South Bohemia Mathematical Letters
Volume 25, (2017), No. 1, 1-8.

SYNTETICKÉ ŘEŠENÍ V GEOMETRII A MOŽNOSTI SOUČASNÉHO SOFTWARU

JIŘÍ BLAŽEK

ABSTRAKT. Článek se zabývá vztahem syntetického řešení v geometrii a možnostmi, které nabízí současné programy typu DGS („Dynamic Geometry Software"). Autor se nejdříve pokouší o obecný popis postupu hledání syntetického řešení geometrického problému. Ten následně ilustruje na konkrétním příkladu, na kterém rovněž ukazuje překážky, které jsou nejčastějšími příčinami neúspěchu v dosažení řešení. Na tomto pozadí se pak autor snaží identifikovat možnou pomoc, který moderní software, jako GeoGebra, nabízí.

ÚVOD

Tento článek je rozdělen do třech hlavních sekcí. První s názvem „Syntetické řešení v geometrii" se na obecné úrovni snaží o formální popis, jak proces hledání syntetického řešení vypadá. V druhé sekci „Ilustrativní příklad a možné překážky", je uvedena úloha z matematické olympiády a postup a rozbor jejího řešení. Následuje zamyšlení, jaké mohou být hlavní důvody studentova neúspěchu při hledání toho řešení. V poslední sekci „Syntetické řešení a moderní software" se pak diskutuje, jak se může změnit přístup k hledání řešení, pokud máme k dispozici software typu GeoGebry [9]: v čem programy typu DGS mohou pomoct a v čem spíše ne. V „Závěru" je pak shrnutí klíčových bodů.

1. SYNTETICKÉ ŘEŠENÍ V GEOMETRII

Na proces dokazování nějakého teorému může být nahlíženo, jako na sled deduktivních kroků od premis přes přechodná tvrzení k tvrzení, které chceme dokázat [1]. Tato „přechodná tvrzení" mají obvykle zpočátku podobu hypotézy. Než vezme nějaké „tvrzení" do úvahy, musí nás na něj „něco" navést, něco, co naznačuje jeho pravdivost. V takzvaném „zjednodušeném Toulminově modelu" (obrázek 1) tuto roli hraje takzvaný „Warrant" [2]. V článku budeme používat český ekvivalent „Odůvodnění". Další faktory, které v tomto modelu vystupují, jsou „Data" (v matematickém kontextu empirická nebo matematická fakta, na jejichž základě lze formulovat hypotézy nebo verifikovat jejich pravdivost), „Backing" (v překladu „podpůrné argumenty (tvrzení)", v našem kontextu je to exaktní matematické zdůvodnění) a již zmíněné „tvrzení" neboli „Claim" (zdůrazněme, že tato hypotetická tvrzení nemusí být nutně pravdivá).

Pro naše potřeby budeme rozlišovat mezi třemi hlavními podobami „odůvodnění":

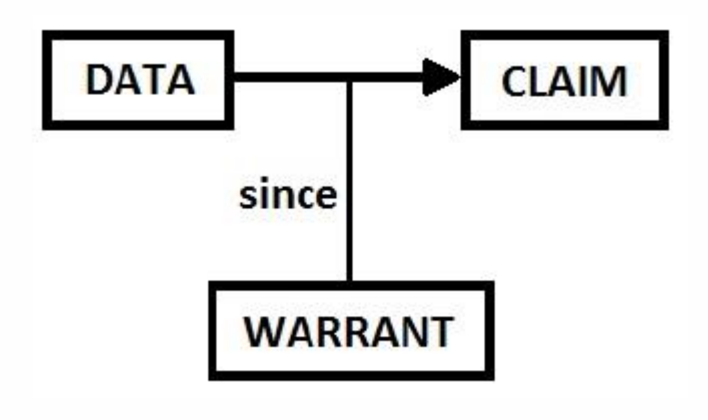
I. Deduktivní odůvodnění.
   Z premis geometrického problému vydedukujeme tvrzení. Pokud jsou platné premisy, je jistě platné i naše tvrzení.
   Příklad: 4 body leží na kružnici ⇒ aplikace věty o obvodových úhlech ⇒ spojnice dvou bodů je ze zbývajících dvou vidět pod stejným orientovaným úhlem.
II. Heuristické odůvodnění.
   Tvrzení dosažené heuristicky je takové, pro které existují logické náznaky, které ale

