

VYUŽITÍ 3D TIŠTĚNÝCH MANIPULATIVŮ VE VÝUCE MATEMATIKY NA SŠ: PODPORA POZNÁVACÍCH PROCESŮ ŽÁKŮ

PETRA SURYNKOVÁ

ABSTRAKT. Příspěvek se věnuje možnostem využití 3D tištěných pomůcek ve výuce různých matematických témat, zejména planimetrie a stereometrie na střední škole. Ukážeme, jak tyto pomůcky mohou podporovat poznávací procesy žáků a studentů, například při identifikaci klíčových částí geometrické úlohy, hledání různých řešení či rozvíjení prostorové představivosti. Představíme také konkrétní příklady 3D tištěných pomůcek a výsledky práce studentů s jejich využitím.

ÚVOD

3D tisk v posledních letech pronikl do mnoha oblastí výroby, ale našel své uplatnění i ve vzdělávání. Například Ford a Minshall [3] se zabývali kategorizací využití 3D tisku ve vzdělávání a upozornili především na jeho roli v podpoře výuky a při tvorbě didaktických pomůcek. Ve výuce matematiky, zejména v oblasti geometrie, se využití 3D tištěných pomůcek, tzv. manipulativů, nabízí zcela přirozeně. Přestože se 3D tisk stává stále dostupnějším, na řadě základních, středních i vysokých škol se s ním dnes již běžně pracuje, zůstává otázkou, jak jej efektivně využívat k podpoře poznávacích procesů žáků a studentů. Zároveň je potřeba pedagogů podpořit v tom, aby mohli 3D tisk aplikovat ve své výuce, například prostřednictvím tvorby metodiky výuky s využitím 3D tisku. Významný potenciál pro další zkoumání proto spatřujeme ve výzkumu integrace 3D tisku do výuky matematiky a v hodnocení jeho účinnosti ve výukovém procesu.

Autorka se dlouhodobě věnuje počítačovému modelování a od roku 2014 se k tomuto odbornému zájmu přidal také 3D tisk. Později autorka zapojila 3D tisk a produkty z 3D tisku do výuky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy. Nápad cíleného zkoumání vlivu 3D tištěných pomůcek na porozumění žáků a studentů přišel ale až v době, kdy autorka kromě univerzity začala pedagogicky působit také na Gymnáziu ve Vlašimi, tedy od roku 2020. Na základě zkušeností i podle odborné literatury se ukazuje, že využití 3D tištěných pomůcek a samotného 3D tisku ve výuce podněcuje studenty k řešení geometrických úloh, jejich aktivnímu zapojení do diskuse o možných postupech řešení či v hledání více řešení a to i ty studenty, kteří se za normálních okolností (tj. bez využití fyzických pomůcek) neprojeví. Ve svém didaktickém výzkumu se autorka zaměřuje na návrhy, tvorbu, postupné vylepšování 3D tištěných pomůcek pro výuku vybraných geometrických

Received by the editors: 15.12.2025

2020 Mathematics Subject Classification: 97G40, 97G50, 97G80

Keywords and phrases: 3D tisk, výuka matematiky s manipulativy, poznávací procesy žáků.

témat a ověřování jejich použití ve vyučovací praxi jak na gymnáziu, tak na vysoké škole.

V této studii se zaměřujeme na využití předem připravených 3D tištěných modelů ve výuce matematiky v tématech rovinné a prostorové geometrie, konkrétně na Gymnáziu Vlašim. Práce navazuje na dlouhodobý výzkum autorky zaměřený na využití 3D tisku na střední a vysoké škole [8], [9], [10].

1. TEORETICKÝ RÁMEC

V této části stručně popíšeme teorii, která souvisí s využitím 3D tištěných modelů ve výuce a je důležitá pro zkoumání poznávacích procesů žáků a studentů. Zároveň uvedeme, v jakých geometrických tématech se věnujeme využití 3D tištěných pomůcek.

