South Bohemia Mathematical Letters
Volume 23, (2015), No. 1, 1-7.

POČÍTAČOVÁ SIMULÁCIA VO VYUČOVANÍ NÁHODNÝCH JAVOV

ZOLTÁN FEHÉR

Abstrakt. V príspevku sa zaoberáme poznámkami k vyučovaniu náhodných javov využitím počítačovej simulácie. Budeme sa zaoberať základnými prípadmi náhodných javov vyučovaných v školskej matematike. Vyšetríme problém potrebného počtu opakovania náhodného pokusu, aby pozorované výsledky boli v súlade s teoretickými výsledkami s danou pravdepodobnosťou. Na základe výpočtov zdôrazníme potrebu vykonania dostatočne veľkého počtu opakovaní, čo už vyžaduje využitie výpočtovej techniky. Ďalším cieľom príspevku je ukážka využitia GeoGebry pre vytvorenie simulácií, predstavíme niekoľko ilustračných príkladov.

Úvod

Vo vyučovaní náhodných javov žiaci získajú skúsenosti z pozorovania týchto javov. Na tieto účely využívame experimentovanie. Je dôležité, aby pozorovania a z nich vyplývajúce závery boli správne interpretované v súlade s teoretickými zákonmi. V školskej matematike sa zaoberáme len so základnými prípadmi náhodných javov, ktoré súvisia s číselnými hazardnými hrami, výberom prvkov alebo javmi z reálneho života. Niektoré javy môžeme pozorovať aj v školských podmienkach, napr. hádzanie mincou, kockami, a tak vytvoriť pravdepodobnostné modely týchto javov. V článku [5] Štěpánková poukazuje na problémy vyučovania pravdepodobnosti na ZŠ a SŠ a na niektoré nedostatky v chápaní pravdepodobnosti, ktoré sú dôsledkom nesprávneho pochopenia a zlej interpretácie základných pojmov.

V rámci vyučovacej hodiny vieme uskutočniť reálne experimenty aj simulácie pokusov využitím výpočtovej techniky. Reálne experimenty ponúkajú možnosť aktívneho prístupu žiakov, ale neumožnia vykonať väčší počet opakovaní. V závislosti od náhodného javu sa dá odhadnúť počet opakovaní na rádovo niekoľko sto. Počítačová simulácia umožní vykonať rádovo aj milión opakovaní v závislosti od použitého softvéru. Práve väčší počet opakovaní umožní správne demonštrovať daný náhodný jav a tak dospieť k správnym záverom. V tomto prípade sa žiaci nachádzajú len v úlohe pasívneho pozorovateľa.

V tomto článku vyšetríme niekoľko prípadov náhodných javov a určíme potrebný počet opakovaní, aby sme mohli – na základe pozorovaných výsledkov – správne interpretovať jednotlivé javy. Ukážeme, že len v jednoduchších prípadoch môže stačiť niekoľko sto opakovaní, v ostatných prípadoch už potrebujeme vykonať viac opakovaní a preto je potrebné udalosti simulovať počítačom.

Key words and phrases. náhodný jav, simulácia, GeoGebra.

Príspevok vznikol v rámci projektu MŠVVaŠ SR KEGA 002UJS-4/2014 „Interactive electronic learning materials to support implementation of modern technology in teaching mathematics and informatics".

Počítačové simulácie, ktoré používame na demonštráciu náhodných javov v tomto príspevku sme vytvorili v GeoGebre [1], čo je v súčasnosti už všeobecne rozšírený a používaný softvér vo vyučovaní matematiky. V príspevku chceme ukázať, že v GeoGebre môžeme vytvoriť aj simulácie a tým sa naskytnú ďalšie možnosti jej využitia, v tomto prípade vo vyučovaní náhodných javov. Vytvorené aplety pre niektoré náhodné javy vyučované v školskej matematike sme zverejnili v GeoGebraBook: Simulations [2].

1. Pozorovanie náhodných javov

Ak chceme pozorovať náhodnú udalosť, ktorá nastane s pravdepodobnosťou $0 < p < 1$, potrebujeme vykonať náhodný pokus. Aby sme udalosť pozorovali so 100%-nou určitosťou (t.j. pravdepodobnosť toho, že udalosť nastane aspoň raz, bude $q = 1$), teoreticky potrebujeme vykonať nekonečne veľa opakovaní pokusu. Ale ak znížime určitosť na hodnotu $0 < q < 1$, tak počet opakovaní bude konečné číslo, ktoré vieme vypočítať.