Received by the editors 17. 1. 2018.
2010 *Mathematics Subject Classification.* 68T15, 97R20, 97U70
Key words and phrases. Syntetické řešení, DGS, GeoGebra

samy o sobě nejsou v dané chvíli dostatečné.
Tři příklady:

- Jisté dva trojúhelníky mají shodný úhel ⇒ tyto trojúhelníky jsou podobné.
- Uvažujme čtyři výroky:
  (A) Všechny fazole světa jsou bílé nebo černé
  (B) Můj bratr dnes koupil bílé fazole
  (C) Na svém talíře mám bílé fazole
  (D) Závěr: tyto fazole tedy koupil můj bratr
  Je zřejmé, že výrok (D) nevyhnutelně neplyne z prvních třech výroků. Je to hypotéza, o jejíž pravdivosti nemůžeme v daném okamžiku s jistotou rozhodnout.
- V průběhu řešení problému můžeme intuitivně hádat, jak toto řešení vypadá. Na tomto základě se ho pak snažíme zdůvodnit a tak potvrdit jeho správnost. Tento „heuristický“ postup je v jistém smyslu opačný k deduktivnímu postupu.

III. Odůvodnění tvrzení na základě empiricky nebo vizuálně zjištěného faktu.
Pro takto zjištěná tvrzení většinou nejsou v dané chvíli žádné logické náznaky. Je to fakt vypozorovaný na konkrétních příkladech buď s pomocí počítačového programu (typu DGS nebo CAS), s pomocí konstrukce studenta nebo díky jeho (přesnému) náčrtku. Příkladem může být konstrukce nějakého problému počítačovým softwarem a vizuální zjištění, že jisté dvě přímky jsou pravděpodobně rovnoběžné. Pokud takto zjištěná tvrzení hrají roli v důkazu problému, musí je student ověřit a následně exaktně matematicky zdůvodnit.
Moderní software je vybaven výjimečně silnými nástroji pro produkci hypotetických tvrzení, ať už na základě vizuálního pohledu nebo empirických dat, která subjektu zpřístupňuje.



OBRÁZEK 1: "Zjednodušený Toulminův model“ (převzato z [4])

Na závěr kapitoly podotkněme, že „Heuristické odůvodnění (tvrzení)“ a „Odůvodnění (tvrzení) na základě vizuálně zjištěného faktu“ se při řešení problému mohou doplňovat nebo prolínat. Pokud však takto zjištěný poznatek hraje v řešení problému roli, musí být následně exaktně (deduktivně) zdůvodněn (v Toulminově modelu faktor „Backing“).

2. Ilustrativní příklad a možné překážky

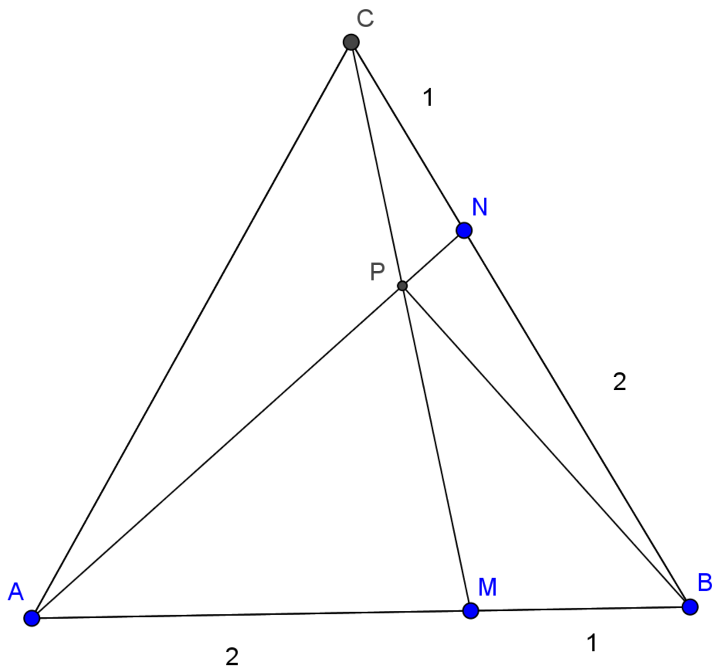
Následující příklad je z krajského kola matematické olympiády kategorie B [3]. Po něm postupně následuje autorův subjektivní popis řešení problému, rozbor tohoto řešení z hlediska výše uvedeného Toulminova modelu a kapitola se uzavírá nastíněním hlavních překážek, které mohou být příčinou selhání pokusů vyřešit problém. Uvedené řešení se (matematicky) zcela shoduje s řešením oficiálním.