1.1. Manipulativy

Ve výuce matematiky, tedy i geometrie, lze stále hledat způsoby, jak žákům a studentům pomáhat s porozuměním různým matematickým konceptům. Jedním ze způsobů, jak řešit obtíže, s nimiž se žáci a studenti setkávají, je využití inovativních výukových nástrojů, které podporují prostorovou představivost a porozumění. Mezi tyto nástroje mohou patřit například 3D počítačové modelování, rozšířená realita, počítačové animace, fyzické modely a další. Tyto nástroje budeme souhrnně označovat jako manipulativy. Fyzické manipulativy mají podobu hmatatelných objektů, zatímco virtuální manipulativy jsou realizovány jako dynamické počítačové vizualizace, se kterými lze pracovat interaktivně. Výsledky výzkumů naznačují, že práce s manipulativními pomůckami obecně přispívá k lepšímu porozumění matematickému učivu. Studenti, kteří tyto pomůcky využívají, dosahují zpravidla lepších studijních výsledků než studenti, kteří s nimi nepracují [1], [4]. Manipulativní pomůcky pomáhají převádět abstraktní matematické pojmy do konkrétnějších a srozumitelnějších forem, čímž podporují porozumění a zároveň přispívají k pozitivnějšímu vztahu k matematice [5].

Je však třeba zdůraznit, že používání manipulativních pomůcek musí být promyšlené a cílené. Samotné zařazení manipulativů do výuky automaticky nevede k lepším vzdělávacím výsledkům; jejich efektivita závisí na způsobu jejich použití a na tom, jak jsou smysluplně propojeny s probíranými matematickými koncepty.

1.2. Prostorová představivost a její složky

Úspěšnost při řešení geometrických úloh, ať už v rovině nebo v prostoru, je úzce spojena s prostorovou představivostí. V odborné literatuře se objevují velmi podobné definice prostorové představivosti, které se liší především ve formulaci, nikoli však v samotném vymezení tohoto pojmu. Nejčastěji je prostorová představivost popisována jako schopnost vytvářet mentální obrazy a manipulovat s nimi v mysli [6]. Další definici uvádí například Linn a Petersen, kteří ji charakterizují jako dovednost reprezentovat, transformovat, vytvářet a vybavovat si symbolické, neverbální informace [7].

Současný výzkum obvykle rozlišuje několik základních složek prostorové představivosti. Mezi nejčastěji uváděné patří vizualizace (*visualisation*), prostorové vztahy

(*spatial relation*), mentální rotace (*mental rotation*) a prostorová orientace (*spatial orientation*).

Vizualizace je obvykle označována jako obecná složka prostorové představivosti. Zahrnuje schopnost mentálně měnit objekty, například jejich tvar, orientaci, polohu nebo vnitřní uspořádání. Tato složka prostorové představivosti se uplatňuje například v úlohách, které zahrnují skládání těles ze sítí a naopak, určování protilehlých stěn krychle na základě její sítě, mentální skládání a stříhání papíru či kreslení sítě tělesa s různými vzory na stěnách podle prostorového modelu.

Prostorové vztahy se týkají porozumění vzájemnému uspořádání jednotlivých částí objektu. Tato složka prostorové představivosti je klíčová zejména v úlohách, které vyžadují porovnávání různých objektů, jejich mentální manipulaci a sestavování celku z jednotlivých částí. Uplatňuje se například v úlohách zaměřených na efektivní uspořádání objektů (např. problém balení kufru) či při vyhledávání chybějících částí, které lze použít k doplnění dané struktury.

Mentální rotace představuje schopnost představit si otočení dvourozměrných i trojrozměrných objektů a porovnávat jejich různé polohy. Uplatňuje se zejména v úlohách, které vyžadují rozpoznávání geometrických objektů zobrazených v různých pozicích, určování, zda jsou dva otočené objekty totožné, hledání odlišného objektu v souboru objektů nebo určení osy, kolem níž je třeba objekt otočit, aby se dostal do dané polohy. V těchto úlohách se často klade důraz také na rychlost řešení.

Prostorová orientace souvisí se schopností mentálně se orientovat a pohybovat v trojrozměrném prostoru a měnit vlastní pohled na objekt nebo scénu, nikoli však objekt samotný. Uplatňuje se například v úlohách zaměřených na určování stano-
viště pozorovatele v prostorové scéně či při rozpoznávání směru, z něhož je objekt pozorován.

1.3. Rovinná a prostorová geometrie a vnímání geometrických kreseb

Oblasti středoškolské matematiky, ve kterých se přirozeně nabízí uplatnění 3D tištěných manipulativů, jsou rovinná a prostorová geometrie. Konkrétně se v našem didaktickém výzkumu věnujeme tématům:

- obsahy a obvody rovinných obrazců,
- shodná zobrazení v rovině,
- tělesa a jejich sítě,
- volné rovnoběžné promítání,
- vzájemná poloha přímk a rovin v prostoru,
- odchylky přímk a rovin,
- povrchy a objemy těles.

V rámci těchto geometrických témat zkoumáme, jak mohou 3D tištěné manipulativy podporovat poznávací procesy žáků a studentů, například při identifikaci klíčových částí geometrické úlohy, hledání různých řešení či rozvíjení prostorové představivosti.