Počet opakovaní pokusu potrebných k tomu, aby sme udalosť s pravdepodobnosťou p $(0 < p < 1)$ pozorovali aspoň raz s určitosťou najmenej q $(0 < q < 1)$ je

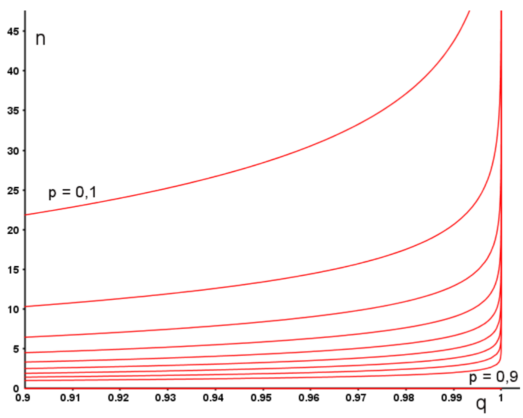
$$n \geq \frac{\log(1-q)}{\log(1-p)}.$$

Napríklad s určitosťou $q = 0{,}95$ budeme pozorovať udalosť aspoň jedenkrát, ak počet opakovaní je

$n \geq 5$	pre $p = 1/2$
$n \geq 17$	pre $p = 1/6$
$n \geq 299$	pre $p = 1/100$

Tabuľka 1.

Na obrázku 1. sme znázornili závislosť počtu opakovaní od hodnoty q s parametrom p.



Obr. 1. Závislosť počtu opakovaní n od hodnoty q

2. Pozorovanie relatívnej početnosti

Ak uskutočníme pokus na demonštrovanie náhodného javu a udalosť chceme pozorovať viackrát, potom v opakovanom experimente zaznamenáme počet vyskytnutia udalosti, z čoho určíme relatívnu početnosť. Pravdepodobnosť toho, že odchýlka relatívnej početnosti k/n pozorovanej udalosti a pravdepodobnosti p je menšie, ako číslo $\varepsilon > 0$ určíme podľa vzťahu

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1$$

Funkcia $\Phi(z)$ označuje distribučnú funkciu štandardného normálneho rozdelenia, ktorej inverzná funkcia je $\Phi^{-1}(z)$. Pri danej určitosti $0 < q < 1$ bude

$$2 \cdot \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1 \geq q,$$

z čoho pre počet opakovaní n dostaneme

$$n \geq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \cdot \left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2.$$

Na základe tohto vzťahu určíme, koľko opakovaní potrebujeme vykonať v pokuse s jednou mincou, aby relatívna početnosť padnutia hlavy mala odchýlku od pravdepodobnosti $p = 0,5$ menšiu ako $\varepsilon > 0$ s určitosťou najmenej q. V tabuľke 2. uvádzame počet opakovaní n.

Minca	Odchýlka $\varepsilon \cdot 100\%$			
určitosť $q \cdot 100\%$	10%	5%	2%	1%
95%	97	385	2 401	9 604
97%	118	471	2 944	11 774
99%	166	664	4 147	16 587

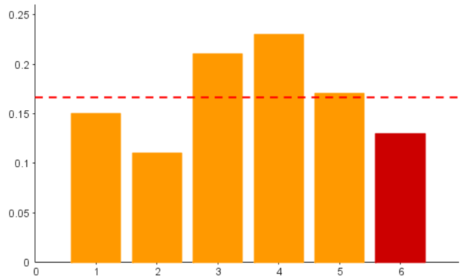
Tabuľka 2.

Ak hádžeme jednou kockou, tak pravdepodobnosť padnutia ľubovoľnej strany je $1/6$. V tabuľke 3. sme vypočítali potrebný počet opakovaní, koľkokrát musíme hádzať kockou, aby s určitosťou najmenej q bol rozdiel relatívnej početnosti a pravdepodobnosti $p = 1/6$ menšie ako ε.