Zadání:

Nechť M, N jsou po řadě vnitřní body stran AB, BC rovnostranného trojúhelníku ABC, pro něž platí $|AM|:|MB| = |BN|:|NC| = 2:1$. Označme P průsečík přímek AN a CM. Dokažte, že přímky BP a AN jsou navzájem kolmé.

Postup:

Nejdříve si problém načrtneme:



Obrázek 2: Náčrt problému

Následující „introspekční záznam" ukazuje autorovy postupné úvahy až k samotnému řešení:

„Zpočátku jsem nevěděl, čeho se chytit a jak postupovat. Uvědomil jsem si, že se v zadání mluví o „rovnostranném trojúhelníku", takže jsem se ve svých úvahách pokoušel nějak využít vlastností, které takový trojúhelník má. Krátce na to jsem objevil jisté „tvrzení", které zcela záviselo na definici rovnostranného trojúhelníka: Jelikož jsou všechny strany a úhly trojúhelníka shodné, jsou podle věty sus shodné i trojúhelníky ABN a CAM. Důsledkem je, že velikosti úhlů $\sphericalangle BNA$ a $\sphericalangle CMA$ jsou také shodné, v náčrtku jsem si vyznačil první tvrzení:

1. Tvrzení: $\sphericalangle BNA = \sphericalangle CMA$

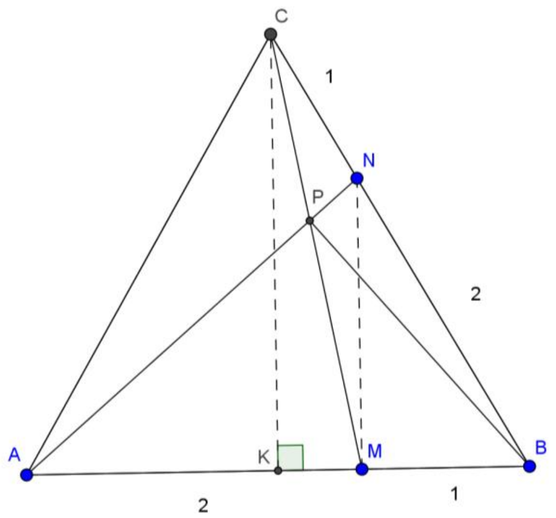
Je však toto tvrzení ve vztahu k cíli vůbec k něčemu? Tím jsem si zpočátku nebyl jistý. Položil jsem si otázku: má toto tvrzení nějaký důsledek? Krátce na to jsem jeden objevil: Jelikož součet $\sphericalangle CMB + \sphericalangle ANB = 180°$ lze čtyřúhelníku $PMBN$ opsat kružnici.

2. Tvrzení: Čtyřúhelník $PMBN$ je tětivový

Přestože jsem si uvědomoval, že na tětivové čtyřúhelníky lze aplikovat větu o obvodových úhlech, stále mi nebylo jasné, jaká je souvislost mezi tímto čtyřúhelníkem a úhlem $\llcorner APB$. Díval jsem se do náčrtku a bez nějakého vědomého záměru jsem načrtnul úsečku NM. Můj náčrtek byl dostatečně přesný na to, abych vyslovil hypotézu, že úsečka NM svírá pravý úhel se stranou AB.

