South Bohemia Mathematical Letters
Volume 23, (2015), No. 1, 8-17.

# RŮZNÉ TYPY PROSTOROVÝCH ÚLOH ŘEŠENÝCH V PROSTŘEDÍ PROGRAMU GEOGEBRA

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ

Abstrakt. Článek se zabývá tvorbou appletů pro výuku stereometrie, které pomáhají při zkoumání a objevování prostorových vztahů. Zaměříme se na prostředí, nástroje, funkce a příkazy programu GeoGebra, které k tomu můžeme či potřebujeme využít. GeoGebra poskytuje intuitivní prostředí pro zobrazení geometrických objektů a manipulaci s nimi v prostoru. Na konkrétních příkladech ukážeme možnosti ilustrace „klasických" úloh a řešení konstrukčních úloh ve 3D prostředí, které zdůrazní myšlenku a algoritmus řešení daného problému.

## Úvod

Pro demonstraci využití didaktického 3D software k řešení vybraných úloh v prostoru jsme – zejména pro jeho snadnou dostupnost a intuitivní ovládání – zvolili program GeoGebra [1].

V textu ukážeme a okomentujeme vybrané postupy a připravíme applety ilustrující vlastnosti mnohostěnů a vyřešíme několik konstrukčních úloh.

## 1. Základní vlastnosti těles

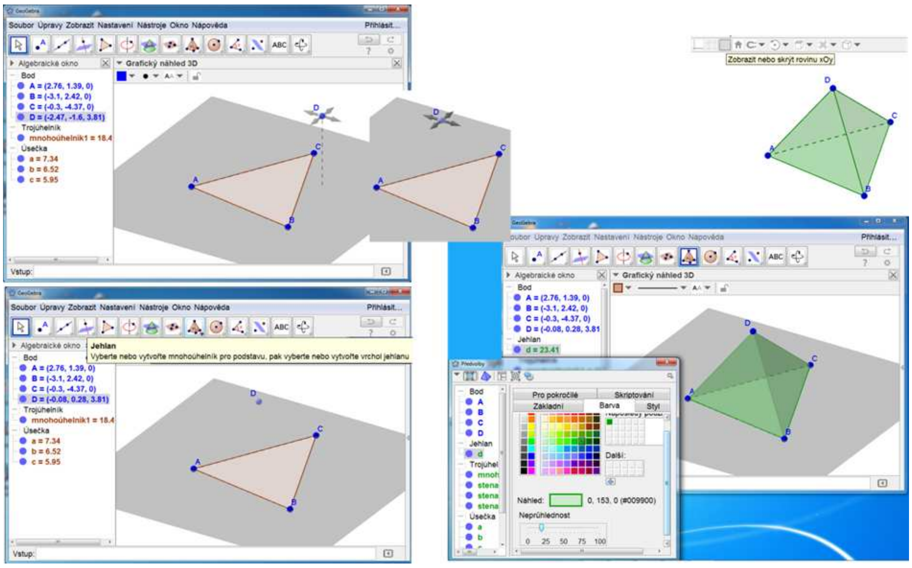
1.1. **Čtyřstěn – těžiště a ortocentrum.** V prvním modelu ilustrujeme konstrukci a polohu těžiště čtyřstěnu a ukážeme, že výšky čtyřstěnu mohou být mimoběžné.

**Konstrukce čtyřstěnu**
V demonstračním modelu nejprve sestrojíme trojúhelník podstavy v základní rovině $xy$ (kterou později skryjeme) a bod $D$, který bude vrcholem mimo základní rovinu. Postup ilustruje obrázek 1.
*Použité nástroje a volby:*
Nový bod, Mnohoúhelník, Jehlan, Vlastnosti, nastavení pohledu ve 3D Grafickém náhledu – skrytí základní roviny

**Těžiště**
Těžiště jehlanu je průsečíkem těžnic tělesa, tj. spojnic vrcholu s těžištěm protější stěny. Přitom těžiště stěny můžeme sestrojit klasickou rovinnou konstrukcí jako průsečík úseček (těžnic) nebo využít příkaz Teziste[mnohouhelnik] (postup ukazuje obrázek 2).