Při hledání řešení geometrické úlohy hraje důležitou roli správná vizualizace rovinné či prostorové situace, která jasně zachycuje vzájemné vztahy objektů. Pro hlubší porozumění tomu, jak žáci a studenti interpretují takové geometrické kresby, je užitečné rozlišovat *ikonickou* a *neikonickou* vizualizaci [2].

Ikonická vizualizace je založena na rozpoznávání tvarů, které připomínají známé objekty a představuje přirozený a intuitivní způsob vnímání geometrických zobrazení. Neikonická vizualizace naproti tomu chápe kresby jako reprezentace geometrických objektů, přičemž důraz je kladen na vztahy mezi jejich prvky, nikoli na jejich vizuální podobnost s reálnými objekty. Ve výuce geometrie studenti často přecházejí mezi těmito dvěma typy vizualizace. Ikonická vizualizace zahrnuje rozpoznání trojrozměrného objektu na základě jeho tvaru, což je počáteční a intuitivní krok. Teprve s hlubším porozuměním prostorových vztahů v geometrii přichází na řadu neikonická vizualizace.

Fyzické modely mohou významně podporovat ikonickou vizualizaci, neboť poskytují hmatatelné reprezentace prostorových objektů. Ikonická vizualizace sama o sobě však není dostačující pro řešení složitějších úloh prostorové geometrie. Pro hlubší porozumění prostorovým situacím v geometrii je nezbytné rozvíjet neikonickou vizualizaci, která umožňuje vnímat objekty jako struktury tvořené prvky a vztahy. Při práci s fyzickými modely, například při konstrukci projekcí trojrozměrných objektů, dochází k přechodu od pouhého rozpoznávání tvaru k analytickému chápání vnitřních vztahů a kompozice objektu. Tento způsob uvažování je klíčový pro porozumění složitějším prostorovým vztahům.

2. VÝZKUMNÁ ŠETŘENÍ

2.1. Výzkumný kontext

V našem dlouhodobém didaktickém výzkumu se zaměřujeme na návrh, tvorbu a postupné vylepšování 3D tištěných pomůcek pro výuku vybraných geometrických témat na gymnáziu. Zároveň se věnujeme zkoumání jejich vlivu na poznávací procesy žáků. Kromě konceptuálního porozumění daným geometrickým tématům si klademe za cíl zkoumat porozumění širěji a podpořit žákovu prostorovou představivost i hledání více postupů při řešení geometrických úloh. Školské geometrické úlohy jsou často zaměřeny „pouze“ na nalezení správného řešení a nemusí žáky a studenty explicitně vést k zamyšlení nad vlastním uvažováním, k uvědomění si různých možností vizualizace zadání a řešení úlohy, k identifikaci více postupů řešení nebo k hledání více řešení. Náš dlouhodobý výzkum proto hledá odpovědi, jak **používání 3D tištěných pomůcek ovlivňuje poznávací procesy žáků**.

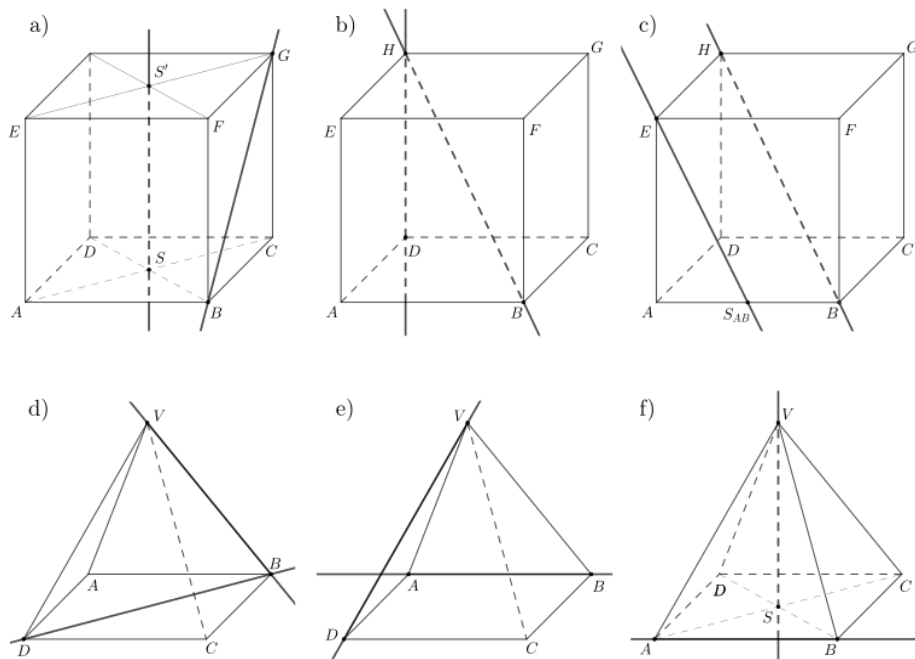
V letech 2020 až 2024 jsme realizovali přípravnou studii, jejímž cílem bylo vytvoření metodiky pro užití 3D tištěných pomůcek ve výuce. Během této dlouhodobé studie se postupně navrhovaly, vylepšovaly a tiskly sady 3D tištěných modelů pro výuku několika geometrických témat. Současně s tím vznikaly doprovodné otázky v rámci daných geometrických témat, které sloužily jako nástroj pro zkoumání vhodnosti designu 3D tištěné pomůcky a žákovského porozumění. Vytvořené pomůcky a sady doprovodných otázek nyní dále využíváme k systematickému zkoumání vlivu 3D tištěných pomůcek na poznávací procesy žáků.

