South Bohemia Mathematical Letters
Volume 25, (2017), No. 1, 17-27.

POČÍTAČOVÁ DEKOMPOZICE POLYNOMU NA SOUČET ČTVERCŮ V HISTORICKÝCH SOUVISLOSTECH

JAN FRANK

ABSTRAKT. Jedním ze základních problémů matematiky je dokázat, že jistý polynom ***f*** je pozitivně semidefinitní, tedy že pro všechny reálné hodnoty neurčitých ***x*** nabývá tento polynom pouze nezáporných hodnot. Jednou z metod důkazu je rozložit polynom ***f*** na součet čtverců. Tento způsob důkazu úzce souvisí s tzv. 17. Hilbertovým problémem předneseným na mezinárodním kongresu matematiků v roce 1900. V jednodušších případech (polynomy jedné neurčité) se může jednat i o příklady řešitelné na středních školách, ve složitějších případech (polynomy více neurčitých) se může jednat o úlohy velmi náročné a rozsáhlé, kdy jejich řešení raději přenecháme počítačovému softwaru.

ÚVOD

Z historie matematiky známe celou řadu problémů, které více či méně fascinovaly filosofy, matematiky i další vědce z různých oborů. Můžeme kupříkladu zmínit hledání přesné hodnoty Ludolfova čísla π, které v moderní době vyústilo doslova v závod ve zpřesňování hodnoty této matematické konstanty s využitím počítačů a matematického softwaru. Pochopitelně by takových problémů bylo možné uvést celou řadu, ne každý je však tak všeobecně známý jako výše uvedený příklad.

Jedním z takových základních matematických problémů je dokázat, že jistý reálný polynom ***f*** je pozitivně semidefinitní, v češtině lze též užívat označení, že je polynom ***f*** nezáporný. Užijeme-li terminologii známou z určování druhů kvadratických forem, můžeme pomocí definice vymezit následující případy.

Definice 1: Polynom $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ se nazývá:

a) pozitivně definitní	$\Leftrightarrow$	$\forall x_i \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$
b) pozitivně semidefinitní	$\Leftrightarrow$	$\forall x_i \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$
c) negativně definitní	$\Leftrightarrow$	$\forall x_i \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$
d) negativně semidefinitní	$\Leftrightarrow$	$\forall x_i \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$

Z definice 1 je zřejmé, že polynom ***f*** je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když pro všechny reálné hodnoty neurčitých ***x*** nabývá pouze nezáporných hodnot. V případě ostré nerovnosti pak polynom ***f*** nabývá pouze kladných hodnot a stává se pozitivně definitním. [1]

Jednou z metod, kterou lze při důkazu, že daný polynom ***f*** je pozitivně (semi)definitní, využít, je rozklad polynomu na součet čtverců (též druhých mocnin). Tento způsob důkazu úzce souvisí s tzv. Hilbertovými problémy, konkrétně pak se zněním 17. Hilbertova problému, a v případě polynomů více neurčitých se může jednat o velmi rozsáhlé a náročné úlohy, při jejichž řešení se dnes neobejdeme bez počítačového softwaru.

Key words and phrases. pozitivně semidefinitní polynom, rozklad na součet čtverců (SOS), 17. Hilbertův problém, Motzkinův polynom, MATLAB, SOSTOOLS, Wolfram Mathematica

1. HILBERTŮV 17. PROBLÉM

OBRÁZEK 1. D. Hilbert (1912)

David Hilbert (obrázek 1) byl německý matematik a lze ho bezesporu považovat za jednoho z nejvýznamnějších matematiků 20. století. Narodil se v lednu roku 1862 ve Wehlau poblíž Königsbergu na území Pruska (oblast dnešního Kaliningradu, Rusko). Zde také vystudoval gymnázium a následně byl přijat na univerzitu v Königsbergu, na které získal pod vedením Ferdinanda von Lindemanna v roce 1885 doktorát za svou práci *Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*. V následujících letech působil na univerzitě v Königsbergu, kde byl také v roce 1893 jmenován řádným profesorem. V roce 1895 pak odchází působit na katedru matematiky na univerzitě v německém Göttingenu, kde setrval až do konce své kariéry. David Hilbert zemřel v únoru roku 1943. [7]