3. Tvrzení: $\sphericalangle NMB = 90°$

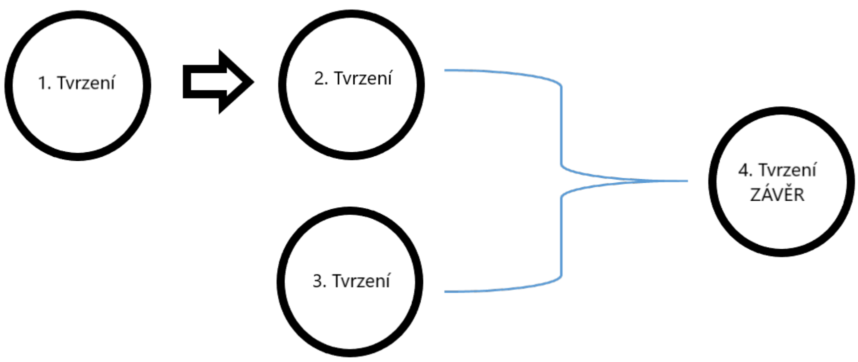
Jak souvisí toto tvrzení s cílem úlohy? To už bylo jednoduché, podle věty o obvodových úhlech platí rovnost $\sphericalangle NMB = \sphericalangle NPB$. Pokud je tedy „3. Tvrzení“ pravdivé, je problém vyřešen.



OBRÁZEK 3: Zdůvodnění "3. Tvrzení"

Označme K patu výšky z bodu C na stranu AB, pak zřejmě $\frac{KB}{MB} = \frac{1.5}{1} = \frac{3}{2}$. Pro úsečky NB a CB podle zadání platí: $\frac{CB}{NB} = \frac{3}{2}$. Z toho plyne, že přímky CK a MN jsou rovnoběžné a tedy přímka MN svírá se stranou AB pravý úhel.“ ■

Provedeme nyní rozbor řešení z hlediska Toulminova modelu. „1. Tvrzení“ bylo vysloveno na základě deduktivních úvah, jeho odůvodnění bylo tedy „deduktivní“. Hlavní výhoda takto získaného tvrzení je jistota nebo znalost podmínek jeho pravdivosti. „2. Tvrzení“ mělo rovněž „deduktivní odůvodnění“, bylo ale závislé na předcházejícím tvrzení. Pokud bychom první tvrzení nezaregistrovali, museli bychom na vlastnost čtyřúhelníku přijít jinak než deduktivně. „3. Tvrzení“ pak mělo „odůvodnění na základě empiricky nebo vizuálně zjištěného faktu“. Takto získané tvrzení nemusí být nutně pravdivé, a pokud hraje klíčovou roli v důkazu, musí být poté precizně matematicky zdůvodněno. V modelu se jedná o faktor „Backing“ a jeho provedení je ilustrováno ve výše uvedeném příkladu. Schéma řešení úlohy tedy můžeme znázornit následovně:



OBRÁZEK 4: Schéma řešení problému

Jaké tedy jsou hlavní překážky, které stojí před řešitelem problému? Tou nejzřejmější překážkou jsou znalosti studenta. Pokud student neví, že z rovnosti $\frac{KB}{MB} = \frac{CB}{NB}$ vyplývá rovnoběžnost přímek CK a MN, problém buď nevyřeší, nebo bude muset objevit několik dalších (často netriviálních) „tvrzení“. Může se stát, že student všechny potřebné znalosti má – ve výše uvedeném příkladu to jsou: podmínky shodnosti trojúhelníků, podmínky, které určují tětivový čtyřúhelník a podmínky, které určují rovnoběžnost přímek – a přesto problém nevyřeší. Co je tedy těmi hlavními překážkami? Podle autorova názoru jsou dvě.