2.2. Sběr dat a analýza

V tomto článku si představíme dvě konkrétní jednorázová výzkumná šetření zaměřená na geometrická témata – vzájemná poloha přímk a rovin v prostoru a shodná zobrazení v rovině. Výzkumného šetření se zúčastnili žáci třetího ročníku čtyřletého

studia vlašimského gymnázia ve školním roce 2025/2026 a to 27 žáků u prvního tématu a 22 žáků u druhého.

Určete vzájemnou polohu vyznačených přímek.

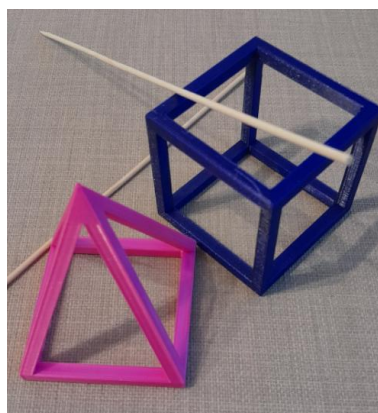


Otázky na design:

Byl by pro vás nějaký jiný typ modelu lepší? Například neprůhledný vyplněný model? Větší model? Jak byste model vylepšili?

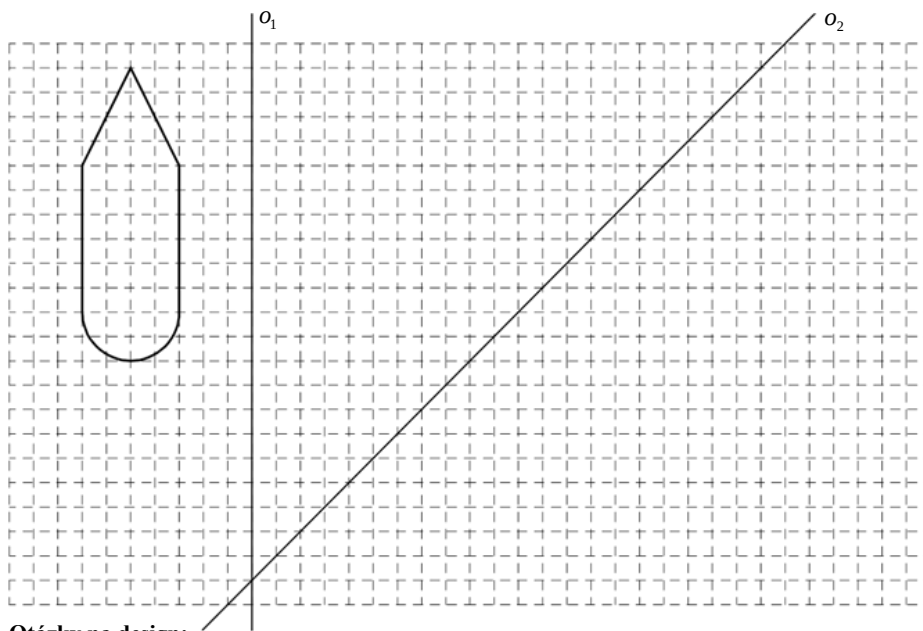
Otázky na poznávací procesy:

- 1) Řešili jste úlohy s modely nebo jste je vůbec nepoužili? Pokud jste je použili, ve kterých úlohách a proč?
- 2) Jak jste při práci s modelem postupovali? Popište, jak konkrétně jste model používali při řešení úloh. Otáčeli jste model v ruce, nebo jen stál na lavici?
- 3) Je úloha s modelem jednodušší nebo vám model vůbec nepomůže? Usnadní vám model představu o tom, jak jsou objekty v prostoru rozmístěny?
- 4) Měnil se váš postup řešení mezi jednotlivými úlohami? Pokud ano, jak a proč? U kterých úloh?