V průběhu života se Hilbert věnoval celé řadě otázek v oblasti matematiky a stal se uznávaným odborníkem. Učinil například významný pokrok v teorii invariantů (r. 1888), v práci *Zahlbericht* se zabýval teorií čísel (r. 1897) a v publikaci *Grundlagen der Geometrie* popsal vlastní axiomatický přístup ke geometrii (r. 1899). [13]

V roce 1900 na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži vystoupil Hilbert s dnes již slavnou přednáškou *Problémy matematiky*. Hilbertova řeč o matematice 20. století byla plná optimismu, cítil však, že existuje stále řada otázek, které je třeba objasnit. Ve své řeči vymezil celkem 23 matematických problémů, které měly představovat výzvu pro matematiku 20. století, aby zůstala moderní vědou. Tyto problémy dnes známe pod označením *Hilbertovy problémy*. [7] Celá řada těchto problémů již byla vyřešena, některá Hilbertova tvrzení byla vyvrácena a některé problémy jsou dodnes výzvou pro matematiky i informatiky. Mezi otevřené problémy patří kupříkladu důkaz Riemannovy hypotézy nebo axiomatizace fyziky.

Před vymezením Hilbertova 17. problému zmiňme nejprve tzv. Bachetovu–Lagrangeovu větu známou z teorie čísel, která tvrdí, že *každé přirozené číslo lze vyjádřit součtem čtyř čtverců nezáporných celých čísel*. V souvislosti s tím můžeme též zmínit, že existují přirozená čísla, která nelze vyjádřit jako součet tří čtverců nezáporných celých čísel. Jedná se o čísla, která lze vyjádřit ve tvaru $4^a(8b+7)$, kde hodnoty *a, b* jsou nezáporná celá čísla. Hilbert svým problémem tuto problematiku přenesl na polynomy a racionální funkce. Nebyl však jediný, kdo se touto otázkou již před rokem 1900 zabýval. V lednu roku 1885 prezentoval Hermann Minkowski svou disertační práci, ve které uvedl silnou domněnku, že musí existovat reálný, homogenní, pozitivně semidefinitní polynom jakéhokoliv stupně větší dva ve více než dvou neurčitých, který není možné vyjádřit jako součet čtverců homogenních, reálných polynomů. Hilbert na tuto myšlenku navázal a sám dokázal tvrzení, že již pro $n = 2$ nemusí rozklad polynomu $\boldsymbol{f}$ v součet konečně mnoha čtverců polynomů existovat. Konkrétní příklad takového pozitivně semidefinitního (nezáporného) polynomu však neuvedl. Snad i vzhledem k těmto poznatkům formuloval Hilbert svůj 17. problém v obecnějším tvaru pro racionální funkce. [6], [12]

Znění 17. Hilbertova problému:

Nalezněte způsob, jak vyjádřit definitní racionální funkci jako součet čtverců racionálních funkcí.

Ke znění 17. Hilbertova problému je nutné podotknout, že Hilbert za definitní racionální funkci považoval nezápornou, tj. pozitivně semidefinitní, racionální funkci. [4]

Hilbertův 17. problém byl poměrně brzy vyřešen Emilem Artinem (1898 – 1962), který kompletní řešení publikoval v svém článku *Über die Zerlegung definiter Funcktionen in*

