South Bohemia Mathematical Letters
Volume 23, (2015), No. 1, 28-39.

KŘIVKY V PROGRAMU GEOGEBRA

ROMAN HAŠEK

Abstrakt. Článek se věnuje vyšetřování rovinných křivek zadaných jako množiny bodů daných vlastností v prostředí programu GeoGebra. Geometrické konstrukce použité k získání křivek a jejich rovnic odkazují k rovinným mechanismům, s jejichž pomocí lze tyto křivky kreslit. Je ukázáno, že téma mechanického kreslení křivek, ať už s využitím konkrétních mechanismů nebo jejich modelů v dynamickém geometrickém programu, může být uplatněno ve výuce matematiky různých úrovní.

Úvod

Cílem článku je prostřednictvím konkrétních příkladů představit program GeoGebra [14] jako vhodný nástroj pro vyšetřování křivek a modelování jejich vzniku, který je pro tento účel efektivně použitelný na různých úrovních matematického vzdělávání.

Křivky zde představené budou zadány jako množiny bodů daných vlastnosti, které lze kreslit pomocí rovinných mechanismů. Mechanismem rozumíme soustavu pohyblivě spojených pevných členů (úseček), jejichž vzájemný pohyb je těmito spojeními spřažen tak, že vynucený pohyb jednoho členu vyvolá jednoznačné pohyby členů ostatních; bod některého z těchto členů potom vykresluje křivku. Každá takováto křivka je křivkou algebraickou, tj. lze ji zapsat rovnicí $f(x, y) = 0$, kde $f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j$; $m, n \in N$ je mnohočlen proměnných x, y s reálnými koeficienty a_{ij}. Doplňme, že křivky, které nejsou algebraické, např. řetězovka nebo cykloida, nazýváme křivkami transcendentními.

Zaměříme se na zobrazení uvedených křivek v GeoGebře a na možnosti využití algebraického systému tohoto programu jak pro automatické odvození jejich rovnic na základě dynamické geometrické konstrukce provedené v *Nákresně*, tak i pro ruční odvození postupnými kroky. Křivku zobrazíme prostřednictvím funkce *MnozinaBodu*, k výpočtu její rovnice jako množiny bodů dané vlastnosti pak použijeme funkci *RovniceMnozinyBodu*, za kterou se skrývají postupy automatického odvozování a dokazování geometrických vlastností. Funkce počítačové algebry programu GeoGebra jsou založeny na jádru volně šiřitelného systému počítačové algebry *Giac* [12], které je součástí instalace stávající verze GeoGebry 5.0. Pro externí výpočty je v případě připojení k internetu využíván robustnější systém *Singular* [7].

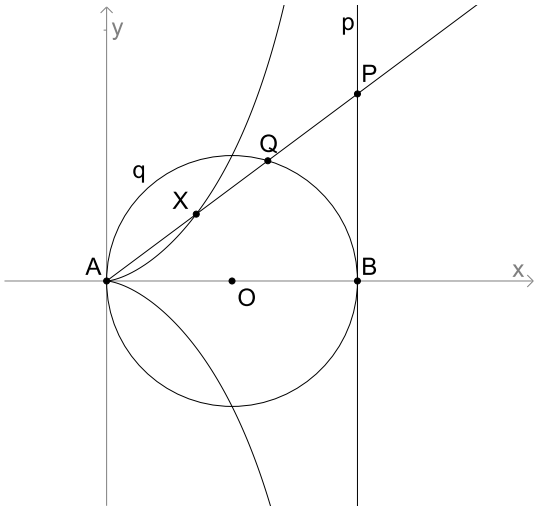
1. Rovnice křivky

Výše uvedené využití GeoGebry si budeme ilustrovat na příkladu algebraické křivky 3. stupně zvané Dioklova kisoida. Diokles, řecký matematik a geometr žijící

Key words and phrases. Křivka, množina bodů dané vlastnosti, rovinný mechanismus, GeoGebra.