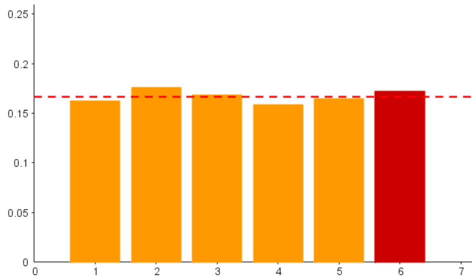
Kocka	Odchýlka $\varepsilon \cdot 100\%$			
určitosť $q \cdot 100\%$	10%	5%	2%	1%
95%	54	214	1 334	5 336
97%	66	262	1 636	6 541
99%	93	369	2 304	9 216

Tabuľka 3.

Podľa tabuľky 3. pre $n = 214$ opakovaní pokusu relatívna početnosť padnutia ľubovoľnej strany kocky bude s 95%-nou určitosťou v intervale od 11,7% do 21,7%, teda udalosť by sme mali pozorovať najmenej 25-krát a najviac 46-krát. Aby sme znížili túto 5%-nú odchýlku na 2% alebo 1%, počet opakovaní treba zvýšiť najmenej na 1 334 resp. 5 336.



value	1	2	3	4	5	6	total
freq	15	11	21	23	17	13	100
rel freq	0.15	0.11	0.21	0.23	0.17	0.13	



value	1	2	3	4	5	6	total
freq	81	88	84	79	82	86	500
rel freq	0.162	0.176	0.168	0.158	0.164	0.172	

Obr. 2. Porovnanie výsledkov pri počte opakovaní 100 a 500

Na obrázku 2. ilustrujeme prípad, keď menší počet opakovaní pokusu neumožní overiť hodnotu pravdepodobnosti na základe pozorovania. Získané výsledky nie sú v súlade s tvrdením, že pravdepodobnosť padnutia ľubovoľnej strany je 1/6, túto skutočnosť pozorujeme až pri dostatočne veľkom počte opakovaní pokusu.

3. Súčet bodov na 2 alebo 3 kockách

Úlohy súvisiace s hádzaním dvoma alebo tromi kockami patria tiež k základným prípadom vyučovania pravdepodobnosti. V súvislosti s pokusom s 2 alebo 3 kockami sa najčastejšie venujeme otázke súčtu bodov 9 a 10. Nedostatočné znalosti žiakov často vedú k predpokladu, že súčet 9 aj 10 nastane rovnako dvomi spôsobmi, lebo

$$9 = 3 + 6 = 4 + 5$$
$$10 = 4 + 6 = 5 + 5.$$

Ako poukázať na nesprávnosť tohto predpokladu? Pri riešení môžeme zvoliť teoretický postup vysvetlenia, ale výhodné je aj demonštrovať pokus, aby žiaci získali skúsenosti aj z výsledkov pozorovania. Naskytá sa otázka: koľko opakovaní treba uskutočniť?

Ak hádžeme 2 kockami, tak pre pravdepodobnosti, že súčet padnutých bodov je 9 alebo 10 platí

$$P(\text{súčet} = 9) = \frac{4}{36} > P(\text{súčet} = 10) = \frac{3}{36}.$$

Ak hádžeme 3 kockami, tak súčet 10 bude mať väčšiu pravdepodobnosť ako 9, lebo

$$P(\text{súčet} = 9) = \frac{25}{216} < P(\text{súčet} = 10) = \frac{27}{216}.$$

V jednotlivých prípadoch je rozdiel medzi pravdepodobnosťami $1/36$ resp. $2/216$, preto pri menšom počte opakovaní predpokladaný rozdiel vo výsledkoch pokusu nemusí nastať. Problematike súčtu bodov na 3 kockách sa venoval aj Galileo Galilei, jeho riešenie nájdeme v článku [3], anglický preklad v [4]. Zostáva otvorená otázka, či Galilei robil pokusy s 3 kockami, ak áno, potom koľko opakovaní vykonal? Vyšetrime teda otázku, koľko opakovaní potrebujeme uskutočniť v pokuse s 2 resp. 3 kockami, aby sme vo výsledkoch pozorovali predpokladaný rozdiel medzi hodnotami 9 a 10 s určitosťou najmenej q?