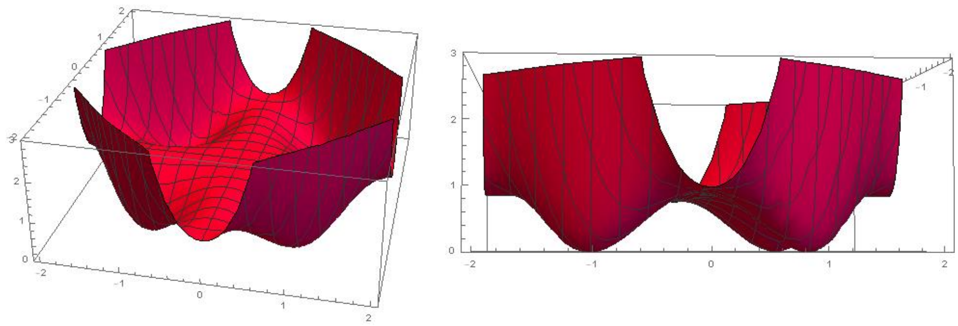
Quadrate již v roce 1927. Jednalo se nicméně o nekonstruktivní důkaz a jeho postupy nebyly algoritmizovatelné. Algoritmické řešení Hilbertova 17. problému nalezl až Charles Delzell v roce 1984. [6]

V souvislosti s hledáním řešení 17. Hilbertova problému je dále nutné zmínit jméno matematika Theodora S. Motzkina (1908 – 1970). Ten v roce 1967 nalezl první jednoduchý příklad pozitivně semidefinitního polynomu, který není možné rozložit na součet čtverců. Dnes tento polynom běžně označujeme jako *Motzkinův polynom*. [10]

Motzkinův polynom (1967):

$$f(x,y) = x^2y^2\left(x^2+y^2-3\right)+1$$

Nebudeme zde uvádět důkaz Motzkinova tvrzení, čtenář ho nalezne v [10], díky sestrojení grafu v programu Wolfram Mathematica® (obrázek 2) však můžeme snadno nahlédnout, že se skutečně jedná o pozitivně semidefinitní polynom.



OBRÁZEK 2. Graf Motzkinova polynomu

Další příklady pozitivně semidefinitních polynomů nerozložitelných na součet čtverců uvedl v roce 1973 Raphael M. Robinson (1911 – 1995). [10] Tyto polynomy byly ve tvaru:

$$f(x,y) = x^2\left(x^2-1\right)^2 + y^2\left(y^2-1\right)^2 - \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\left(x^2+y^2-1\right)$$

$$g(x,y,z) = x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 + z^2(z-1)^2 + 2xyz(x+y+z-2)$$

Vraťme se ovšem nyní k rozkladu samotnému.

2. Rozklad polynomu na součet čtverců

Rozklad polynomu na součet čtverců polynomů (zkráceně SOS z anglického *sum of squares*) představuje jednu z metod, pomocí které lze dokázat, že je určitý polynom $\boldsymbol{f}$ pozitivně (semi)definitní. Rozklad samotný ovšem není triviální záležitostí. V jednodušších případech (polynomy jedné neurčité) se může sice jednat o příklady řešitelné i na středních školách, v případě polynomů více neurčitých mohou však tyto úlohy představovat náročné a rozsáhlé problémy, při jejichž řešení se neobejdeme bez hlubších znalostí maticového počtu a moderní výpočetní techniky. Uveďme nyní stručně princip samotného rozkladu.

Princip rozkladu: Reálný polynom $\boldsymbol{f}$ je pozitivně semidefinitní pokud existují takové reálné polynomy $\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_s$, že:

$$f = \sum_{i=1}^{s} r_i^2$$

Na tomto místě by ovšem mohlo vyvstat několik otázek:

1. *Lze každý pozitivně semidefinitní polynom rozložit na součet čtverců?*
2. *Jakým způsobem (jednoduše) nalézt požadované polynomy r_i?*
3. *Je rozklad polynomu na součet čtverců jedinečný?*

Odpověď na první otázku nalez již Hilbert, který dokázal, že existují takové pozitivně semidefinitní polynomy, které nelze rozložit na SOS. Později Motzkin a Robinson nalezli konkrétní příklady takový polynomů, jak jsme si již uvedli dříve. Pokusme se nyní odpovědět na zbývající otázky a nalézt způsob, jak (jednoduše) rozložit zadaný polynom na součet čtverců. Zvolme záměrně jednoduchý příklad, který by bylo možné zadat i studentům na středních školách a využijme při jeho řešení metodu rozkladu polynomu na součet čtverců.

