

RIEŠENIE PROBLÉMOV METÓDOU MONTE CARLO V TABUĽKOVOM KALKULÁTORE MS EXCEL

ŠTEFAN GUBO

ABSTRAKT. Metóda Monte Carlo patrí medzi metódy numerickej matematiky a slúži na určenie približného riešenia stochastických i deterministických problémov. Metóda sa opiera o generovanie veľkého množstva náhodných resp. pseudonáhodných čísel. V príspevku uvádzame riešenie niekoľkých problémov z matematiky, ktoré možno riešiť touto metódou pomocou tabuľkového kalkulátora MS Excel 2013.

ÚVOD

V tomto príspevku popisujeme základné princípy metódy Monte Carlo, a jej využite pri riešení matematických problémov v prostredí tabuľkového kalkulátora MS Excel 2013. Monte Carlo je stochastická metóda, podstata ktorej spočíva vo využití generovania veľkého množstva náhodných čísel.

Metóda svoje pomenovanie získala podľa mesta Monte Carlo v Monackom kniežatstve, známeho predovšetkým svojimi kasínami. Termín prvýkrát použili fyzici János Neumann (angl. John von Neumann) a Stanisław M. Ulam pracujúci na zostrojení atómovej bomby v Los Alamos (New Mexico, U.S.A.) počas 2. svetovej vojny. Pri výskume chovania neutrónu sa objavil problém ako určiť percento takých neutrónov, ktorým sa podarilo uniknúť z nádrže vody. Bolo známe, že pri zrážke neutrónu s atómom vodíka dôjde k pohlteniu neutrónu v priemere v 1 zo 100 prípadov. Na modelovanie tejto situácie sa využilo kolo rulety rozdelené na 100 políčok, pričom iba jedno políčko predstavovalo takú zrážku, pri ktorej došlo k pohlteniu neutrónu. Ostatné políčka rulety predstavovali situáciu, keď po zrážke neutrón pokračoval v pohybe. Pomocou ďalšieho kola rulety sa potom podobným spôsobom určila rýchlosť a smer pohybu a tiež aj veľkosť dráhy, ktorú neutrón prešiel do ďalšej zrážky. Táto simulácia umožnila predpovedať históriu života každého neutrónu a tým získať viac menej presnú informáciu o percente uniknutých neutrónov (podľa [2]).

1. STRUČNÁ CHARAKTERISTIKA METÓDY MONTE CARLO

Metóda Monte Carlo je v podstate veľmi jednoduchá a široko použiteľná. Slúži na určenie približného riešenia pravdepodobnostných i deterministických problémov prostredníctvom mnohokrát opakovaných náhodných pokusov. Podstata metódy vyplýva zo zostavenia pravdepodobnostného problému, ktorý má zhodné riešenie s pôvodným problémom. Získané riešenie potom bude mať pravdepodobnostný charakter. Ide teda o štatistický experiment, v rámci ktorého vygenerujeme veľké množstvo náhodných čísel

Key words and phrases. metóda Monte Carlo, tabuľkový kalkulátor, MS Excel

Článok vznikol vďaka podpore MŠVVaŠ SR v rámci riešenia projektu KEGA 010UJS-4/2014.

a potom z nich vyvodzujeme určité závery. Riešenie problému metódou Monte Carlo pozostáva z nasledujúcich základných krokov [2]:

- 1) návrh modelu problému,
- 2) generovanie náhodných veličín a ich transformácia do veličín s daným štatistickým rozdelením,
- 3) štatistické spracovanie získaných výsledkov.

2. GENERÁTORY NÁHODNÝCH ČÍSEL

Existujú dva základné typy generátorov náhodných čísel: *fyzikálne generátory* a *pseudonáhodné generátory*.

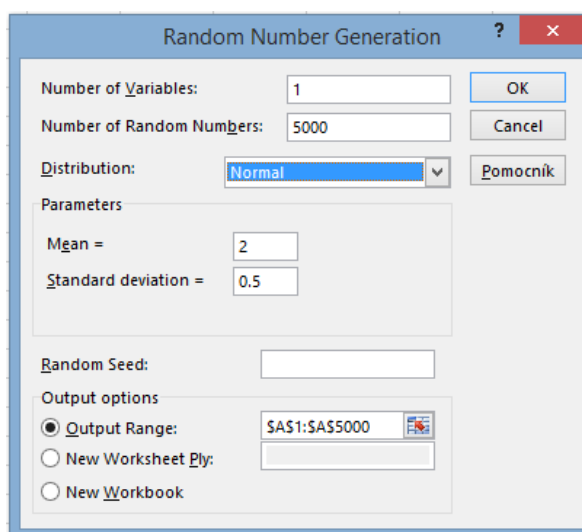
Fyzikálne generátory náhodných čísel využívajú náhodné fyzikálne procesy (napr. atmosférický šum, uplynutý čas medzi vyžiareníím rádioaktívnej častice, pohyb atómov) na vytváranie skutočne náhodných čísel [3].