1) Student může mít potřebné znalosti, ale nedokáže je v daném případě aplikovat nebo si uvědomit jejich důsledky. V ilustrativním příkladu může znát podmínky shodnosti trojúhelníků, a přesto vůbec nemusí vzít do úvahy, že úhly $\sphericalangle BNA$ a $\sphericalangle CMA$ jsou shodné. Student v takovém případě neodvodí tvrzení deduktivně a musí mu pomoct empirie – například pohled na vizuální konstrukci nebo nějaké měření
2) Student se nedokáže rozhodnout, kterým směrem se při řešení vydat, nedokáže „vycítit“, která „tvrzení“ jsou vzhledem k řešení problému relevantní a která nikoli. Tohle je pravděpodobně největší problém v práci matematika obecně. Při řešení složitých problémů není jasné, které cesty vedou k cíli a které jsou slepé. Zde se nejvíce uplatňuje matematikova zkušenost (analogické úlohy a jejich klíčové myšlenky), intuice a talent. Tyto faktory jsou doménou kognitivní psychologie.

3. SYNTETICKÉ ŘEŠENÍ A MODERNÍ SOFTWARE

Tato kapitola na přecházejícím příkladu ilustruje, v čem může software (v případě tohoto článku GeoGebra) pomoct a v čem spíše ne.

V první kapitole jsme mluvili o třech druzích „odůvodnění“ pro to, abychom tvrzení v průběhu řešení problému vzali do úvahy a zdůraznili jsme, že počítačové programy jsou schopny poskytnout výjimečně silná empirická a vizuální data pro formulaci hypotetického tvrzení. Tato data, které programy typu GeoGebry zpřístupňují, mají rozličnou podobu v závislosti na druhu otázky studenta a funkcích programu.

Rozdělme je do třech skupin.

- Statická data. Ve statickém náčrtku můžeme zjistit, že jsou jisté geometrické veličiny shodné (délky dvou úseček, velikosti dvou úhlů, obsahy dvou útvarů), nebo můžeme zjistit vztah mezi geometrickými objekty (body ležící na kružnici nebo na přímce, rovnoběžnost přímek atd.)
- Dynamická data. To, co je na programech typu DGS nejvíce oceňováno, je jejich dynamický aspekt. Pohybujeme nezávislými objekty (obvykle se jedná o body, ale můžeme se jednat o velikost poloměru kružnice nebo jiné parametry geometrických objektů) a sledujeme, jak se mění objekty na nich závislé. Při takové transformaci geometrické konstrukce si můžeme všimnout vztahů, které jsou nějakým způsobem invariantní. Například: „jistý bod se pohybuje po kuželosečce“, „jistý úhel je stále stejný“, „součin délek dvou úseček je konstantní číslo“. Přísně vzato jsou tyto „invariantní vztahy“ obsažené už ve statickém náčrtku, ale v něm je obtížné ne-li nemožné postřehnout.
- Analytická data. Většina současných programů, původně typu DGS, zařazuje do svého repertoáru nástroje, které byly až do nedávna doménou programů spadajících pod souhrnné označení CAS (Computer Algebra Systems). Hlavní výhoda softwaru CAS je jeho symbolická obecnost a z toho plynoucí schopnost poskytnout nejen analytické řešení konkrétního problému ale také analyticky dokázat teorém v celé své obecnosti. Rovnici množiny bodů v programu GeoGebra určíme příkazem „RovniceMnozinyBodu“ („LocusEquation“) [5] a teorém dokazujeme příkazem

„Dokazat“ („Prove“) [6]. Tyto nové možnosti ale zatím trpí „porodními bolestmi“ a v současnosti zvládnou jenom jednodušší problémy.

Ve vztahu k Toulminově modelu můžeme rovněž rozdělit data poskytnutá softwarem do dvou skupin, a to z hlediska jejich účelu:

- Data, která subjektu slouží k objevení hypotetického tvrzení
- Data, která subjektu slouží k verifikaci hypotetického tvrzení

Uvedeme malý příklad z autorovy praxe: při zkoumání konstrukce jistého „speciálního“ objektu v DGS byla na základě vizuálního vnímání vyslovena domněnka, že jistý bod je vždy obrazem jiného bodu konstrukce v určité kruhové inverzi. Tato domněnka byla následně empiricky potvrzena. Poté byla induktivně (v kontextu tohoto článku „heuristicky“) zobecněna: „Tento bod je obrazem druhého bodu pro jakýkoli objekt dané třídy, nikoli pouze pro ten, který označujeme jako speciální“. I tato domněnka byla empiricky ověřena a až poté exaktně dokázána. Stručně bychom tuto sekvenci mohli zaznamenat: 1) objev domněnky („Tvrzení“), s pomocí softwaru, data: dynamická 2) verifikace domněnky, s pomocí softwaru, data: dynamická 3) zobecnění domněnky subjektem 4) verifikace zobecněné domněnky, s pomocí softwaru, data: dynamická 5) matematicky exaktní důkaz domněnky („Backing“).