Příklad 1 (SŠ):

V oboru reálných čísel rozhodněte o řešitelnosti rovnice $x^4+2x^3+2x^2-6x+25=0$.

Řešení:

Zadáním je požadováno rozhodnout o řešitelnosti bez nutnosti hledat případné konkrétní řešení. Vyřešme tento příklad s pomocí metody rozkladu na součet čtverců. V prvním kroku označme levou stranu následovně:

$$p(x)=x^4+2x^3+2x^2-6x+25$$

Nyní začneme polynom $p(x)$ upravovat. Z prvních tří členů vytkneme x^2 s tím, že člen $2x^2$ „roztrhneme" a ponecháme si x^2 pro další úpravy:

$$p(x)=x^2\left(x^2+2x+1\right)+x^2-6x+25$$

Závorku upravíme dle vzorce $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ a rozdíl x^2-6x doplníme na čtverec pomocí vzorce $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Nesmíme zapomenout odečíst hodnotu 9, aby výraz zůstal beze změny.

$$p(x)=x^2(x+1)^2+(x-3)^2-9+25$$

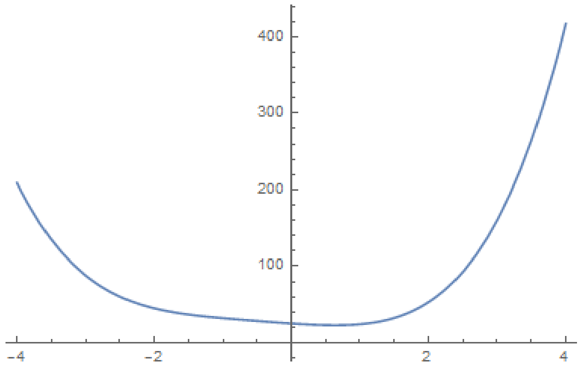
S využitím vztahu $(ab)^r=a^rb^r$ „vnoříme" x^2 do závorky a získáme po další úpravě:

$$p(x)=\left(x^2+x\right)^2+(x-3)^2+16$$

Odmocněním čísla 16 získáme finální podobu rozkladu polynomu $p(x)$ na součet čtverců:

$$p(x)=\left(x^2+x\right)^2+(x-3)^2+4^2$$

Uvážíme-li nyní, že hodnoty x jsou reálná čísla a jejich druhé mocniny musí být vždy čísla kladná, zjišťujeme, že výsledný rozklad představuje součet tří kladných čísel. Na základě toho docházíme k závěru, že polynom $p(x)$ je pozitivně definitní. Nikdy tudíž nenastane rovnost nule a z toho vyplývá závěr, že původní zadaná rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení. Toto tvrzení vyplývá též z grafu polynomu $p(x)$ na obrázku 3. Zároveň jsme vyřešením příkladu 1 objevili vlastnost, že pro reálné polynomy jedné neurčité pojmy *být pozitivně definitní* a *být součtem čtverců* splývají.



OBRÁZEK 3. Graf pozitivně definitního polynomu *p(x)*

V příkladu 1 jsme tedy nalezli poměrně jednoduchý způsob rozkladu polynomu na součet čtverců a získali jsme jistou odpověď na druhou otázku. Pracovali jsme ovšem pouze s polynomem čtvrtého stupně o jedné neurčité a postup není universální. V případě polynomů vyšších stupňů o více neurčitých tato technika řešení nestačí.

Ponechme si nicméně tento jednoduchý polynom $p(x)$ ve stávajícím tvaru a nalezněme nyní jeho rozklad na součet čtverců při použití algoritmu pro hledání rozkladu polynomu na součet čtverců uvedeném v [8] a s využitím matematického softwaru. Konkrétně využijeme program MATLAB® v součinnosti s balíčky SeDuMi a SOSTOOLS, které je možné bezplatně stáhnout z internetu, a program Wolfram Mathematica®.