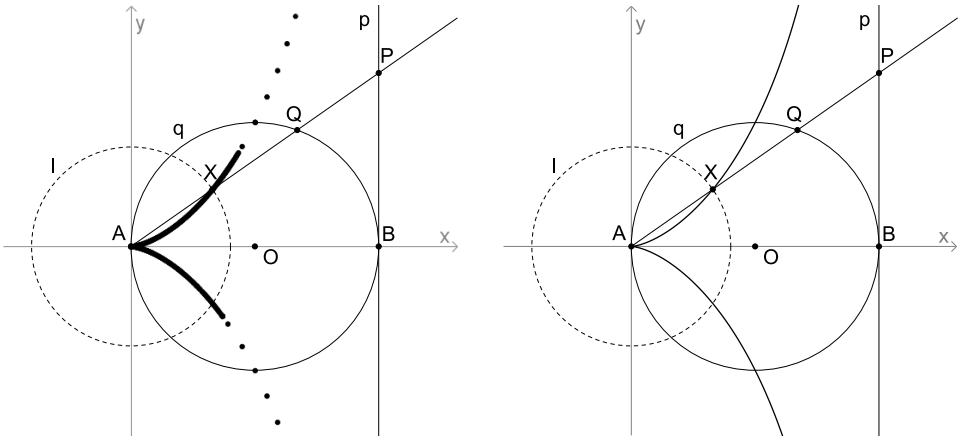
v letech 240 př. n. l.–180 př. n. l., použil tuto křivku k řešení problému zdvojení krychle [8], [19].

Dioklova kisoida je určena kružnicí, její tečnou a bodem souměrným podle jejího středu s bodem dotyku tečny takto: *Je dána kružnice q s průměrem AB a její tečna p sestrojená v bodě B. Z bodu A vedeme polopřímku protínající kružnici q v bodě Q a tečnu p v bodě P. Potom bod X polopřímky, pro který platí $|AX| = |PQ|$, je bodem kisoidy, viz Obr. 1*, [24]. Kisoidy obecně jsou křivky určené dvěma křivkami a



Obrázek 1. Dioklova kisoida

bodem [5]. Dioklova kisoida je tak kisoidou kružnice q a přímky p vzhledem k bodu A. Nyní ji dle uvedené definice sestrojíme v *Nákresně* GeoGebry, viz Obr. 2.

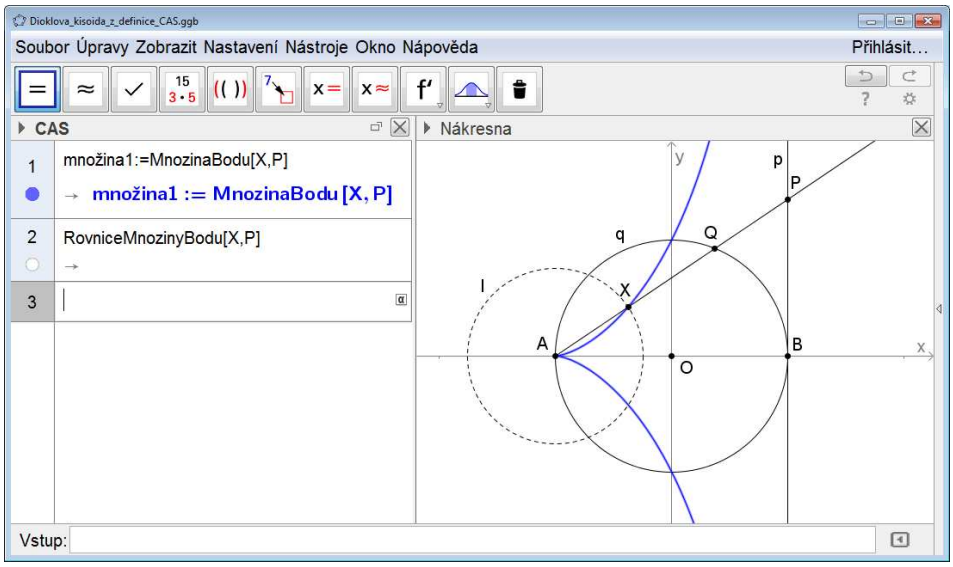


Obrázek 2. Konstrukce Dioklovy kisoidy dle definice – vlevo použití stopy bodu X, vpravo použití nástroje *Množina bodů*