OBRÁZEK 1. Ukázka úloh a otázek z pracovního listu na vzájemnou polohu přímek a rovin v prostoru

Zobrazte rovinný útvar v osových souměrnostech podle vyznačených os, využijte čtvercovou síť. Zobrazujeme postupně – tj. zobrazíme útvar U v osové souměrnosti s osou o_1 na útvar U' , útvar U' dále zobrazíme v osové souměrnosti s osou o_2 na útvar U'' .



Otázky na design:

Byl by pro vás nějaký jiný typ modelu lepší? Například neprůhledný vyplněný model? Větší model? Jak byste model vylepšili?

Otázky na poznávací procesy:

- 1) Řešili jste úlohy s modely nebo jste je vůbec nepoužili? Pokud jste je použili, ve kterých úlohách a proč?
- 2) Jak jste při práci s modelem postupovali? Popište, jak konkrétně jste model používali při řešení úloh. Otáčeli jste model v ruce, nebo jen stál na lavici?
- 3) Je úloha s modelem jednodušší nebo vám model vůbec nepomůže? Usnadní vám model představu o tom, jak jsou objekty v prostoru rozmístěny?
- 4) Měnil se váš postup řešení mezi jednotlivými úlohami? Pokud ano, jak a proč? U kterých úloh?



OBRÁZEK 2. Ukázka úloh a otázek z pracovního listu na vzájemnou polohu přímek a rovin v prostoru

Jako hlavní zdroj dat byly použity pracovní listy s geometrickými úlohami na dané téma, které žáci řešili s využitím 3D tištěné pomůcky. Kromě geometrických úloh byly součástí pracovních listů také otázky zkoumající, co si studenti myslí o užitečnosti, srozumitelnosti a vhodnosti použitých pomůcek, a také o jejich možném vylepšení. Důležitou součástí pracovních listů byly doprovodné otázky, které vzešly z přípravných studií z předchozích let, a jejichž cílem bylo zjišťování uvažování žáků při řešení úloh. Tyto otázky se mírně lišily podle toho, jakého geometrického tématu se pracovní list týkal.

Pracovní listy byly vždy vyplněny během klasické vyučovací hodiny v době, kdy se dané téma probíralo a odevzdány všemi studenty přítomnými v dané třídě. Žáci řešili úlohy a odpovídali na doprovodné otázky v pracovních listech samostatně. Každý žák měl k dispozici svůj 3D tištěný model. Na vyplnění pracovních listů měli většinou čas 15-20 minut, záleželo na konkrétním geometrickém tématu, počtu úloh a doprovodných otázkách. Pracovní listy se vyhodnocovaly, ale neměly obecně vliv na známku z předmětu, jen v případě, kdy žák řešil úlohy v pracovním listě úspěšně, mohl získat tzv. plusy. Za pět těchto plusů získal žák známku 1, která měla stejnou váhu jako známka ze standardního průběžného písemného testu. Typicky šlo tzv. plus získat za správné řešení jedné úlohy v pracovním listě. Řešení pracovních listů bylo tedy motivováno možným vylepšením finální známky z předmětu.

Na obrázku 1 můžeme vidět ukázkou části pracovního listu na téma vzájemná poloha přímk a rovin v prostoru s příslušnými modely krychle a jehlanu, které měli žáci k dispozici. K modelování přímk mohli žáci využít špejle. Na obrázku 2 je k dispozici ukázkou části pracovního listu na téma shodná zobrazení v rovině opět s příslušnými modely elementárních obrazců, které měli žáci k dispozici. Modely rovinných obrazců byly stejně velké jako jejich obrazy v úlohách.



OBRÁZEK 3. Práce studentů při řešení pracovního listu zaměřeného na vzájemnou polohu přímk a rovin v prostoru

Vzhledem k povaze výzkumných otázek a charakteru získaných dat byl zvolen kvalitativní výzkumný design. Data jsme analyzovali užitím metody otevřeného kódování [11], přičemž odpovědi studentů byly členěny do kategorií. Pozornost byla zaměřena zejména na kategorie hodnocení 3D tištěných pomůcek, na způsoby uvažování žáků při řešení geometrických úloh, na využívání 3D tištěných pomůcek při

práci a na projevy podpory prostorové představivosti a hledání různých postupů řešení. Výsledné kategorie vznikaly na základě opakujících se vzorců v žákovských odpovědích a sloužily jako podklad pro interpretaci získaných dat.