V prvním kroku musíme do programu MATLAB® zavést neurčitou x a polynom $p(x)$. Následně zadáme příkaz *findsos* v syntaxi, jak je uvedeno níže:

```
>> syms x;
>> p=x^4+2*x^3+2*x^2-6*x+25;
>> [Q,Z,D]=findsos(p,'rational')
```

Po spuštění příkazu program nalezne celočíselnou Gramovu matici Q, vektor z skládající se z monomů hledaného rozkladu a hodnotu D takovým způsobem, že platí vztah:

$$z.Q.z^T = D.p(x)$$

Výstup z programu vypadá následovně:

```
Q =                                    Z =            D =

     25     -3     -3                      1                 1
     -3      8      1                      x
     -3      1      1                    x^2
```

Poznamenejme na tomto místě, že i přes zápis vektoru z v programu MATLAB® do sloupce, budeme ho vnímat jako vektor řádkový. Dosazením výstupu do předcházejícího vztahu pak získáme rovnost v podobě:

$$\left(1,x,x^2\right).\begin{pmatrix} 25 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} = 1.\left(x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x + 25\right)$$

Snadno bychom roznásobením zjistili, že výše uvedená rovnost platí. Pozastavme se nyní v této fázi výpočtu a zamysleme se nad získaným výstupem. Víme, že obecně pro rozklad polynomu ***f*** na součet čtverců platí vztah $f = \sum_{i=1}^{s} r_i^2$. Umocněním polynomů $\boldsymbol{r_i}$ tedy musíme získat původní polynom ***f***. V tomto konkrétním případě polynomu $p(x)$ tedy již snadno nahlédneme, že hledané monomy musí být právě 1, x, x^2.

Odkážeme-li se na článek [8], musíme pro výpočet matice Q nyní určit množinu $\Lambda_m = \{\beta_1, ..., \beta_k\}$, kde hodnoty β_k představují hodnoty exponentů u jednotlivých monomů. V našem případě se jedná po řadě o hodnoty $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 2$. Hledaná matice Q bude symetrická, čtvercová matice typu 3×3 v obecném tvaru:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

Pro určení jednotlivých hodnot $q_{i,j}$ budeme nyní opakovaně využívat vztahu $\sum_{\beta_i+\beta_j=\alpha} q_{i,j} = a_\alpha$, kde hodnota α představuje exponenty a a_α koeficienty příslušných členů polynomu $p(x)$. Rozepišme podrobněji výpočet několika prvních prvků matice Q:

$$\begin{aligned} q_{11} &= \beta_1 + \beta_1 = 0 && \Rightarrow && q_{11} = 25 \\ q_{12} &= \beta_1 + \beta_2 = \beta_2 + \beta_1 = 1 && \Rightarrow && 2q_{12} = -6 \\ q_{13} &= \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1 = \beta_2 + \beta_2 = 2 && \Rightarrow && 2q_{13} + q_{22} = 2 \end{aligned}$$

Obdobně bychom postupovali u dalších prvků matice. Všimněme si nyní problému, který nastal u prvků q_{13} a q_{22}. Tyto prvky jsou spolu provázány a jsme nuceni zavést parametr. Položme tedy kupříkladu $q_{22} = \lambda$. Prvek q_{13} pak bude ve tvaru $q_{13} = \frac{2-\lambda}{2}$. Na základě těchto okolností bude mít výsledná matice Q tvar:

$$Q = \begin{pmatrix} 25 & -3 & \frac{2-\lambda}{2} \\ -3 & \lambda & 1 \\ \frac{2-\lambda}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud bychom pokračovali dále tímto „manuálním postupem“, museli bychom nyní určit charakteristický polynom této matice a rozhodnout o hodnotách parametru λ, pro které bude matice Q pozitivně (semi)definitní. Je zřejmé, že pro hodnotu parametru $\lambda = 8$ získáme stejnou celočíselnou Gramovu matici Q jakou vydal program MATLAB®. Ukončeme tedy na tomto místě krátké zamyšlení a vraťme se k počítačovému řešení zadaného problému.