Pseudonáhodné generátory náhodných čísel sú deterministické algoritmy, ktoré generujú takú postupnosť čísel, kde ďalší člen závisí od hodnôt predchádzajúcich. Preto sa nejedná o skutočne náhodné čísla, ale o tzv. *pseudonáhodné čísla*, ktoré sa na postupnosť náhodných čísel veľmi podobajú. Čísla sa po určitej perióde začnú opakovať, preto je dôležité, aby táto perióda bola čo najväčšia [3].

3. NÁHODNÉ ČÍSLA V TABUĽKOVOM KALKULÁTORE MS EXCEL 2013

V MS Excel 2013 na generovanie pseudonáhodných čísel slúžia zabudované funkcie (RAND, RANDBETWEEN) a nástroj Random Number Generation (*Generátor náhodných čísel*).

Funkcia =**RAND()** vráti rovnomerne rozdelené reálne pseudonáhodné číslo z intervalu (0,1). Táto funkcia pri každom prepočítaní hárka (napr. po zadaní vzorca alebo údajov do inej bunky, po spustení prepočítania manuálne stlačením klávesu F9) automaticky vygeneruje nové číslo. Ak chceme vygenerovať reálne pseudonáhodné číslo z intervalu (a, b), stačí použiť vzorec $=a + (b-a)*\text{RAND()}$ [1].



OBRÁZOK 1. Dialógové okno nástroja Random Number Generation

Funkcia **=RANDBETWEEN(a,b)** vráti rovnomerne rozdelené celé pseudonáhodné číslo z intervalu $[a,b]$. Aj táto funkcia pri každom prepočítaní hárka automaticky vygeneruje nové číslo [1].

Nástroj **Random Number Generation** sa nachádza na karte *Údaje* v skupine *Analýza* v štandardne dodávanom doplnku *Data Analysis*, a vyplní daný rozsah pseudonáhodnými číslami vybranými z niektorého rozdelenia. Napríklad na obr. 1 chceme do oblasti **A1:A5000** vygenerovať 5000 čísel pre normálne rozdelenie so strednou hodnotou 2 a smerodajnou odchýlkou 0,5.

4. RIEŠENIE PROBLÉMOV METÓDOU MONTE CARLO

Problém 4.1: Vhodnosť funkcie =RAND() (podľa [4])

V tabuľkovom kalkulátore MS Excel 2013 môžeme otestovať vhodnosť funkcie **=RAND()** veľmi jednoducho. Vygenerujeme touto funkciou do oblasti **A1:A1000000** 1.000.000 pseudonáhodných čísel z intervalu $(0,1)$. Do oblasti **C2:C11** vložíme čísla od 0.1 po 1, označíme oblasť **D2:D12** a zadáme vzorec **=FREQUENCY(A1:A1000000,C2:C11)**. Tým si vytvoríme frekvenčnú tabuľku obsahujúcu rozloženie kumulatívnych početností podľa tried (obr. 2).

	A	B	C	D	E	F	G
1	0.699606						
2	0.214102		0.1	100231	10.0%		
3	0.164283		0.2	100038	10.0%		
4	0.303645		0.3	99983	10.0%		
5	0.17023		0.4	100166	10.0%		
6	0.017545		0.5	100026	10.0%		
7	0.044802		0.6	100082	10.0%		
8	0.504218		0.7	99827	10.0%		
9	0.547919		0.8	100141	10.0%		
10	0.953677		0.9	99968	10.0%		
11	0.425457		1	99538	10.0%		
12	0.89215			0			
13	0.028706						
14	0.863312						
15	0.109854						
16	0.979672						