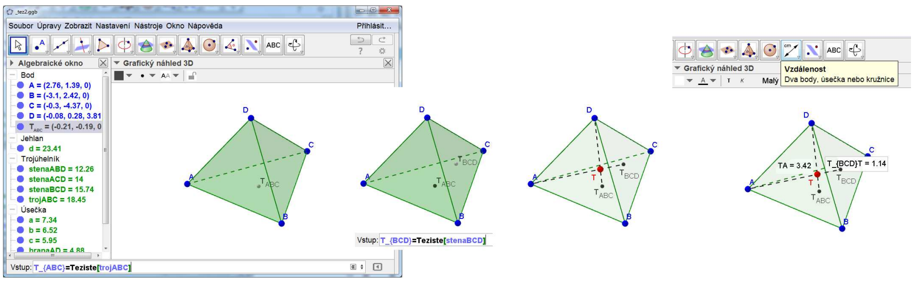
Odhad polohy těžiště tělesa na těžnici podpoříme buď porovnáním délek dvou úseček, na něž těžnici rozděluje těžiště T, nebo nástrojem pro měření délek.

*Key words and phrases.* Stereometrie, polohové a metrické úlohy, konstrukční úlohy, 3D, GeoGebra.



Obrázek 1. Konstrukce čtyřstěnu a nastavení vlastností jeho zobrazení

*Použité nástroje:*
Úsečka, Průsečík, Vzdálenost.

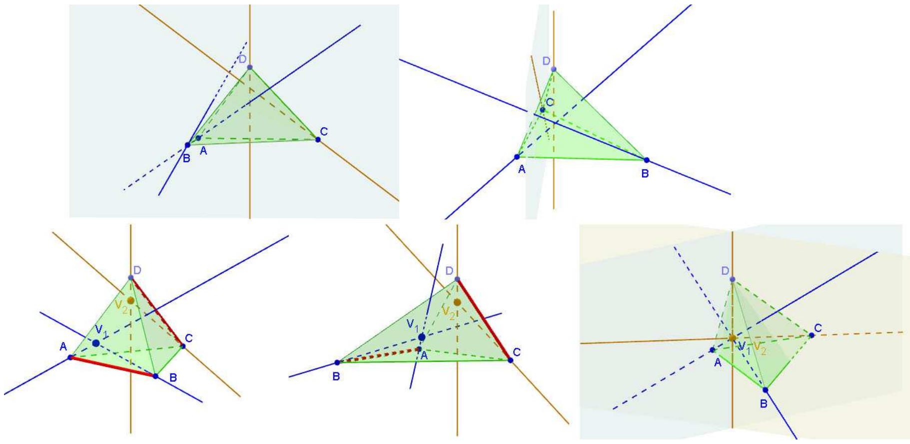


Obrázek 2. Těžiště čtyřstěnu

**Ortocentrum**

Podobným způsobem sestrojíme výšky sestrojeného čtyřstěnu. Vrcholem vedeme kolmici k protější stěně. Abychom dokázali vybrat trojúhelník stěny ve 3D pohledu, nesmí být zakrytý ani zcela průhledný. Můžeme ale zobrazit okno Algebra a vybírat objekty v něm. Poté, kdy zjistíme, že výšky jsou mimoběžné (což je velmi pravděpodobné, pokud čtyřstěn nesestrojíme jako pravidelný, ale s volně zvolenými vrcholy), diskutujeme se studenty o podmínkách, které musí platit pro hrany ortocentrického čtyřstěnu (všechny dvojice protilehlých hran jsou dvojicemi kolmic). Upozorníme také na čtyřstěny s právě jednou dvojicí kolmých protilehlých hran (se dvěma průsečíky výšek), viz [4]. Tři typy čtyřstěnů ilustruje obrázek 3.
*Použité nástroje:*
Kolmá rovina, Kolmice, Průsečík, Průnik dvou ploch (průsečnice rovin), Připojit/Oddělit bod.

Můžeme rovnou vyřešit několik souvisejících konstrukčních úloh, kdy čtyřstěn požadovaných vlastností sestrojíme.




Obrázek 3. Výšky čtyřstěnu. Nahoře čtyřstěn s mimoběžnými výškami, dole čtyřstěn s jednou dvojicí kolmých protilehlých hran (dvěma průsečíky výšek) a ortocentrický čtyřstěn

1.2. **Objemy těles.** V další ukázce ilustrujeme Cavalieriho princip a vztah mezi objemem jehlanu a hranolu téže podstavy a výšky. Pro zkrácení ukázky jsme obě vlastnosti sloučili do jednoho modelu.

Sestrojíme mnohoúhelník jedné podstavy a podstavu druhého získáme jeho posunutím. Vrchol a horní podstavu těles pak sestrojíme volně, ve společné rovině rovnoběžné s rovinou podstav. Sestrojíme ji tak, abychom mohli snadno (a kvůli kontrole výsledné hodnoty objemu řízeně, nejsnáze pomocí posuvníku) měnit výšku – vzdálenost těchto rovin.