Na obrázku 3 můžeme vidět práci studentů na pracovních listech týkající se vzájemné polohy přímek a rovin.

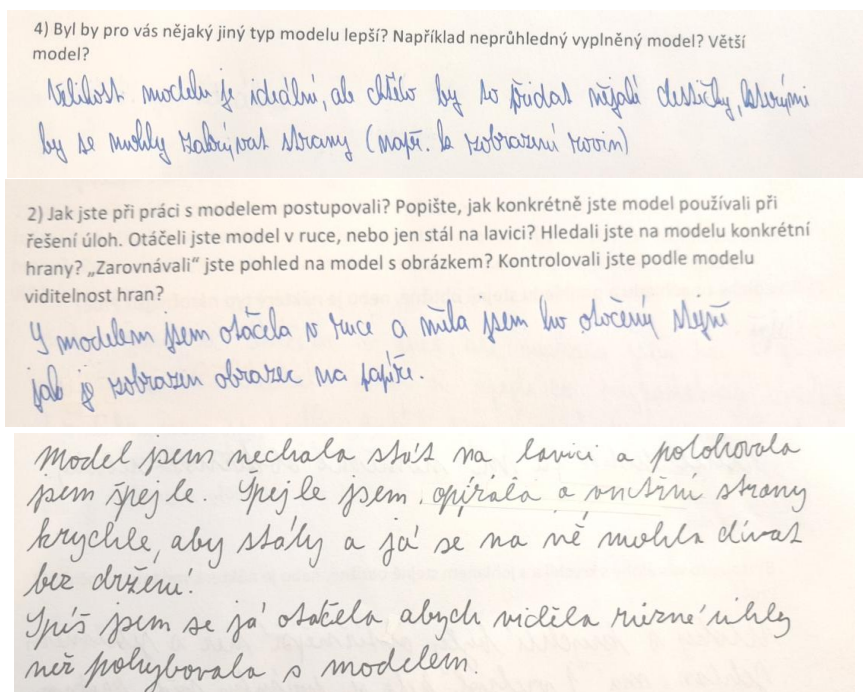
2.3. Výsledky

Co se týče pracovních listů zaměřených na vzájemnou polohu přímek a rovin v prostoru, u kategorií týkajících se designu 3D tištěných manipulativů (např. kategorie srozumitelnost a přehlednost reprezentace, míra abstrakce, technické a ergonomické vlastnosti, manipulovatelnost a flexibilita) se v odpovědích žáků opakovaně objevovalo hodnocení, že velikost modelů je adekvátní. Žáci pozitivně oceňovali zejména „drátovou formu“ modelů, která jim umožňovala manipulovat s přímkami v prostoru i skrz tělesa. Někteří žáci navrhovali rozšíření modelů o destičky reprezentující roviny, které by přesně pasovaly do konstrukce tělesa. Menšinově se objevily také návrhy na technické úpravy modelů, například ztenčení hran, jejich zdvojení nebo vytvoření otvorů ve vrcholech těles, které by umožnily prostrčení špejlí skrz hrany či vrcholy modelu. Jako zásadní pozitivum hodnotili žáci různobarevnost modelů, výběr modelu v oblíbené barvě se jevil jako velmi důležitý.