OBRÁZOK 2. Riešenie problému 4.1

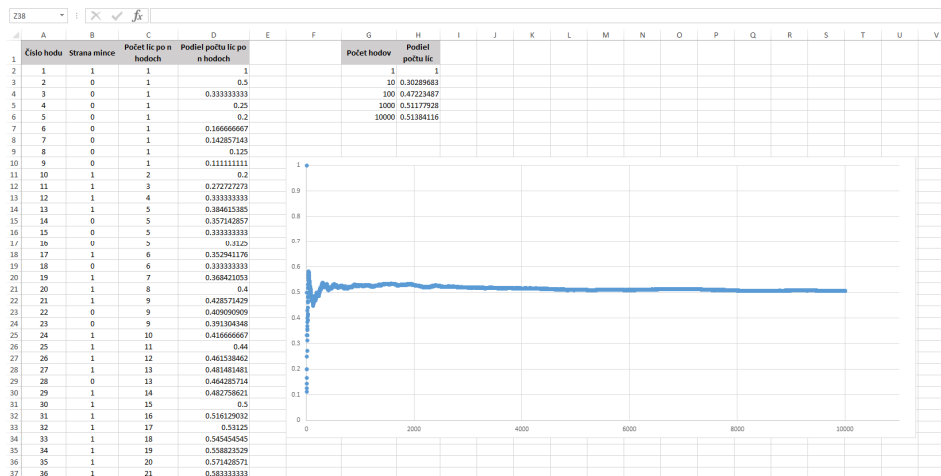
Na základe dosiahnutých výsledkov možno skonštatovať, že funkcia **=RAND()** naozaj generuje rovnomerne rozdelené reálne pseudonáhodné čísla z intervalu $(0,1)$.

Problém 4.2: Hádzanie mincou

Budeme 10.000-krát hádzať mincu a sledovať koľkokrát padne *lice* alebo *rub*. Je všeobecne známe, že keď hádzanie opakujeme viackrát, tak pri rastúcom počte pokusov sa pomer medzi počtom líc a počtom hodov bude ustáľovať na hodnote 0,5.

V tabuľkovom kalkulátore MS Excel 2013 v oblasti **B2:B10001** vygenerujeme funkciou **=RANDBETWEEN(0,1)** pseudonáhodné čísla z množiny $\{0,1\}$. V oblasti **C2:C10001** pomocou funkcie **COUNTIF** (kde **C2 := COUNTIF(\$B\$2:B2,1)**) spočítame

koľkokrát padlo líce (1) po jednotlivých hodoch. V oblasti **D2:D10001** potom vypočítame podiely počtov padnutých líc (**D2 := C2/A2**) a nakoniec si vytvoríme bodový graf znázorňujúci tento podiel ako funkciu celkového počtu hodov (obr. 3).



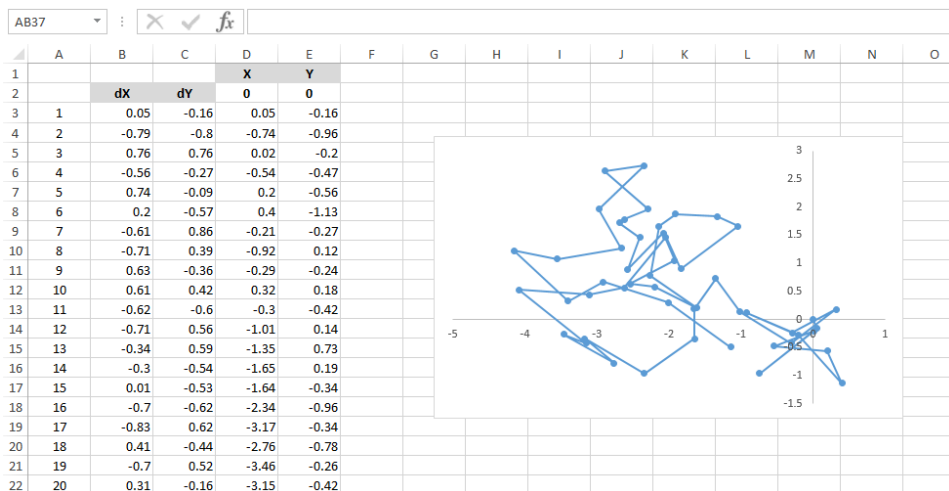
OBRÁZOK 3. Riešenie problému 4.2

Z grafu vidno, že limitná hodnota relatívnych početností sa rovná pravdepodobnosti padnutia líce.

Problém 4.3: Brownov pohyb

Brownov pohyb je neustály nepravidelný pohyb mikroskopických častíc v kvapaline alebo v plyne. Prvýkrát ho zaznamenal v roku 1827 škótsky botanik Robert Brown, ktorý zistil, že peľové zrnká prítomné vo vode nie sú v pokoji, ale v ustavičnom trhavom pohybe, ktorého smer sa nepravidelne mení. Fyzikálnu podstatu tohto javu objasnil v roku 1905 Albert Einstein nasledovne: častice v kvapaline sa pod vplyvom tepelného pohybu (častice kmitajú okolo svojich rovnovážnych polôh) neustále zrážajú, pričom smer a sila týchto zrážok sú náhodné a vďaka tomu je aj poloha častíc náhodná [4].