Budeme-li chtít využít zobrazení hodnot objemu a obsahu v symbolickém tvaru (nikoliv jako zaokrouhlené hodnoty vyjádřené desetinným číslem), usnadníme si tvorbu podstavy tím, že sestrojíme vrcholy podstavy v základní rovině, kde je můžeme přichytávat k vrcholům zvolené mřížky. Pro samotné zobrazení výsledku v symbolickém tvaru pak využijeme textové příkazy GeoGebry. V naší ukázce to je příkaz ZlomekText, zatímco v ukázce pro objemy rotačních těles, kterou ilustrujeme v [5], byla využita funkce IracionalniText.

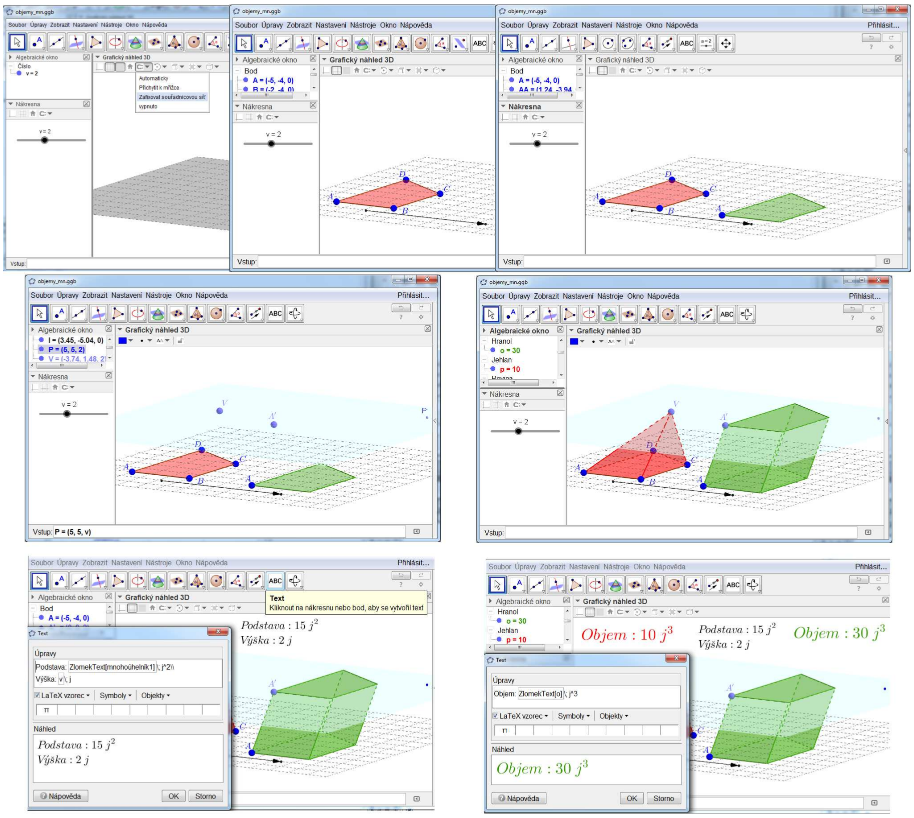
Sestrojení tohoto modelu vyžaduje větší počet kroků, uvedeme proto celý konstrukční postup. Ten je ilustrován obrázkem 4.

*Postup konstrukce modelu*

(1) Upravíme rozvržení okna GeoGebry: zobrazíme okno Nákresna a (opatrným) tažením za jeho horní okraj ho umístíme pod okno Algebra. Na panelu pro nastavení vlastností 3D Grafického náhledu zvolíme zobrazení mřížky a přichytávání bodů Zafixovat souřadnicovou síť[1] (ikonka „magnetu“). Základní rovinu můžeme naopak skrýt.

(2) Do 2D Nákresny vložíme posuvník $v$ pro volbu výšky těles.

(3) V základní rovině (ve 3D náhledu) sestrojíme mnohoúhelník (čtyřúhelník $ABCD$). V našem případě má název *mnohoúhelník1*.



