro výuku prostorových geometrických zobrazení. Z důvodu náročnosti vytvoření odpovídajících prostorových představ modelů těles a základních principů geometrických zobrazení v prostoru bylo s výhodou využito moderních digitálních technologií jako jsou 3D tisk, dynamický geometrický software a AI aplikace. Po implementaci zmíněných nástrojů a aktivit předpokládáme, že se potenciálně potvrdí zlepšení geometrického myšlení a zvýšení úrovně prostorové představivosti studentů studijního oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ. Což bude předmětem našeho dalšího zkoumání, Implementace by navíc měla přirozeně vést k lepšímu rozvoji vizuálně-prostorových schopností studentů, správnému pochopení procvičovaných pojmů a hlubšímu porozumění geometrie vůbec. Tímto způsobem bychom také chtěly přispět ke zvýšení zapojení studentů do procesu učení a snížení jejich despektu vůči geometrii. Při tvorbě aktivit jsme vycházely z konstruktivistických a aktivizujících přístupů [15]. Navíc předpokládáme, že používání podobných pomůcek, metod a aktivit při skupinové výuce podporuje dialog mezi studenty [4] a samozřejmě vhodné komunikační a pracovní kompetence.

LITERATURA

- [1] Brown, J., & Skow, K. (2016). *Mathematics: Identifying and addressing student errors*. Vanderbilt Peabody College.
- [2] Deci, E. L. & Ryan, R. M. (2000). The “what” and “why” of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behaviour. *Psychological Inquiry*, 11(4), 227-268.
https://doi.org/10.1207/S15327965PLI1104_01
- [3] Dilling, F., & Wizke, I. (2020). The use of 3D-printing technology in calculus education: Concept formation processes of the concept of derivative with printed graphs of functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6(3), 320-339. <https://doi.org/10.1007/s40751-020-00062-8>
- [4] Doulik, P., Eisenmann, P., Příbyl, J., & Škoda, J. (2016). Unconventional Ways of Solving Problems in Mathematics Classes, *The New Educational Review*, 43(1). 53–67.
- [5] Eisenmann, P., Novotná, J., Příbyl, J. et al. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies, *Math Ed Res J* 27, 535–562.
<https://doi.org/10.1007/s13394-015-0150-2>.
- [6] Hobson, S. M., Trundle, K. C., & Sackes, M. (2010). Using a planetarium software program to promote conceptual change with young children. *Journal of Science Education Technology*, 19(2), 165-176. <https://doi.org/10.1007/s10956-009-9189-8>
- [7] Huleihil, M. (2017). 3D printing technology as innovative tool for math and geometry teaching applications. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 164, 012023.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/164/1/012023>
- [8] Jaakola, T., & Nurmi, S. (2008). Fostering elementary school students' understanding of simple electricity by combining simulation and laboratory activities. *Journal of Computer Assisted Learning*, 24(4), 271-283. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2007.00259.x>
- [9] Milsaps, G. (2013). Challenging preservice elementary teachers' image of rectangles. *Mathematics Teacher Educator*, 2(1), 27–41. <https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.2.1.0027>
- [10] Morales, Z. A. (2014). Analysis of students' misconceptions and error patterns in mathematics: The case of fractions. *Proceedings of the South Florida Education Research Conference, 2014*, 28.

Florida International University Digital Repository.

<https://digitalcommons.fiu.edu/sferc/2014/2014/28/>

- [11] Prensky, M. (2010). Teaching digital natives: partnering for real learning. Corwin.
- [12] Risma, D.A., Indra Putri, R. I. & Hartono, Y. (2013). On developing students' spatial visualisation ability. *Nternational Education Studies*, 6(9), 1 – 12.
- [13] Unal, H., Jakubowski, E., & Corey, D. (2009). Differences in learning geometry among high and low spatial ability pre-service mathematics teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(8), 997–1012.
<https://doi.org/10.1080/00207390902912852>
- [14] Van der Sandt, S., & Nieuwoudt, H. D. (2003). Grade 7 teachers' and prospective teachers' content knowledge of geometry. *South African Journal of Education*, 23(3), 199–205.
- [15] Zormanová, L. (2012). Výukové metody v pedagogice: tradiční a inovativní metody, transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky, klasifikace výukových metod (1st ed.). Grada Praha. ISBN 978-80-247-4100-0.
- [16] GeoGebra třída Shodná zobrazení v prostoru, dostupné z:
<https://www.geogebra.org/classroom/gpkxcrw6>

ADRESA AUTORA; KATEDRA MATEMATIKY, TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI, STUDENTSKÁ 1402/2,
461 17 LIBEREC, ČESKÁ REPUBLIKA
E-mail address: petra.pirklova@tul.cz