V tabuľkovom kalkulátore budeme simulovať náhodný pohyb (50 krokov) častice a znázorníme v karteziánskej súradnicovej sústave. Nech počiatočný bod náhodného pohybu je v bode (0,0).



OBRÁZOK 4. Riešenie problému 4.3

V oblasti **B3:C52** pomocou vzorca `=1-2*RAND()` vygenerujeme reálne pseudonáhodné čísla z intervalu $(-1,1)$. Čísla v oblasti **B3:B52** udávajú náhodné zmeny súradníc X , kým čísla v **C3:C52** náhodné zmeny súradníc Y . Potom v stĺpcoch **D** a **E** vypočítame súradnice aktuálnej polohy častice po jednotlivých krokoch a následne dráhu častice znázorníme pomocou čiarového grafu (obr. 4).

Problém 4.4: Odhad Ludolfvho čísla

Jedným z najznámejších a najjednoduchších príkladov použitia metódy Monte Carlo je odhad *Ludolfvho čísla* (π). Majme štvorec s hranou veľkosti 1 a majme v ňom vpísanú štvrtkružnicu s polomerom 1. Nech strany štvorca sú rovnobežné s osami karteziánskej súradnicovej sústavy a stred štvrtkružnice leží v bode $(0,0)$.

Teraz si predstavme, že začneme do štvorca strieľať. Ak máme k dispozícii len jeden pokus, tak na štvorci sa zobrazí jeden bod (náboj). Ak máme k dispozícii dostatočný počet pokusov, je možné strelbami vybodkovať celý štvorec resp. celý štvrtkruh. Podiel počtu nábojov ležiacich vnútri štvrtkruhu (m) a počtu nábojov ležiacich vnútri štvorca (n) sa bude rovnať podielu obsahu štvrtkruhu ($S_1 = \pi/4$) a obsahu štvorca ($S_2 = 1$):

$$\frac{m}{n} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{4}$$

z čoho dostávame

$$\pi = 4 \frac{m}{n}$$

Odhad Ludolfvho čísla v tabuľkovom kalkulátore vypočítame nasledovne:

V oblasti **A2:B1000001** pomocou funkcie `=RAND()` vygenerujeme 1.000.000 pseudonáhodných súradníc bodov $A_i[x_i, y_i]$ s rovnomerným rozdelením na intervale $(0,1)$. Následne v stĺpci **C** spočítame body, ktoré sa nachádzajú vnútri štvrtkruhu. Pokiaľ pre daný bod $A_i[x_i, y_i]$ platí nerovnosť $x_i^2 + y_i^2 \leq 1$, leží vnútri štvrtkruhu. Do bunky **C2** zadáme vzorec `=IF(A2^2+B2^2<1,1,0)`, ktorý nám vráti 1, ak nerovnosť platí, v opačnom prípade vráti 0. Tento vzorec skopírujeme do oblasti **C2:C1000001**.

V stĺpci **G** vypočítame odhady Ludolfvho čísla po 1, 10, 100, ..., 1.000.000 strelbách (kde napr. **G8** := `4*SUM(C2:C1000001)/F8`).

Nakoľko MS Excel 2013 má zabudovanú funkciu =PI(), ktorá vráti Ludolfovo číslo s presnosťou na 15 desatinných miest (nech G12 := PI()), v stĺpci I môžeme vypočítať aj jednotlivé odchýlky. Pri $n = 1.000.000$ (kde I8 := ABS(\$G\$12-G8)) sme dostali výsledok s presnosťou na 4 desatinné miesta. Na obr. 5 vidno, že so zväčšujúcim sa počtom generovaných bodov sa zväčšuje i presnosť Ludolfovho čísla.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	x	y	Počet bodov v štvrtkruhu			Počet strelieb	Odhad PI	Vzorec	Odhýlka	
1										
2	0.618741	0.152403	1			1	4.000000	=4*C2/F2	0.858407346	
3	0.573316	0.076192	1			10	4.000000	=4*SUM(C2:C11)/F3	0.858407346	
4	0.58606	0.07617	1			100	3.440000	=4*SUM(C2:C101)/F4	0.298407346	
5	0.980487	0.071013	1			1000	3.112000	=4*SUM(C2:C1001)/F5	0.029592654	
6	0.652721	0.652127	1			10000	3.132800	=4*SUM(C2:C10001)/F6	0.008792654	
7	0.66704	0.65112	1			100000	3.145120	=4*SUM(C2:C100001)/F7	0.003527346	
8	0.529854	0.530991	1			1000000	3.142024	=4*SUM(C2:C1000001)/F8	0.000431346	
9	0.324726	0.448058	1							
10	0.100955	0.291851	1							
11	0.168985	0.420064	1							
12	0.618028	0.300944	1							
13	0.187418	0.376558	1							
14	0.09037	0.437427	1							
15	0.947654	0.720501	0							
16	0.31062	0.963691	0							
17	0.020176	0.282395	1							
18	0.228877	0.967319	1							
19	0.671581	0.392353	1							
20	0.182322	0.972546	1							
						Hodnota PI:	3.141592654			