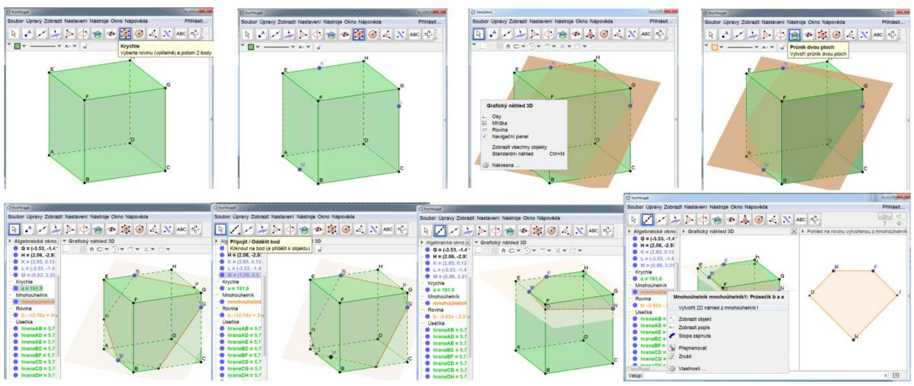
Obrázek 4. Objemy mnohostěnů

(4) V základní rovině sestrojíme vektor $u$.
(5) V posunutí o vektor $u$ sestrojíme obraz čtyřúhelníku $ABCD$, v našem případě má název *mnohoúhelník1'*.
(6) Můžeme sestrojit také obrazy vrcholů podstavy v tomto posunutí. Chceme-li, aby byly popsány stejně, volíme pro jejich popis nikoliv název, ale popisek, do nějž požadované označení napíšeme (okno Vlastnosti objektu).
(7) Vedeme rovinu $m$ rovnoběžnou s rovinou podstav, v níž bude ležet vrchol jehlanu a horní podstava hranolu. Požadovanou vzdálenost $v$ obou rovin můžeme zajistit různě: buď rovinu povedeme bodem na kolmici k rovině $xy$ nebo zapíšeme do vstupního pole její rovnici ($m : z = v$) – to by bylo nejelegantnější řešení... My jsme rovinu sestrojili nástrojem Kolmá rovina a vedli jsme ji bodem $P$, který jsme sestrojili ve výšce $v$ tak, aby nepřekážel v náhledu. Příkaz: $P = (5, 5, v)$.
(8) V rovině $m$ zvolíme body $V$ a $A'$ a příkazy Jehlan a Hranol sestrojíme dva mnohostěny – hranol $o$ a jehlan $p$.
(9) Do modelu doplníme popisky. Nástrojem Text vložíme popisek do požadovaného místa 3D Grafického náhledu a do jeho editačního pole zapíšeme vhodné texty. Do polí v textu, kam vkládáme objekty, jejichž hodnoty

(případně názvy) má GeoGebra vyhodnotit a zobrazit, můžeme zapsat libovolný (správný) příkaz. V našem případě to jsou příkazy ZlomekText, tj. ZlomekText[p], ZlomekText[o], ZlomekText[mnohoúhelník1]. Obklopíme je požadovaným prostým textem: jˆ3 znamená požadavek na vypsání $j$ a horního indexu, tedy $j^3$, \\ zalomí řádek (vše při zaškrtnuté volbě LaTeX vzorec).

## 2. Polohové vztahy – řezy těles rovinou

2.1. **Řezy mnohostěnů rovinou.** Prostorový náhled v GeoGebře je ideálním nástrojem pro demonstraci konstrukce a vlastností rovinných řezů mnohostěnů. Ilustrační obrázky jsme uvedli v [5]. Pro konstrukci potřebujeme pouze základní nástroje, z nichž nejdůležitější je již zmíněný nástroj Průnik dvou ploch. Ukažme si trochu jiný model, v němž rovinu řezu zadáme třemi body $K$, $L$, $M$ a polohu daných bodů budeme interaktivně měnit – viz obrázek 5.



Obrázek 5. Řez krychle rovinou $KLM$

Krychli sestrojíme příslušným nástrojem Krychle a zadáme trojici bodů $K$, $L$, $M$ na jejích hranách. Těmito body proložíme rovinu (u nás je to rovina $b$).

*Poznámka:* Užitečnou pomůckou při změně pohledu a měřítka zobrazení je volba Zobrazit všechny objekty z kontextového menu 3D Grafického náhledu (3D Nákresny).