Nejprve sestrojíme kružnici q se středem $O = (\frac{1}{2}, 0)$ procházející bodem $B = [1, 0]$, jejím druhým průsečíkem s osou x je bod $A = (0, 0)$, a přímku p jako

kolmici k ose x procházející bodem B. Potom na přímku p umístíme pohyblivý bod P, sestrojíme polopřímku AP a určíme její průsečík Q s kružnicí q. Bod X, který náleží příslušné kisoidě, sestrojíme jako průsečík polopřímky AP s kružnicí l o poloměru $|PQ|$ se středem A (použijeme nástroj *Kružnice daná středem a poloměrem*, kde jako poloměr zadáme `Usecka[P,Q]`). Pro prvotní ohledání tvaru hledané křivky použijeme nástroj *Stopa zapnuta*, který aktivujeme pro bod X, výsledek vidíme na Obr. 2, vlevo. Numericky vypočítanou podobu křivky získáme aplikací nástroje *Množina bodů*, jehož vstupními údaji jsou dva body, nejprve bod vytvářející množinu (tj. bod X), potom bod, jehož pohybem množinu vytváříme (tj. bod P), viz Obr. 2, vpravo. Stejného výsledku dosáhneme zadáním příkazu `MnozinaBodu[X,P]` do vstupního řádku nebo v prostředí *CAS*.

Vedle zmíněných nástrojů pro empirické zkoumání množiny bodů dané vlastnosti je v programu GeoGebra uživateli dostupná funkce *RovniceMnozinyBodu* pro automatické odvození rovnice množiny bodů dané vlastnosti z příslušné konstrukce v *Nákresně*. Tuto funkci aplikujeme na provedenou konstrukci prostřednictvím prostředí *CAS* (použití *CAS* není nutné, funkci lze zadat i prostřednictvím vstupního řádku), výsledek vidíme na Obr. 3. Pro úplnost zadáme nejprve funkci *MnozinaBodu* příkazem `MnozinaBodu[X,P]`. Již víme, že jejím výsledkem je numericky spočítaná křivka vyšetřované množiny, na obrázku zobrazená modrou čarou v *Nákresně*.



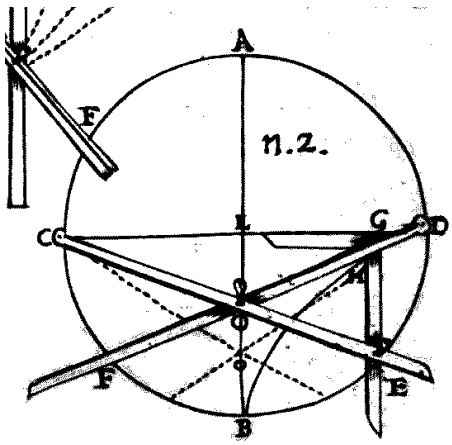
Obrázek 3. Konstrukce Dioklovy kisoidy dle definice – automatický výpočet rovnice užitím funkce *RovniceMnozinyBodu*

Stejným způsobem zadáme i příkaz `RovniceMnozinyBodu[X,P]`. Jak je patrné z prázdného výstupního pole na řádku č. 2 okna *CAS* na Obr. 3, nedostaneme na něj žádnou odpověď.

Znamená to snad, že v programu GeoGebra nelze automaticky určit rovnici kisoidy? Nikoliv, tuto rovnici určit lze, musíme však použít vhodnou konstrukci. Algoritmus symbolického odvození rovnice množiny bodů dané vlastnosti, který je skryt za funkcí *RovniceMnozinyBodu*, je založený na řešení soustavy algebraických rovnic