OBRÁZOK 5. Riešenie problému 4.4

Problém 4.5: Odhad jednorozmerného určitého integrálu

Ďalšie známe využitie metódy Monte Carlo je výpočet jednorozmerného určitého integrálu, pričom využívame poznatky z predchádzajúceho príkladu. Štvrtkruh v tomto prípade nahradíme geometrickým útvarom.

Ideme odhadovať integrál nezápornej funkcie $f(x)$ medzi určitými dvoma bodmi a a b . Našou úlohou je vypočítať obsah plochy P pod krivkou funkcie $y = f(x)$, ktorá je ďalej ohraničená priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Označme $MAX(f(x))$ hodnotu na osi y , kde funkcia $f(x)$ dosahuje svoje maximum na intervale $[a, b]$. Generujeme n pseudonáhodných súradníc bodov $A_i[x_i, y_i]$ s rovnomerným rozdelením, pričom hodnoty x_i patria do intervalu (a, b) a hodnoty y_i do intervalu $(0, MAX(f(x)))$. Tieto body vyplnia obdĺžnik v rovine. Plocha P je teda podmnožinou obdĺžnika a k odhadu jednorozmerného určitého integrálu je potrebné zistiť pomer ich obsahov. Pre každý náhodný bod $A_i[x_i, y_i]$ spočítame funkčnú hodnotu pre x_i , pokiaľ vygenerovaná hodnota y_i je menšia než vypočítaná hodnota $f(x_i)$, bod patrí ploche P . Nech počet bodov ležiacich vnútri plochy P je m . Pravdepodobnosť javu, že náhodný bod padne do plochy P je m/n . Odhadovaná hodnota jednorozmerného určitého integrálu je potom

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{m}{n} S_{\text{obdĺžnik}}$$

kde $S_{\text{obdĺžnik}} = (b - a)MAX(f(x))$.

Úloha: V tabuľkovom kalkulátore vypočítajte približnú hodnotu nasledovného jednorozmerného určitého integrálu (podľa [3]):

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 2}{3} dx$$

Hodnotu určitého integrálu najprv vypočítame analyticky:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3 + 2}{3} dx &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^3 + 2) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{3} \int_0^1 2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \frac{1}{3} [2x]_0^1 = \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 0 \right) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

Ideme vypočítať približný obsah plochy P pod krivkou funkcie $y = f(x) = (x^3 + 2)/3$, ktorá je ďalej ohraničená priamkami $x = 0$, $x = 1$ a $y = 0$. Maximum tejto funkcie na intervale $(0,1)$ je 1. Odhad určitého integrálu vypočítame v tabuľkovom kalkulátore nasledovne:

V oblasti **A2:B1000001** pomocou funkcie **=RAND()** vygenerujeme 1.000.000 pseudonáhodných súradníc bodov $A_i[x_i, y_i]$ s rovnomerným rozdelením, pričom hodnoty x_i aj y_i sú generované z intervalu $(0,1)$. Potom v stĺpci **D** pre každý vygenerovaný bod $A_i[x_i, y_i]$ spočítame funkčnú hodnotu pre x_i . Pokiaľ platí nerovnosť $y_i \leq f(x_i)$, bod patrí ploche P . Do bunky **E2** zadáme vzorec **=IF(B2<=D2,1,0)**, ktorý nám vráti 1, ak nerovnosť platí, v opačnom prípade vráti 0. Tento vzorec potom skopírujeme do oblasti **E2:E1000001**.