V dalším kroku převedeme matici Q s využitím symetrických úprav na diagonální matici D a zároveň nalezneme regulární matici A takovou, že platí vztah:

$$D = A^T Q A$$

Po úpravách tedy získáváme matice ve tvaru:

$$\begin{array}{ccc} Q \quad\quad E & & D \quad\quad A^T \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 25 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \square \ldots \square & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 16 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

V tomto jednoduchém případě by nebylo těžké přímo získat matici A, pro demonstraci využití matematického softwaru však přenecháme řešení tohoto problému počítači. V programu Wolfram Mathematica® zavedeme matici A^T a s využitím příkazu *Transpose* v uvedené syntaxi získáme původní matici A, kterou si necháme zobrazit pomocí příkazu *MatrixForm*.

```
MaticeAT = {{1, 0, 3}, {0, 0, 3}, {0, -1, 1}};
MaticeA = Transpose[MaticeAT];
MatrixForm[MaticeA]
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad polynomu $p(x)$ získáme ze vztahu $V.z^T$. Sloupcový vektor z již máme vypočtený a matice V je definována následovně:

$$V = \sqrt{D}.A^{-1}$$

Výpočet matice V opět realizujeme v programu Wolfram Mathematica®. Matici A máme v programu zavedenou již z předcházejícího výpočtu, zbývá zavést matici D. Pro určení matice $\sqrt{D}$ užijeme příkazu *Sqrt* a pro získání inverzní matice A^{-1} zadáme příkaz *Inverse*. Obě matice si opět necháme zobrazit pomocí příkazu *MatrixForm*.

```
MaticeD = {{16, 0, 0}, {0, 9, 0}, {0, 0, 7}};
OdmocninaD = Sqrt[MaticeD];
MatrixForm[OdmocninaD]
InverzniA = Inverse[MaticeA];
MatrixForm[InverzniA]
```

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{7} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matici V získáme vynásobením výše uvedených matic. Zavedeme tedy do programu zároveň také sloupcový vektor z a určíme výsledný součin $V.z^T$:

```
MaticeV = OdmocninaD.InverzniA;
MatrixForm[MaticeV]
zT = {{1}, {x}, {x^2}};
MatrixForm[z]
SoucinVzT = MaticeV.zT;
MatrixForm[SoucinVzT]
```

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{7} & 0 \end{pmatrix} \qquad z^T = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad V.z^T = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 + x + x^2 \\ -\sqrt{7}\, x \end{pmatrix}$$

Výsledný rozklad $p(x)$ představuje součet druhých mocnin jednotlivých řádků matice $V.z^T$. Označme tento výsledek SOS a nechme ho určit v programu Wolfram Mathematica® následujícím způsobem:

```
SOS = SoucinVzT[[1, 1]]^2 + SoucinVzT[[2, 1]]^2 +
  SoucinVzT[[3, 1]]^2
```

Program vrátí výsledný rozklad ve tvaru:

$$16 + 7x^2 + \left(-3 + x + x^2\right)^2$$

Tento výsledek ovšem není v požadovaném tvaru součtu čtverců. Program při výpočtu totiž automaticky umocnil jeho první dva členy, tj. první a třetí řádek matice $V.z^T$. Finální výsledek získáme jednoduchou úpravou ve tvaru:

$$p(x) = \left(x^2 + x - 3\right)^2 + \left(\sqrt{7}x\right)^2 + 4^2$$

Nyní jsme již získali vyjádření zadaného polynomu $p(x)$ ve tvaru součtu čtverců. Na první pohled je však zřejmé, že se jedná o jiný rozklad, než jsme určili středoškolským způsobem. Tím jsme získali odpověď i na třetí otázku – tedy, že rozklad polynomu na součet čtverců není jedinečný. Tato odpověď byla jasná již dříve, konkrétně ve chvíli, kdy ve výpočtu Gramovy matice začal vystupovat parametr λ. V případě, že bychom neprovedli pevnou volbu $\lambda = 8$, vystupoval by tento parametr i ve výsledném rozkladu a měl by přímý vliv na jeho podobu, která by se odvíjela od konkrétní volby hodnoty λ.

Závěrem tohoto příkladu provedeme ověření, že výše uvedený rozklad získaný počítačovou cestou skutečně představuje zadaný polynom $p(x)$. Pro tuto zkoušku využijeme opět program Wolfram Mathematica®. Příkaz *Expand* provede umocnění jednotlivých členů rozkladu.