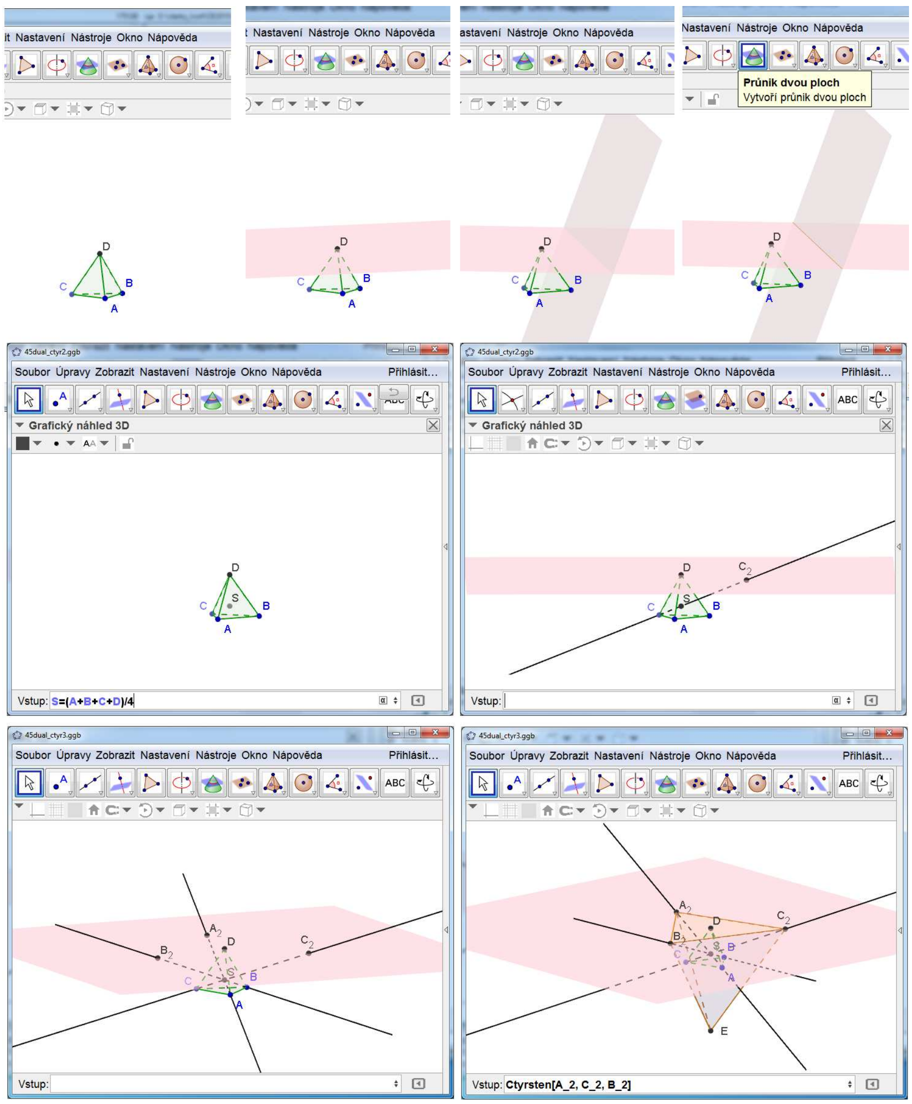
Po vybrání nástroje průniku často stačí přiblížit myš k průnikové čáře a obrys průniku se vyznačí. V takovém případě stačí kliknout myší. Pokud průnik nevidíme, můžeme oba objekty – krychli a rovinu – vybrat v okně Algebra.

Chceme-li vidět skutečnou velikost řezu, stačí z jeho kontextového menu (tj. z menu, které se otevře po kliknutí pravým tlačítkem myši) mnohoúhelníku nazvaného *mnohoúhelník1* vybrat Vytvořit 2D náhled z mnohoúhelník1. Otevře se okno s pomocnou 2D nákresnou v rovině řezu a zobrazeným řezem. Vše se pochopitelně aktualizuje se změnou polohy bodů $K$, $L$, $M$.

Chceme-li změnit hranu pro umístění některého z bodů $K$, $L$, $M$, použijeme pro něj dvakrát po sobě nástroj Připojit / Oddělit bod, čímž bod přemístíme tam, kam potřebujeme.

2.2. **Řezy koule, válce a kužele rovinou.** Rovinné řezy rotačních ploch sestrojíme pomocí analogického postupu a týchž nástrojů. Průnik dvou ploch však nefunguje (zatím?) pro jiné plochy než mnohostěny a roviny a plochy rotační, sestrojené dostupnými nástroji, nikoliv pro parametrické plochy.

## 3. Konstrukční úlohy




Obrázek 6. Dvě konstrukce duálního čtyřstěnu

3.1. **Pravidelné mnohostěny – konstrukce duálních pravidelných mnohostěnů.** Pro ilustraci sestrojíme duální čtyřstěn k danému čtyřstěnu. Konstrukce duálních dvojic osmistěn–krychle a dvanáctistěn–dvacetistěn jsou v principu stejné, jsou však delší (mají více kroků), a proto pracnější.

Sestrojení „vepsaného“ duálního čtyřstěnu studenti provedou snadno, zejména pokud znají příkaz Teziste (viz výše) pro konstrukci těžiště mnohoúhelníku (trojúhelníku). Duální čtyřstěn má vrcholy v těžištích (středech) stěn – rovnostranných trojúhelníků – čtyřstěnu daného. Stačí proto pouze vyzkoušet, v jakém pořadí volit vrcholy prvé stěny vytvářeného mnohostěnu, aby se sestrojil v požadované poloze (dodržet směr proti pohybu hodinových ručiček při pohledu na rovinu podstavy směrem od požadovaného vrcholu).