V stĺpci **I** vypočítame odhady určitého integrálu po vygenerovaní 1, 10, 100, ..., 1.000.000 náhodných bodov (kde napr. **I8 := I11*SUM(E2:E1000001)/H8**). Pretože analyticky vypočítanú hodnotu poznáme, v stĺpci **K** môžeme vypočítať aj jednotlivé odchýlky. Pri $n = 1.000.000$ (kde **I8 := ABS(\$I13-I8)**) sme dostali výsledok s presnosťou na 4 desatinné miesta. Výsledok získaný metódou Monte Carlo sa teda blíži výsledku získaného analytickým výpočtom (obr. 6).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	x	y		f(x)	Počet bodov v ploche			Počet strelieb	Odhad určitého integrálu	Vzorec	Odhýlka
1											
2	0,845652	0,925177	>	0,868249948	0			1	0,000000	=I11*(E2/H2)	0,750000
3	0,556342	0,045369	<	0,724065519	1			10	0,800000	=I11*SUM(E2:E11)/H3	0,050000
4	0,827856	0,893642	>	0,855789168	0			100	0,780000	=I11*SUM(E2:E101)/H4	0,030000
5	0,74394	0,494434	<	0,803910296	1			1000	0,746000	=I11*SUM(E2:E1001)/H5	0,004000
6	0,276546	0,018483	<	0,673716529	1			10000	0,753100	=I11*SUM(E2:E10001)/H6	0,003100
7	0,203307	0,273875	<	0,669467821	1			100000	0,750690	=I11*SUM(E2:E100001)/H7	0,000690
8	0,723245	0,076079	<	0,792772378	1			1000000	0,749835	=I11*SUM(E2:E1000001)/H8	0,000165
9	0,028137	0,241543	<	0,666674092	1						
10	0,716967	0,064982	<	0,789516726	1					MAX f(x):	1
11	0,982452	0,562126	<	0,982758466	1					Obsah obdĺžnika:	1
12	0,804432	0,930972	>	0,840185627	0						
13	0,012152	0,053614	<	0,666667265	1					Hodnota určitého integrálu:	0,75
14	0,485583	0,13974	<	0,704831989	1						
15	0,343717	0,415678	<	0,680202346	1						
16	0,121395	0,631107	<	0,667262987	1						
17	0,50885	0,683075	<	0,710585309	1						
18	0,543236	0,425277	<	0,720103806	1						
19	0,512482	0,248371	<	0,711532373	1						
20	0,952816	0,752667	<	0,955007385	1						
21	0,474117	0,875677	>	0,702191806	0						
22	0,715817	0,181871	<	0,788926958	1						
23	0,493719	0,663052	<	0,706782671	1						
24	0,693213	0,442983	<	0,777706597	1						
25	0,329889	0,423593	<	0,678633543	1						

OBRÁZOK 6. Riešenie problému 4.5

Problém 4.6: Odhad dvojrozmerného určitého integrálu

Na rozdiel od výpočtov jednorozmerných určitých integrálov, v prípade ktorých sa využívajú najmä klasické numerické metódy (*obdĺžniková metóda, lichobežníková*

metóda, Simpsonova metóda, atď.), pri viacrozmerných určitých integráloch (dvojný, trojný, ..., n -tý integrál) je metóda Monte Carlo oveľa efektívnejšia.

Výpočet je veľmi podobný ako u jednorozmerných určitých integrálov, rozdiel je iba v generovaní pseudonáhodných hodnôt pre ďalšie rozmery. Pri výpočte jednorozmerného integrálu vypočítame funkčné hodnoty v n uzlových bodoch, pri prechode k d -rozmernému prípadu počet uzlových bodov vzrastie na n^d . Práve z tohto dôvodu by použitie numerických metód bolo časovo veľmi náročné.

Ideme odhadovať dvojný určitý integrál nezápornej funkcie $f(x, y)$ na oblasti $S = [a, b] \times [c, d]$. Našou úlohou je vypočítať približný objem telesa T ohraničeného rovinami $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = 0$ a plochou funkcie $f(x, y)$.