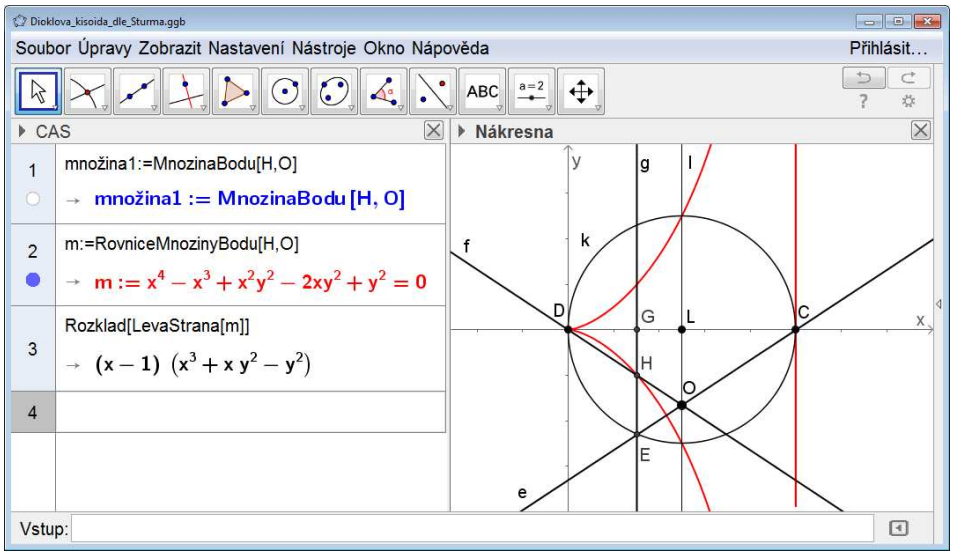
eliminací proměnných použitím metody Gröbnerových bází. Rovnice jsou přitom odvozeny z konstrukce úlohy v *Nákresně*. Z této nutnosti algebraické reprezentace geometrické konstrukce potom pramení ony nečekané situace, v nichž jako výsledek funkce *RovniceMnozinyBodu* buď nedostaneme žádnou rovnici, nebo dostaneme rovnici, která popisuje množinu složitější, než je ta, kterou zkoumáme. Stačí třeba, abychom konstrukci provedli s použitím nástrojů *Nákresny* tak, že ji nelze převést na soustavu algebraických rovnic (například je v ní skryt nějaký numerický výpočet). Tomu lze předejít tak, že provádíme pouze konstrukce Eukleidovské, tj. konstrukce podle prvních tří Eukleidových postulátů (viz [10]): *(1) Vytvořit úsečku, která spojuje dva dané různé body. (2) Danou úsečku na jedné i druhé straně prodloužit tak daleko, jak potřebujeme. (3) Vytvořit kruh o daném středu, na jehož obvodě leží daný bod.* Tyto konstrukce, které jsou známé též jako konstrukce pomocí pravítka (bez měřítka) a kružítka, lze vždy zapsat algebraickými rovnicemi, [6]. Ani Eukleidovská konstrukce nám ale automaticky nezaručí správný výsledek. Určení rovnice dané množiny bodů komplikují také takové vztahy mezi prvky konstrukce, které nelze rovnicemi reprezentovat jednoznačně. Například nelze rozlišit mezi dvěma průsečíky přímky s kružnicí.

Hledáme tedy konstrukci kisoidy, která co nejvíce splňuje uvedené požadavky. Pro inspiraci se zaměříme na zařízení pro mechanické kreslení Dioklovy kisoidy. Použijeme například to, které uvádí Sturm v [22] (*Fig.111.n.2*), viz Obr. 4. V *Nákres-*



Obrázek 4. Mechanismus pro kreslení Dioklovy kisoidy, převzato z [22]. *Pozn.: Prvky v levém horním rohu náleží jinému zařízení. Obrázek je výřezem ze stránky s více ilustracemi.*

ně GeoGebry sestrojíme dynamický model tohoto mechanismu, pro zachování návaznosti na předchozí konstrukce oproti originálu zrcadlové převrácený, tak, aby byl hrot příslušné kisoidy v počátku soustavy souřadnic, viz Obr. 5. Nejprve sestrojíme body $C = (1, 0), D = (0, 0)$ a kružnici k se středem $L = (\frac{1}{2}, 0)$ a průměrem CD. Potom v bodě L sestrojíme kolmici l na osu x a pohyblivě na ni umístíme bod O. Bodem O vedeme přímky e, f, první jdoucí bodem C, druhou jdoucí bodem D. V následujícím kroku určíme průsečík E přímky e a kružnice k. Nakonec bodem E vedeme kolmici k ose x. Její průsečík s přímkou f, bod H je bodem Dioklovy kisoidy kružnice k a přímky $x = 1$ vzhledem k bodu D. Tím je model



Obrázek 5. Konstrukce Dioklovy kisoidy dle Sturma – automatický výpočet rovnice užitím funkce `RovniceMnozinyBodu`

mechanismu z Obr. 4 hotov. Pohybujeme-li bodem O, bod H opisuje Dioklovu kisoidu. Oprávněnost tohoto tvrzení, tj. to, že bod H splňuje výše uvedenou definici této křivky, je zřejmá. Doplníme-li si do konstrukce v *Nákresně* na Obr. 5 průsečík přímky e s osou y, říkejme mu třeba R, stačí dokázat, že $|DH| = |RE|$ pro všechny polohy bodu O na přímce l. Detailní provedení důkazu přenechávám čtenáři. Nás v tuto chvíli zajímá, jaká bude reakce programu GeoGebra na zadání příkazu `RovniceMnozinyBodu[H,O]`. Výsledkem je algebraická rovnice čtvrtého stupně