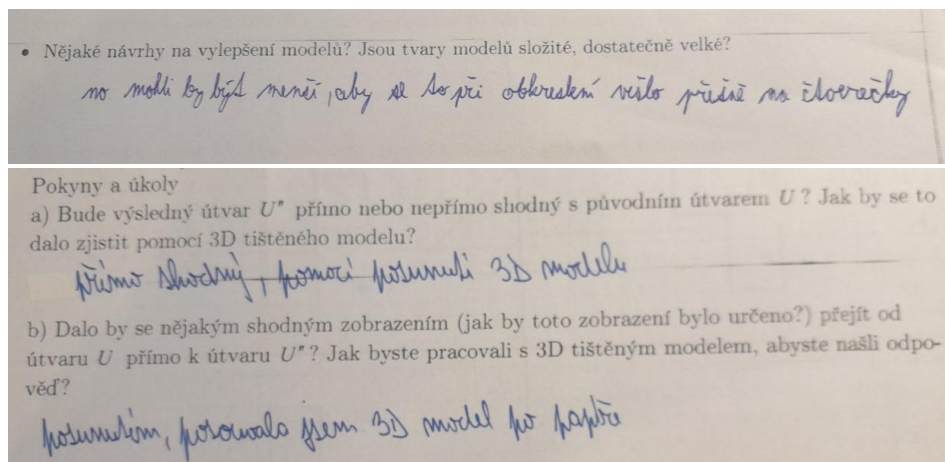
U kategorií týkajících se otázek zaměřených na poznávací procesy žáků (např. kategorie porozumění a interpretace úlohy a identifikace klíčových aspektů geometrické situace, prostorová představivost a práce s reprezentacemi, strategie řešení a jejich zdůvodnění, práce s více postupy, reflexe a kontrola řešení, alternativní interpretace a miskoncepce) žáci nejčastěji reflektovali, že jim práce s 3D tištěnými manipulativy pomohla lépe porozumět zadání úlohy a prostorové situaci. Při popisu práce s modelem žáci nejčastěji uváděli, že situaci s pomůckou nejprve vymodelovali tak, aby odpovídala pohledu znázorněnému na obrázku, a následně s modelem se zafixovanými špejlemi otáčeli, aby určili vzájemnou polohu přímek a rovin. Pouze u jednoho žáka se objevila odpověď, že model tělesa se špejlemi ponechal fixně na lavici a pro zjištění vzájemné polohy se otáčel sám a pozoroval model z různých pozic. Někteří žáci dále explicitně popisovali, že jim manipulace s modelem umožnila zkontrolovat správnost zvoleného postupu nebo odhalit chybu v původním řešení, které nejprve zkoušeli bez využití pomůcky.

Co se týče pracovních listů zaměřených na shodná zobrazení v rovině, v odpovědích žáků se nejčastěji objevovalo hodnocení, že by modely měly být nepatrně menší, aby bylo možné je přesně obkreslit tužkou. Žáci uváděli, že tloušťka tužky způsobovala nepřesnosti při obkreslování obrazců do mřížky, kdy obrazec neprocházel přesně mřížovými body. Pouze u jednoho žáka se objevila poznámka, že použité tvary jsou příliš složité. Pozitivně byla hodnocena také různá barevnost rubu a líce u některých modelů, která žákům pomáhala rozlišit přímou a nepřímou shodnost při skládání shodností.

V odpovědích vztahujících se k otázkám zaměřeným na poznávací procesy žáci nejčastěji reflektovali, že jim práce s 3D tištěnými manipulativy pomohla rychleji a jednodušeji nalézt obrazy objektů ve shodnostech a při skládání shodností. Při popisu práce s modely se objevovalo, že žáci transformovali podle zadané shodnosti, například posouváním, překlápěním či otáčením. Obecně však měli potíže



OBRÁZEK 4. Ukázky žákovských odpovědí na otázky v pracovním listě zaměřeném na vzájemnou polohu přímek a rovin



OBRÁZEK 5. Ukázky žákovských odpovědí na otázky v pracovním listě zaměřeném na shodnosti v rovině

s určením výsledné složené transformace. Pouze v individuálních případech se objevilo správné určení výsledné transformace vzniklé složením zobrazení, přičemž

jen několik žáků uvedlo, že k tomuto řešení dospěli prostřednictvím opakovaného zkoušení manipulací s modelem.

Ukázky žákovských odpovědí na otázky jsou uvedeny na obrázcích 4 a 5.

2.4. Diskuse

Výsledky prezentované v této studii ukazují, že 3D tištěné manipulativy mohou ve výuce geometrie podporovat poznávací procesy žáků, zejména při porozumění geometrické situaci, prostorovým vztahům a při hledání řešení či ověřování zvolených postupů řešení.

Diskuse výsledků týkajících se designu 3D tištěných manipulativů ukazuje, že technické a tvarové vlastnosti pomůcek nejsou pouze praktickým detailem, ale významně ovlivňují způsob, jakým s nimi žáci pracují. U rovinných úloh zaměřených na shodná zobrazení se ukázalo, že i drobná nepřesnost modelu (desetiny milimetru) mohou ovlivnit řešení.