Označme $MAX(f(x, y))$ hodnotu na osi z , kde funkcia $f(x, y)$ dosahuje svoje maximum na oblasti $S = [a, b] \times [c, d]$. Generujeme n pseudonáhodných súradníc bodov $A_i[x_i, y_i, z_i]$ s rovnomerným rozdelením, pričom hodnoty x_i patria do intervalu (a, b) , hodnoty y_i do intervalu (c, d) a hodnoty z_i do intervalu $(0, MAX(f(x, y)))$. Tieto body vyplnia hranol v priestore. Teleso T je teda podmnožinou hranola a k odhadu dvojného určitého integrálu je potrebné zistiť pomer ich objemov. Pre každý náhodný bod $A_i[x_i, y_i, z_i]$ spočítame funkčnú hodnotu pre (x_i, y_i) . Pokiaľ vygenerovaná hodnota z_i je menšia než vypočítaná hodnota $f(x_i, y_i)$, bod $A_i[x_i, y_i, z_i]$ patrí telesu T . Nech počet bodov ležiacich vnútri telesa T je m . Pravdepodobnosť javu, že náhodný bod padne do telesa T sa teda rovná m/n . Odhadovaná hodnota dvojného určitého integrálu je potom

$$\iint_{\substack{a < x < b \\ c < y < d}} f(x, y) dx dy = \frac{m}{n} V_{\text{hranol}}$$

kde $V_{\text{hranol}} = (b - a)(d - c)MAX(f(x, y))$.

Úloha: V tabuľkovom kalkulátore vypočítajte približnú hodnotu nasledovného dvojného určitého integrálu (podľa [3]):

$$\iint_{0,2 \ 0,6}^{1 \ 1} \frac{2x + 2y^2}{3} dx dy$$

Hodnotu dvojného určitého integrálu najprv vypočítame analyticky:

$$\begin{aligned} \iint_{0,2 \ 0,6}^{1 \ 1} \frac{2x + 2y^2}{3} dx dy &= \int_{0,6}^1 \left[\frac{2x^2}{6} + \frac{2y^2}{3} x \right]_{0,2}^1 dy \\ &= \int_{0,6}^1 \left(\frac{2 \cdot 1^2}{6} - \frac{2 \cdot 0,2^2}{6} + \frac{2y^2}{3} - \frac{2y^2 \cdot 0,2}{3} \right) dy = \\ &= \int_{0,6}^1 \left(\frac{1,92}{6} - \frac{1,6y^2}{3} \right) dy = \left[\frac{1,92y}{6} + \frac{1,6y^3}{9} \right]_{0,6}^1 = \frac{1,92}{6} + \frac{1,6}{9} - \frac{1,152}{6} - \frac{0,3456}{9} = \\ &= 0,128 + 0,1394 = 0,2674. \end{aligned}$$

Ideme vypočítať približný objem telesa T pod plochou funkcie $y = f(x, y) = (2x + 2y^2)/3$, ktorá je ďalej ohraničená rovinami $x = 0,2$, $x = 1$, $y = 0,6$, $y = 1$ a $z = 0$. Maximum tejto funkcie na oblasti $S = [0,2; 1] \times [0,6; 1]$ je 1,3333. Odhad dvojného určitého integrálu vypočítame v tabuľkovom kalkulátore nasledovne:

V oblasti **A2:C1000001** pomocou funkcie **=RAND()** vygenerujeme 1.000.000 pseudonáhodných súradníc bodov $A_i[x_i, y_i, z_i]$ s rovnomerným rozdelením, pričom hodnoty x_i sú generované z intervalu $(0,2; 1)$ (požívajme vzorec **=0,2+0,8*RAND()**),

hodnoty y_i z intervalu $(0,6; 1)$ (požívajme vzorec $=0,6+0,4*\text{RAND}()$) a hodnoty z_i z intervalu $(0; 1,34)$ (požívajme vzorec $=1,34*\text{RAND}()$). Potom v stĺpci **E** pre každý vygenerovaný bod $A_i[x_i, y_i, z_i]$ spočítame funkčnú hodnotu pre (x_i, y_i) . Pokiaľ platí nerovnosť $z_i \leq f(x_i, y_i)$, bod patrí telesu T . Do bunky **F2** zadáme vzorec $=\text{IF}(C2 \leq E2, 1, 0)$, ktorý nám vráti 1, ak príslušná nerovnosť platí, inak vráti 0. Tento vzorec potom dvojitým kliknutím na malý štvorček v pravom dolnom rohu skopírujeme do oblasti **F2:F100001**.