```
Expand[SOS]
```

$$25 - 6x + 2x^2 + 2x^3 + x^4$$

V tomto jednoduchém případě snadno nahlédneme, že se jedná o původní polynom $p(x)$. Pokud bychom navíc do programu zavedli polynom $p(x)$ ze zadání, je možné porovnat výše vypočtený polynom se zadáním pomocí příkazu *TrueQ*.

```
p = x^4 + 2 x^3 + 2 x^2 - 6 x + 25;
TrueQ[Expand[SOS] == p]

True
```

Výstup *True* potvrzuje, že rozklad vypočtený s využitím počítačového softwaru skutečně představuje původní polynom $p(x)$ ze zadání příkladu.

Vyřešením příkladu 1 jsme přímo odpověděli na otázky č. 2 a 3 – ukázali jsme dvě možnosti, jak nalézt rozklad zadaného polynomu $p(x)$ na součet čtverců a zároveň jsme zjistili, že rozklad není jedinečný. Vraťme se nyní krátce k otázce č. 1. V příkladu 2 budeme požadovat rozklad Motzkinova polynomu na součet čtverců. Již víme, že tento polynom je pozitivně semidefinitiní (obrázek 2) a Motzkin sám ukázal, že rozklad tohoto polynomu na SOS neexistuje. Pokusíme se toto tvrzení potvrdit a při řešení příkladu opět využijeme program MATLAB® v součinnosti s balíčky SeDuMi a SOSTOOLS.

Příklad 2 (Motzkinův polynom):

Určete rozklad polynomu $P(x,y) = x^2y^2\left(x^2+y^2-3\right)+1$ na součet čtverců polynomů.

Řešení:

Obdobně jako již dříve musíme v prvním kroku zavést do programu MATLAB® neurčité *x*, *y* a polynom *P*. Následně se s využitím příkazu *findsos* pokusíme nalézt Gramovu matici *Q*.

```
>> syms x y;
>> P=x^2*y^2*(x^2+y^2-3)+1;
>> [Q,Z]=findsos(P)
```

V případě, že neexistuje rozklad zadaného polynomu *P* na součet čtverců, vrátí program MATLAB® po aktivaci příkazu *findsos(P)* prázdnou matici *Q* a prázdný vektor *z*. Zároveň nás automaticky upozorní, že rozklad neexistuje.

```
No sum of squares decomposition is found.