Vraťme se k příkladu z olympiády. Jeho určitou nevýhodou je, že je statického charakteru, nemůžeme na něm tedy ilustrovat „dynamická data“ GeoGebry ať už ve vztahu k objevení domněnky nebo její verifikace. Soustřeďme se tedy na statická data: jak nám software může pomoct k nalezení domněnky?

Odpověď je prostá: je to pouze přesnost náčrtku, která je mnohem větší než při klasické konstrukci s pravítkem a tužkou. V tomto případě jsou „1. a 2. Tvrzení“ (viz předchozí kapitola) obsažena v náčrtku. Pokud je student neobjeví „deduktivně“ nebo „heuristicky“ musí ho upoutat vizuální vnímání.

Jakmile tato (zatím hypotetická) tvrzení objeví, může je s pomocí softwaru okamžitě verifikovat. Pokud se ukážou jako pravdivá, student musí odhadnout, zda v důkazu hrají roli nebo ne. Za předpokladu, že ano, je nutné je logicky zdůvodnit, tedy určit, jak souvisejí s tím, co je ze zadání známo. V případě těchto dvou tvrzení jsou 3 možnosti:

a) Z „1. Tvrzení“ vyplývá (nějakým způsobem) „2. Tvrzení“
b) Z „2. Tvrzení“ vyplývá „1. Tvrzení“
c) „1. a 2. Tvrzení“ jsou na sobě nezávislá (jsou důsledkem různých premis)

V našem případě (vzhledem k zadání úlohy) je správná pouze první možnost.

I „3. Tvrzení“ lze vizuálně objevit, ale není to tak jednoduché, neboť body M, N nejsou spojené. Úkol by byl ještě těžší, pokud by (nespojených) bodů bylo v náčrtku víc a pokud by úhel, který přímky svírají, nebyl pravý, ale třeba 60°. Můžeme říct, že s rostoucí složitostí náčrtku pravděpodobnost objevení „tvrzení“ na základě pouhého vizuálního pohledu „exponenciálně“ klesá. Problémy jsou následující:

I. Student neví, co přesně má hledat (úhly, délky úseček, rovnoběžnost…)
II. Kandidátů na to, co změřit nebo co může být shodné, může být příliš mnoho
III. Student neví, zda *v daném* (statickém) náčrtku je vůbec něco, co s klíčovou myšlenkou důkazu souvisí

Věnujme se nejdříve prvním dvěma bodům. Práci studenta se softwarem můžeme chápat jako dialog. Student musí v řeči softwaru formulovat otázku, a ten mu ji (ve většině případů) zodpoví. Pokud však bude student otázky klást náhodně, jen zřídka se dočká odpovědi, která by byla k něčemu. Smysluplná je taková otázka, o které si myslíme, že odpověď na ni nám může pomoct. Experimentování bez zřejmého účelu zřídka vede k cíli. Pokud se student dostane do situace, kterou lze charakterizovat těmito body, musí se nechat vést logickými náznaky a intuicí.

Jsou pokusy překonat problémy nastíněné v bodech I. a II. tzv. automatickým pozorováním [1]. Program OK Geometry [7, 8] se snaží z konstrukce „vypozorovat“ všechny invariantní vztahy a vypsat je řešiteli. Nebudeme se zde tomuto programu detailně věnovat, ale jedna z těžkostí, která tyto pokusy provází, je velké množství získaných „tvrzení“ a obtížnost rozhodnout, která tvrzení jsou vzhledem k řešení relevantní.