V stĺpci **J** vypočítame odhady dvojného určitého integrálu po vygenerovaní 1, 10, 100, ..., 1.000.000 náhodných bodov (kde napr. $J8 := J11 * \text{SUM}(F2:F100001) / I8$). Pretože analyticky vypočítanú hodnotu dvojného integrálu poznáme, v stĺpci **L** môžeme vypočítať aj jednotlivé odchýlky. Pri $n = 1.000.000$ (kde $L8 := \text{ABS}(\$I\$13 - I8)$) môžeme dostať výsledok s presnosťou až na 3 desatinné miesta. Výsledok získaný metódou Monte Carlo sa teda blíží výsledku získaného analytickým výpočtom (obr. 7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	X	Y	Z		f(x,y)	Počet bodov v objeme			Počet strelieb	Odhad dvojného integrálu	Vzorec	Odhýlka
2	0,488089	0,771649	0,567447	<	0,722353508	1			1	0,426667	=I11*(F2/I2)	0,159267
3	0,626201	0,718227	1,231755	>	0,761377006	0			10	0,341333	=I11*SUM(F2:F11)/I3	0,072933
4	0,540356	0,942923	1,310315	>	0,952972765	0			100	0,238933	=I11*SUM(F2:F101)/I4	0,028467
5	0,938467	0,938933	0,625372	<	1,213375088	1			1000	0,254299	=I11*SUM(F2:F1001)/I5	0,013107
6	0,501632	0,835333	0,333981	<	0,799608431	1			10000	0,264235	=I11*SUM(F2:F10001)/I6	0,003165
7	0,225964	0,877365	0,544412	<	0,663821817	1			100000	0,266534	=I11*SUM(F2:F100001)/I7	0,000866
8	0,545481	0,863594	0,075876	<	0,860850353	1			1000000	0,265751	=I11*SUM(F2:F1000001)/I8	0,001649
9	0,206021	0,728395	0,227676	<	0,491053793	1						
10	0,763162	0,727062	0,185466	<	0,861187439	1			MAX f(x,y):	1,33333333		
11	0,639157	0,89498	0,295888	<	0,960097931	1			Objem hranola:	0,42666667		
12	0,421364	0,867948	0,387682	<	0,783131726	1			Hodnota dvojného integrálu:	0,2674		
13	0,700881	0,727468	0,82171	>	0,820060168	0						
14	0,520617	0,877299	0,915832	>	0,860180295	0						
15	0,271296	0,771372	0,751123	>	0,577540642	0						
16	0,744621	0,772263	0,242773	<	0,894007891	1						
17	0,980876	0,835671	0,450173	<	1,119481302	1						
18	0,507923	0,754864	1,11561	>	0,718494735	0						
19	0,9937	0,900122	0,841461	<	1,202613187	1						
20	0,757205	0,812392	0,07094	<	0,944790803	1						
21	0,835827	0,644484	0,862441	>	0,834124672	0						
22	0,442297	0,944165	0,074358	<	0,889163835	1						
23	0,388666	0,778135	0,800421	>	0,662773555	0						
24	0,938741	0,929271	0,494339	<	1,201523489	1						
25	0,749887	0,912572	0,17458	<	1,055182951	1						
26	0,793524	0,804103	0,87492	<	0,960070246	1						
27	0,634221	0,63281	0,369325	<	0,689780153	1						
28	0,48289	0,736416	1,076747	>	0,683465442	0						
29	0,891263	0,788762	1,002111	<	1,008938939	1						
30	0,671911	0,748274	0,81488	<	0,821216526	1						

OBRÁZOK 7. Riešenie problému 4.6

ZÁVĚR

Na základe uvedených príkladov môžeme skonštatovať, že tabuľkový kalkulátor MS Excel 2013 je užitočný nástroj na výpočet i zložitejších matematických problémov metódou Monte Carlo, ktorý umožňuje získať približné riešenie bez používania hlbších poznatkov. Do budúcnosti možno predpokladať, že metóda Monte Carlo nebude svoju popularitu strácať, keďže jej najväčšia nevýhoda – výpočtový čas – sa prudkým rozvojom výpočtovej techniky neustále skrčuje.

REFERENCE

- [1] Dodge, M., Stinson, C.: Microsoft Excel 2013 Inside Out. Microsoft Press, Redmond, WA, 2013. ISBN 978-0-7356-6905-5
- [2] Knežo, D.: O metóde Monte Carlo a možnostiach jej aplikácií. Transfer inovácií 24, Košice, 2012. ISSN 1337-7094

- [3] Straka, M.: Simulácia diskretných systémov a simulačné jazyky. Edičné stredisko AMS, Košice, 2005. ISBN 978-80-8073-289-2
- [4] Verschuuren, G.: Excel Simulations. Holy Macro! Books, Uniontown, OH, 2014. ISBN 978-1-61547-022-8

KATEDRA MATEMATIKY A INFORMATIKY, EKONOMICKÁ FAKULTA, UNIVERZITA J. SELYEHO,
KOMÁRNO, SLOVENSKÁ REPUBLIKA

E-mail address : guboi@ujssk