Súčet rovnakých nezávislých náhodných premenných má podľa Centrálnej limitnej vety približne normálne rozdelenie so strednou hodnotou $M = nm$ a disperziou $D = \sqrt{n} \cdot \sigma$. V prípade dostatočne veľkého počtu pokusov súčet bodov na kockách má približne normálne rozdelenie. Potom pravdepodobnosť toho, že medzi súčtami 9 a 10 nastane predpokladaný rozdiel je

$$P \approx 1 - \Phi\left(\frac{-nm}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right).$$

Hodnotu počtu opakovaní n pri ktorej určitosť q je vopred dané číslo určíme vzťahom

$$n \geq \left[\frac{\sigma}{m} \cdot \Phi^{-1}(1-q)\right]^2.$$

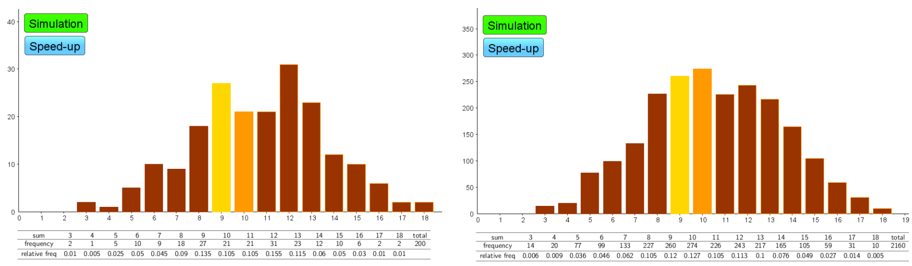
V prípade 2 kociek bude $m_2 = 1/36$ a $\sigma_2 = 0{,}44$, v pokuse s 3 kockami dosadíme $m_3 = 2/216$ a $\sigma_3 = 0{,}49$.

V tabuľke 4. uvádzame niektoré hodnoty počtu opakovaní n.

$q \cdot 100\%$	2 kocky	3 kocky
95%	680	7 596
97%	888	9 932
99%	1 359	11 194

Tabuľka 4.

Teda v pokuse s 3 kockami (obr. 3) aspoň s 95%-nou určitosťou budeme pozorovať, že súčet 10 nastane viackrát ako súčet 9 (v súlade s teóriou), ak vykonáme najmenej 7 596 opakovaní. Aj pri tomto veľkom počte je 5%-né riziko, že očakávaný rozdiel medzi početnosťou hodnôt 9 a 10 nenastane.



Obr. 3. Pozorovanie súčtu bodov na 3 kockách

4. Využitie simulácie pri riešení úlohy

V predchádzajúcich prípadoch sme použili simulácie predovšetkým na demonštráciu náhodných javov. Vo vyučovaní môžeme využiť počítačové simulácie aj v rôznych iných prípadoch, napr. na overenie teoretického vzťahu, na znázornenie pojmov, súvislostí alebo aj ako pomôcku pri riešení úloh. Budeme to ilustrovať na nasledujúcej úlohe: *Hádžeme jednou hracou kockou kým súčet bodov nedosiahne vopred dané číslo. Hľadáme pravdepodobnostné rozdelenie počtu potrebných opakovaní.*

Teoretický výsledok na výpočet pravdepodobnosti počtu potrebných opakovaní pokusu je daný rekurentným vzťahom

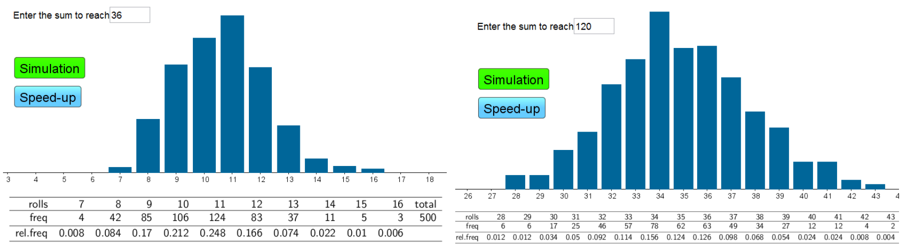
$$P(\xi_t = S) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} P(\xi_{t-1} = S - i),$$

kde t je počet pokusov potrebných na dosiahnutie čísla S (cieľová suma). Pre niektoré menšie hodnoty čísla S pomocou rekurentného vzťahu môžeme určiť pravdepodobnostné rozdelenie počtu potrebných pokusov. Napríklad súčet $S = 6$ môžeme dosiahnuť hneď na prvý pokus s pravdepodobnosťou $1/6$, najviac môžeme potrebovať $t = 6$ pokusov. Nastane to v prípade, ak päťkrát hádžeme 1 a na šiesty pokus ľubovoľné číslo. Pravdepodobnostné rozdelenie $P(\xi_t = 6)$ uvádzame v tabuľke 5.