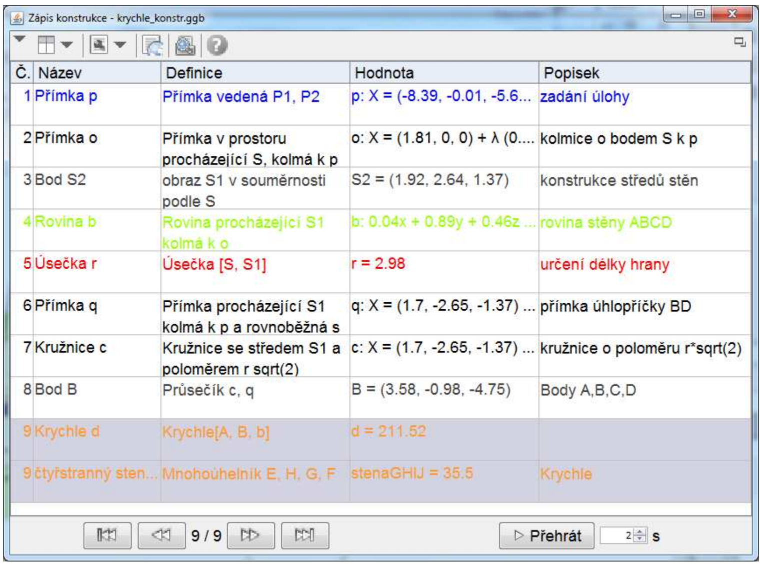
Konstrukce „opsaného“ duálního čtyřstěnu vypadá obtížněji. Stačí si však uvědomit, že stěny duálních čtyřstěnů jsou rovnoběžné, přičemž každá prochází tím vrcholem, který neleží v oné rovnoběžné stěně. Hrany duálního čtyřstěnu jsou proto průsečnice dvojic takových rovin, vrcholy jsou průsečíky průsečnic. Začátek konstrukce je na obrázku 6 nahoře.

Druhá konstrukce vychází z toho, že duální čtyřstěny jsou stejnolehlé. Ke konstrukci však stačí uvědomit si, že přímka vedená odpovídajícími si vrcholy navzájem duálních čtyřstěnů prochází společným středem (těžištěm) obou čtyřstěnů.

Druhý postup je na druhých dvou řádcích obrázku 6. Při konstrukci jsme navíc využili „analytický“ výpočet těžiště čtyřstěnu (v tomto případě tedy středu), jehož zápis má tvar $S = (A + B + C + D)/4$. Ke konstrukci dalších pravidelných mnohostěnů slouží příkazy Osmisten, Dvanactisten a Dvacetisten. Nejsou pro ně ikony v panelu nástrojů.

*Použité nástroje a příkazy:*
Rovnoběžná rovina, Průnik dvou ploch (průsečnice rovin), Průsečík, Přímka, analytický výpočet těžiště, Ctyrsten.

3.2. **Konstrukce těles z daných prvků.** Vhodnými úlohami mohou být konstrukce čtyřstěnu, krychle (jednu krychli sestrojíme v ukázce) a rotačních těles.