U vzájemných poloh přímek a rovin žáci často začínali prací s modelem tak, že jej umístili do polohy odpovídající obrázku v zadání, což odpovídá ikonické vizualizaci založené na podobnosti tvaru. Následná manipulace s modelem v prostoru, zejména jeho otáčení nebo změna perspektivy, však v některých případech umožnila žákům zaměřit pozornost na vztahy mezi jednotlivými prvky tělesa a prostorové situace, a mohla tak zprostředkovat přechod k neikonické vizualizaci. Zajímavým zjištěním je skutečnost, že většina žáků v tomto pracovním listě volila strategii mentální rotace tělesa prostřednictvím fyzické manipulace s modelem, zatímco pouze ojediněle se objevilo uvažování založené na změně vlastní pozice a perspektivy, tedy užití prostorové orientace.

U shodných zobrazení studenti simulovali proces transformací. U osově souměrnosti napadlo studenty s modelem „vystoupit z roviny“ a představovat si osovou souměrnost jako překlopení objektu, tj. otáčení v prostoru kolem osy.

Výsledky zároveň ukazují, že samotné používání 3D tištěných manipulativů automaticky nevede k hlubokému porozumění geometrickým konceptům. Přestože žáci dokázali pomocí manipulace s modely nalézat obrazy objektů ve shodnostech a provádět jednotlivé transformace, určování výsledné složené transformace představovalo pro většinu z nich obtíž. To naznačuje, že manipulativy podporují spíše procedurální složku poznávání. Tento závěr je v souladu s výzkumy upozorňujícími na to, že účinnost manipulativů závisí na způsobu jejich integrace do výuky.

3. ZÁVĚR

V příspěvku jsme se zaměřili na využití 3D tištěných manipulativů ve výuce rovinné a prostorové geometrie na střední škole a na jejich roli při podpoře poznávacích procesů žáků. Výsledky ukazují, že tyto pomůcky mohou napomáhat porozumění geometrickým situacím. Plánujeme i nadále vylepšovat 3D tištěné manipulativy, navrhovat další sady modelů pro různá geometrická témata a ověřovat s žáky, jak lze tyto modely efektivně využívat ve výuce.

4. PODĚKOVÁNÍ

Tato publikace byla podpořena programem Cooperatio – program základní institucionální podpory vědy a výzkumu na Univerzitě Karlově.

LITERATURA

- [1] D. H. Clements: *‘Concrete’ Manipulatives, Concrete Ideas*, Contemporary Issues in Early Childhood, 1(1), 45–60, 1999
- [2] R. Duval: *Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processes*, In R. Sutherland and J. Mason (eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, 142–157, Springer, 1995
- [3] S. Ford and T. Minshall: *Invited Review Article: Where and How 3D Printing is Used in Teaching and Education*, Additive Manufacturing, 25, 131–150, 2019
- [4] A. Holmes: *Effects of Manipulative Use on PK-12 Mathematics Achievement: A Meta-Analysis*, Society for Research on Educational Effectiveness, 2013
- [5] H. Kontag: *The Effect of Manipulatives on Mathematics Achievement and Attitudes of Secondary School Students*, Journal of Education and Learning, 5(3), 10–20, 2016
- [6] G. Lean and M. A. Clements: *Spatial Ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance*, Educational Studies in Mathematics, 12, 267–299, 1981
- [7] M. C. Linn and A. C. Petersen: *Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A Meta-Analysis*, Child Development, 56(6), 1479–1498, 1985
- [8] P. Surynková: *3D modelování a 3D tisk na gymnáziu*, In Bastl, B. and Lávička, M. (Eds.), *Sborník příspěvků konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, 229–234. Srní na Šumavě, Česká republika, Vydavatelský servis, 2022
- [9] P. Surynková: *Concrete 3D printed manipulatives in geometry learning and problem solving: usefulness of instructional 3D printed tools in the topic of polygons and tilings*, In Drijvers, P. and Csapodi, C. and Palmér, H. and Gosztonyi, K. and Kónya, E. (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*, 813–820. Budapest, Hungary, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, 2023
- [10] P. Surynková: *3D printed manipulatives as an aid in constructing parallel and central projections of solids*, In Casabò, M. B., Carreira, S., Bolondi, G., Gaidoschick, M. and Spagnolo, C. (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*, 619–622. Bozen-Bolzano, Italy, Free University of Bozen-Bolzano, 2025
- [11] R. Švaříček, K. Šedová, T. Janík, O. Kaščák, M. Miková, K. Nedbálková, P. Novotný, M. Sedláček and J. Zounek: *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*, Portál, Praha, 2014

FACULTY OF MATHEMATICS AND PHYSICS, CHARLES UNIVERSITY, SOKOLOVSKÁ 83, 186 75 PRAHA 8

E-mail address: surynkov@karlin.mff.cuni.cz