Poslední, třetí bod, je největší překážkou, kterou nepřekoná ani „automatické pozorování“. Abychom v našem ilustrativním příkladu exaktně zdůvodnili „3. Tvrzení“, museli jsme v náčrtku zkonstruovat nový bod K. Jakmile je tento bod zkonstruován, jsou ve statickém náčrtku obsažena všechna data, která k řešení potřebujeme. Budeme říkat, že takový náčrtek je „vyčerpávající“. Co však dělat, pokud nám k řešení něco chybí a my nevíme co? Opět není jiné možnosti než se spolehnout na „dedukci“ nebo „heuristiku“ (ve smyslu uvedeném v první kapitole) nebo na vhodnou pomoc učitele, který řešení problému zná.

ZÁVĚR

Shrňme tedy předchozí úvahy:

Pokud se jedná o produkci hypotetických tvrzení, je silnou stránkou GeoGebry možnost transformovat konstrukci a sledovat invarianty, ať už se jedná o stopu pohybujícího se objektu nebo velikost určité geometrické veličiny. Ve statickém náčrtku může být pomoc GeoGebry také značná, ale s rostoucí složitostí náčrtku šance na to, že relevantní tvrzení objevíme „vizuálně“, prudce klesá.

Nezastupitelnou roli hraje GeoGebra ve verifikaci tvrzení. Pokud problém není složitý, může student intuitivně „chrlit“ hypotézu za hypotézou s tím, že některá bude třeba pravdivá. Empirické zjištění o pravdivosti naší hypotézy má při řešení náročnějších problémů ohromný dopad, pokud je hypotéza pravdivá, utvrdí nás to, že jsme na správné cestě. V opačném případě si můžeme ušetřit spoustu času.

Pokud máme „vyčerpávající“ náčrtek problému, stojí před studentem několik problémů:

- experimentálně nebo intuitivně objevit hypotetická tvrzení
- určit, která tvrzení jsou vzhledem k řešení problému relevantní
- matematicky tato tvrzení „pospojovat“: jejich vzájemnou návaznost na sebe a na premisy

Pokud „vyčerpávající“ náčrtek nemáme, nestačí se nechat vést experimentálně zjištěnými fakty. Student musí v takovém případě mobilizovat své znalosti a intuici.

Software jako GeoGebra nepochybně napomáhá k nalezení řešení. Zodpoví nám většinu otázek, které jsme schopni v řeči tohoto programu formulovat. Pokud se jedná o konstrukci neznámého objektu s požadovanými vlastnostmi, je GeoGebra s implementovaným softwarem CAS schopna v některých případech tento objekt zkonstruovat a je zřejmé, že rozsah a náročnost těchto případů bude jen narůstat. Syntetické řešení nám GeoGebra sice sdělit nedokáže, ale díky jejím rysům je snadnější získat klíčová data. Tento článek měl za cíl uvést čtenáře do problematiky, jaké překážky před subjektem stojí, pokud bude řešit problém s pomocí tohoto programu.

LITERATURA

[1] Magajna, Z.: Automated Observation of Dynamic Construction, *The International for Technology in Mathematics Education 24*, 2016, 115-120.

[2] Pedemonte, B.: How can the relationship between argumentation and proof be analyzed?, *Educational Studies in Mathematics 66*, 2007, 23-41

[3] Matematická olympiáda - http://www.matematickaolympiada.cz/media/440780/B60ii.pdf

[4] Toulminův model - http://www.nuffieldfoundation.org/practical-work-learning/what-does-argumentation-look-practice

[5] Příkaz Locus Equation - https://wiki.geogebra.org/en/LocusEquation_Command

[6] Příkaz Prove - https://wiki.geogebra.org/en/Prove_Command

[7] OK Geometry - http://z-maga.si/UserFiles/File/helpOkIntroEng.pdf

[8] OK Geometry - http://z-maga.si/index?action=article&id=40

[9] GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone - http://www.geogebra.org

KATEDRA MATEMATIKY, PEDAGOGICKÁ FAKULTA JIHOČESKÉ UNIVERZITY, ČESKÉ BUDĚJOVICE, ČESKÁ REPUBLIKA

E-mail address: jirablazek@gmail.com