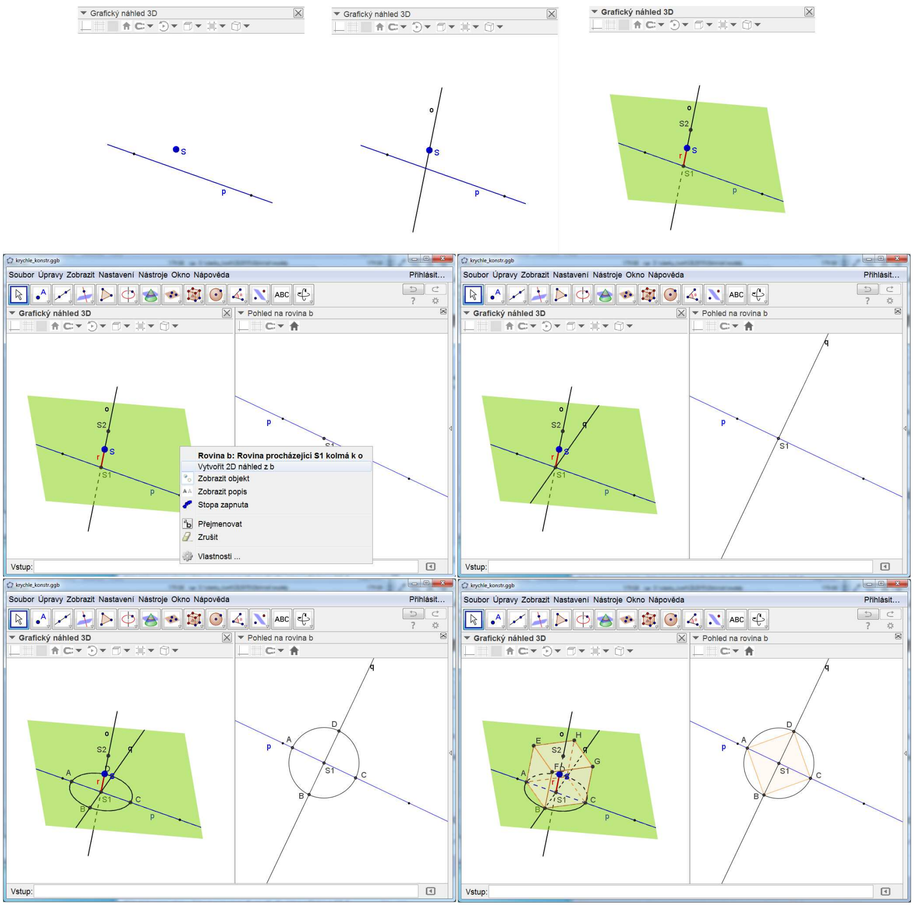

Zápis konstrukce - krychle_konstr.ggb

| Č. | Název | Definice | Hodnota | Popisek |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Přímka p | Přímka vedená P1, P2 | p: X = (-8.39, -0.01, -5.6... | zadání úlohy |
| 2 | Přímka o | Přímka v prostoru procházející S, kolmá k p | o: X = (1.81, 0, 0) + λ (0.... | kolmice o bodem S k p |
| 3 | Bod S2 | obraz S1 v souměrnosti podle S | S2 = (1.92, 2.64, 1.37) | konstrukce středů stěn |
| 4 | Rovina b | Rovina procházející S1 kolmá k o | b: 0.04x + 0.89y + 0.46z ... | rovina stěny ABCD |
| 5 | Úsečka r | Úsečka [S, S1] | r = 2.98 | určení délky hrany |
| 6 | Přímka q | Přímka procházející S1 kolmá k p a rovnoběžná s | q: X = (1.7, -2.65, -1.37) ... | přímka úhlopříčky BD |
| 7 | Kružnice c | Kružnice se středem S1 a poloměrem r sqrt(2) | c: X = (1.7, -2.65, -1.37) ... | kružnice o poloměru r*sqrt(2) |
| 8 | Bod B | Průsečík c, q | B = (3.58, -0.98, -4.75) | Body A,B,C,D |
| 9 | Krychle d | Krychle[A, B, b] | d = 211.52 | |
| 9 | čtyřstranný sten... | Mnohoúhelník E, H, G, F | stenaGHIJ = 35.5 | Krychle |

9 / 9 Přehrát 2 s

Obrázek 7. Zkrácený zápis konstrukce v GeoGebře

**Konstrukce ortocentrického čtyřstěnu**
O konstrukci ortocentrického čtyřstěnu jsme se zmínili již v prvé části tohoto textu. Při konstrukcích zadání může být potřeba sestrojit navzájem kolmé přímky, k čemuž poslouží kolmá rovina k dané přímce.



Obrázek 8. Konstrukce krychle z daných prvků

**Konstrukce krychle**
Pro řešení konstrukčních úloh bývají nejjednodušší konstrukce bodu, přímky, roviny a konstrukce mnohostěnů (krychle, čtyřstěn), případně rotačních těles. Zadání a řešení jedné snadné úlohy jsme zařadili jako poslední ukázku.

*Zadání:* Sestrojte krychli $ABCDEFGH$, je-li dán její střed $S$ a přímka $p$, na níž leží stěnová úhlopříčka $AC$.
*Rozbor:* Ze středové souměrnosti krychle podle středu $S$ plyne, že známe a umíme sestrojit polohu přímky $p'$, na niž leží stěnová úhlopříčka $EG$.

Vzdálenost středu $S$ od dané přímky $p$ je polovina délky hrany krychle. Kolmice $o$ k přímce $p$ v rovině $(S, p)$ vedená bodem $S$ protíná přímky $p, p'$ ve středech $S1$, $S2$ stěn $ABCD$, $EFGH$. Tyto stěny jsou na ni kolmé.

Stěnové úhlopříčky jsou navzájem kolmé.

*Postup konstrukce:*
Zápis konstrukce vytváří GeoGebra při provádění konstrukce sama (obrázek 7). Můžeme v něm navíc sloučit některé kroky tak, aby se při krokování provedly v jednom sloučeném kroku.

*Zápis konstrukce* popíšeme slovy, abychom mohli jednotlivé kroky komentovat. GeoGebra umožňuje kombinovat prostorové a rovinné konstrukční kroky, jak si dále ukážeme. Celá konstrukce je ilustrována obrázkem 8.