$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$
$\frac{1}{6}$	$\frac{20}{6^2}$	$\frac{50}{6^3}$	$\frac{55}{6^4}$	$\frac{29}{6^5}$	$\frac{1}{6^5}$

Tabuľka 5.

Pre číslo $S = 36$ pravdepodobnostné rozdelenie má už 31 hodnôt. Aby sme ich vypočítali podľa rekurentného vzťahu, potrebujeme určiť hodnoty pravdepodobnostného rozdelenia pre čísla $S - 1$, $S - 2$ až $S - 6$. Určiť pravdepodobnosti pre tieto hodnoty bez využitia počítača je veľmi zdĺhavé. Preto v týchto prípadoch, keď priamy výpočet je náročný, časovo príliš zdĺhavý, alebo vyžaduje pre žiakov neznáme teoretické vedomosti je výhodné využiť počítačovú simuláciu na pozorovanie rozdelenia pravdepodobnosti (obr. 4.).



rolls	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	total
freq	4	42	85	106	124	83	37	11	5	3	500
rel.freq	0.008	0.084	0.17	0.212	0.248	0.166	0.074	0.022	0.01	0.006	

rolls	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
freq	6	6	17	25	46	57	78	62	63	49	34	27	12	12	4	2
rel.freq	0.012	0.012	0.034	0.05	0.092	0.114	0.156	0.124	0.126	0.098	0.068	0.054	0.024	0.024	0.008	0.004

Obr. 4. Simulácia úlohy pre $S = 36$ a $S = 120$

Počítačová simulácia nám umožní pozorovať pravdepodobnostné rozdelenie počtu potrebných pokusov pre rôzne hodnoty S. Tiež môžeme využiť na overenie Centrálnej limitnej vety, podľa ktorej súčet padnutých bodov má približne normálne rozdelenie, ak S je dostatočne veľké číslo. Zistením, že pravdepodobnostné rozdelenie pre väčšie hodnoty S má približne normálne rozdelenie nám dáva možnosť vykonať výpočty pomocou distribučnej funkcie $\Phi(x)$ normálneho rozdelenia.

Záver

V článku sme vyšetrili potrebný počet opakovaní náhodného pokusu v niektorých základných prípadoch školskej matematiky. Potreba väčšieho počtu opakovaní pokusu je jeden z hlavných dôvodov využitia počítačovej simulácie vo vyučovaní náhodných javov.

Literatúra

[1] GeoGebra [online]. Dostupné z http://www.geogebra.org
[2] FEHÉR, Zoltán. GeoGebraBook: Simulations [online]. Dostupné z http://tube.geogebra.org/material/simple/id/640259#
[3] GALILEI, Galileo: Sopra il giuoco de dadi, p. 56-57. In: *Biblioteca Enciclopedica Italiana* vol. XX, Opere di Galileo Galilei, 1832. [online] Dostupné z https://books.google.sk/books?id=UMSrg9Yr1AwC&pg=PA56&dq=Biblioteca+Enciclopedica+Italiana+Galileo+Galilei+sopra+il+giuoco+de+dadi&hl=hu&sa=X&ved=0CBoQ6AEwAGoVChMI_fnXi4-SyQIVA1YaCh1w3gg7#v=onepage&q=Biblioteca%20Enciclopedica%20Italiana%20Galileo%20Galilei%20sopra%20il%20giuoco%20de%20dadi&f=false
[4] GALILEI, Galileo. Sopra la scoperte dei dadi (On a discovery concerning dice), trans. E. H.Thorne. In: F. N. David, *Games, Gods, and Gambling*, New York: Hafner, 1962, p. 192–195. [online] Dostupné z http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/galileo.pdf
[5] ŠTEPÁNKOVÁ, Radka: Výuka pravděpodobnosti na středních školách pomocí počítačové simulace metodou Monte Carlo. In: *Integrace elektronických prostředí pro počítačem podporovanou výuku matematiky*. České Budějovice 2012, p. 127-140. ISBN 978-80-7394-386-8.

Katedra matematiky a informatiky, Univerzita J. Selyeho, Komárno, SR
E-mail address: feherz@ujs.sk