Q =          Z =


     []           []
```

Výpočtem jsme potvrdili, že pozitivně semidefinitní Motzkinův polynom *P* není možné rozložit na součet čtverců polynomů. Zároveň jsme tím získali odpověď na otázku č. 1, že každý pozitivně semidefinitní polynom není možné rozložit na součet čtverců.

ZÁVĚR

Článek se věnoval rozkladu (dekompozici) polynomu na součet čtverců polynomů (SOS) s využitím počítačového softwaru MATLAB® a Wolfram Mathematica® a důkazu, že je jistý polynom ***f*** pozitivně semidefinitní. Názorně bylo ukázáno, že v případě polynomů jedné neurčité je nalezení rozkladu na součet čtverců poměrně snadnou záležitostí a při výpočtu vystačíme se znalostmi středoškolské matematiky. Problém nastává u polynomů více neurčitých, kdy může hledání rozkladu na SOS představovat náročnou a rozsáhlou úlohu.

Výpočet se zpravidla opírá o komplexní znalosti matematického aparátu, konkrétně lze zmínit například maticový počet, práce s parametry, Descartovo znaménkové pravidlo či Sylvestrovo kritérium pro pozitivně definitní matice. Řešení těchto náročnějších úloh se proto obyčejně neobejde bez matematického softwaru.

Metoda rozkladu polynomu na součet čtverců představuje vhodnou metodu důkazu, že je jistý polynom ***f*** pozitivně (semi)definitní a s využitím moderního počítačového softwaru je možné zkoumat i polynomy vyšších stupňů o více neurčitých, což jistě nebylo možné za života Davida Hilberta a jeho současníků. Problém zůstává ovšem stále stejný – rozklad nemusí existovat. Příklad takového pozitivně semidefinitního polynomu nalezl již Motzkin. Dnes je díky výpočetní technice ovšem možné rychle zjistit, že rozklad daného polynomu na součet čtverců neexistuje a lze pak využít jiných metod pro rozhodnutí, zda je daný polynom pozitivně semidefinitní. Při nejmenším je možné využít matematického softwaru, jako je například Wolfram Mathematica®, pro sestrojení grafu, na základě kterého lze o vlastnostech daného polynomu rozhodnout.

LITERATURA

[1] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2000. 197 s. ISBN 80-200-0843-8.

[2] DE LOERA, J. A., HEMMECKE R., KÖPPE M.: *Algebraic and geometric ideas in the theory of discrete optimization.* Philadelphia: Mathematical Programming Society, 2013. ISBN 978-1-61197-243-6.

[3] FERNANDO J. F., GAMBOA J. M.: *Real algebra from Hilbert's 17th* [online]. Pisa & Madrid, 2012 [cit. 27. 11. 2017]. Dostupné z: http://www.mat.ucm.es/~josefer/articulos/rgh17.pdf

[4] HILBERT, D.: *Mathematical Problems* [online]. Paris, 1900 [cit. 27. 11. 2017]. Dostupné z: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html

[5] LALL, S.: *Sums of Squares* [online]. Stanford University, 2011 [cit. 27. 11. 2017]. Dostupné z: https://stanford.edu/class/ee364b/lectures/sos_slides.pdf

[6] NOVÁK, B.: O sedmnáctém Hilbertově problému. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. Praha, roč. 20 (1975), č. 3, str. 154 – 158 [cit. 27. 11. 2017]. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/139867

[7] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F.: *MacTutor History of Mathematics archive: David Hilbert* [online]. St Andrews, 2014 [cit. 27. 11. 2017]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hilbert.html

[8] POWERS, V., WORMANN, T.: An algorithm for sums of squares of real polynomials. In: *Journal of Pure and Applied Algebra*. roč. 127 (1998), č. 1, str. 99 – 104.

[9] POWERS, V.: *Positive Polynomials and Sums of Squares: Theory and Practise* [online]. Atlanta, 2015 [cit. 27. 11. 2017]. Dostupné z: http://www.mathcs.emory.edu/~vicki/preprint/PsdSosSurvey.pdf

[10] PRASOLOV, V. V.: *Polynomials*. New York: Springer, 2004.

[11] PRESTEL, A., DELZELL, CH. N.: Positive polynomials: from Hilbert's 17th problem to real algebra. Berlin: Springer, 2001.

[12] QUDDUS, S.: *Positive polynomials – Hilbert's 17th problem* [online]. Indian Statistical Institute Bangalore [cit. 27. 11. 2017]. Dostupné z: http://www.isibang.ac.in/~sury/hilbert17.pdf

[13] RAŠEVSKIJ, P. K.: Geometrie a její axiomatika. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. Praha, roč. 5 (1960), č. 5, str. 520 – 537 [cit. 27. 11. 2017]. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/137376

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY, FAKULTA PEDAGOGICKÁ, ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI, ČESKÁ REPUBLIKA

E-mail address: `frankjan@kvd.zcu.cz`