*Konstrukce:*
*Prostorová část:*

(1) Sestrojíme zadané prvky úlohy – zvolíme bod $S$ a přímku $p$.
(2) Bodem $S$ vedeme kolmici $o$ k přímce $p$ (nástroj KOLMICE) – takový nástroj GeoGebra opravdu má, výsledkem je kolmá různoběžka k dané přímce.
(3) Sestrojíme průsečík $S1$ přímek $o$, $p$ a jeho obraz $S2$ ve středové souměrnosti se středem $S$.
(4) Sestrojíme rovinu $b$ kolmou k $o$ bodem $S1$ – rovinu stěny $ABCD$.
(5) Délka úsečky $r$ s krajními body $S$, $S1$, je rovna polovině délky hrany krychle; sestrojíme ji.

Následují konstrukce v rovině $b$. Modelujeme ale ve 3D okně, kde máme nástroje pro konstrukce v prostoru (některé z nich, pravda, rovinné jsou). Pokud rovinné kroky nahradíme prostorovými konstrukcemi, které dávají v rovině $b$ týž výsledek, bude konstrukce méně přehledná. Například konstrukci kolmice v bodě dané přímky v rovině budeme nahrazovat konstrukcí kolmé roviny a následně konstrukcí její průsečnice s danou rovinou... GeoGebra ale přechod do rovinného konstruování umožňuje. V kontextovém menu rovinného objektu najdeme nabídku VYTVOŘIT 2D NÁHLED Z ..., který otevře nový, rovinný pohled, okno s pracovní rovinou v rovině tohoto objektu, včetně panelu nástrojů pro rovinné konstrukce. Můžeme tedy pokračovat v konstrukci v tomto náhledu:
*Rovinná část konstrukce v rovině b:*

(6) Bodem $S1$ vedeme kolmici $q$ k přímce $p$.
(7) Sestrojíme kružnici $k$ se středem $S1$ a poloměrem $r\sqrt{2}$ (odpovídající příkaz je KRUZNICE[$S_1$, $r$ sqrt(2), $b$]).
(8) Sestrojíme body $A$, $B$, $C$, $D$ jako průsečíky přímek $p$, $q$ s kružnicí $k$.

*Dokončení konstrukce ve 3D náhledu:*

(9) Vrcholy $E$, $F$, $G$, $H$ můžeme sestrojit mnoha způsoby, například posunutím bodů $A$, $B$, $C$, $D$ o vektor $S1S2$.
V našem postupu jsme sestrojili přímo krychli se stěnou v $ABCD$ příkazem KRYCHLE.

## ZÁVĚR

Řešení úloh v prostoru vyžaduje a zároveň rozvíjí schopnost žáků orientovat se ve virtuální scéně a propojuje tvorbu a užití prostorových představ s jejich potvrzením v interaktivním modelu, v němž je snadné změnit směr pohledu i typ promítání, či otočit objekty a scénou. Příprava appletů ve 3D prostředí je ale také náročnější na práci učitele.

Abychom učitelům tuto práci usnadnili, zařadili jsme 3D prostředí a připravili prostorové úlohy do systému GeoTest [2], o němž se zmiňujeme mimo jiné v [5]. Pokud učitel systém využije, úlohy nesestavuje ani nepřipravuje jejich zadání, pouze v prostředí systému pro své žáky úlohy vybírá a sleduje, zda a jak úspěšně je žáci řeší.

Řešení úloh v prostoru je náročné kvůli neobvyklosti problémů a náročnosti prostorových úvah, nemusí však být náročné na přípravu a grafické provedení. Čas dříve potřebný na rýsování tak můžeme věnovat rozvíjení představivosti a podněcování prostorových úvah.

## Reference

[1] GeoGebra [online]. Linz [cit. 2015-10-07]. http://www.geogebra.org.
[2] GeoTest [online]. Praha [cit. 2015-10-07]. http://geotest.geometry.cz.
[3] Hradecký, F., Koman, M., Vyšín, J.: *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles.* Edice ŠMM sv. 1, 3. vydání. Praha, 1977.
[4] Horák, S.: *Mnohostěny.* Edice ŠMM sv. 27, 1. vydání. Praha, 1970.
[5] Gergelitsová, Š., Holan, T.: Třetí rozměr ve školské geometrii – orientace a řešení problémů v prostoru. In: Hašek, R.: *Sborník příspěvků 7. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2015, 50–62. http://home.pf.jcu.cz/∼upvvm/2015/sbornik

Gymnázium Benešov, Česká republika
*E-mail address*: `sarka@gbn.cz`