$$x^4 - x^3 + x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 = 0, \tag{1.1}$$

kterou vidíme v druhém řádku okna *CAS* na Obr. 5. Z jejího grafického znázornění, které je v *Nákresně* provedeno červenými čarami, stejně jako z rozkladu mnohočlenu na její levé straně, viz třetí řádek *CAS*, po němž se dá (1.1) přepsat do tvaru

$$(x-1)(x^3 + xy^2 - y^2) = 0, \tag{1.2}$$

je zřejmé, že kromě vlastní kisoidy o rovnici

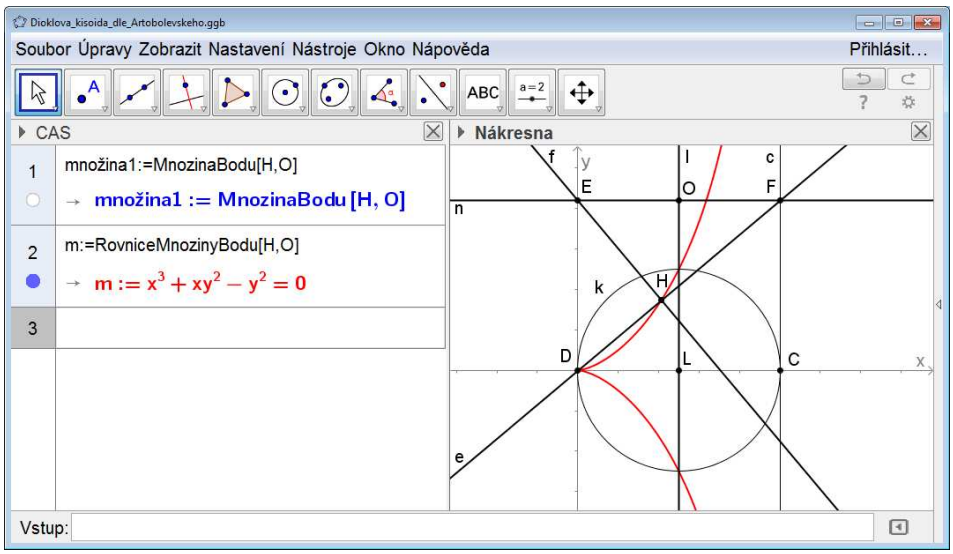
$$x^3 + xy^2 - y^2 = 0 \tag{1.3}$$

algebraický systém programu GeoGebra mylně vyhodnotil jako řešení naší úlohy také body přímky $x - 1 = 0$. Příčinou je pravděpodobně nemožnost algebraicky rozlišit mezi dvěma průsečíky přímky e s kružnicí k. Po přepsání do rovnic se ztrácí jejich odlišnost a algoritmus s nimi nakládá stejně. To, co v obrázku provádíme pouze s bodem E, pak „provede“ i s bodem C.

Pokud si uvědomíme popsané limity počítačového odvození rovnice hledané množiny a výslednou rovnici konfrontujeme s geometrickou podstatou problému, abychom odebrali nežádoucí řešení (tj. nežádoucí činitele výsledného polynomu), je pro nás funkce *RovniceMnozinyBodu* bezesporu efektivním nástrojem pro řešení těchto úloh. Rovnici Dioklovy kisoidy (1.3) jsme nakonec získali. Přesto se pokusíme

najít takovou konstrukci, která by vedla k opravdu jednoznačnému řešení daného problému.

Opět se necháme inspirovat mechanickým kreslením kisoidy. Tentokrát použijeme mechanismus, který představil Artobolevskij v [1] (str. 178, mechanismus č. 1130) a který je též uveden na webové stránce [2]. Konstrukci, jejíž výsledek vidíme v *Nákresně* na Obr. 6, zahájíme stejně jako tu předchozí. Sestrojíme body body



Obrázek 6. Konstrukce Dioklovy kisoidy dle Artobolevského – automatický výpočet rovnice užitím funkce `RovniceMnozinyBodu`

$C = (1, 0), D = (0, 0)$ a kružnici k se středem $L = (\frac{1}{2}, 0)$ a průměrem CD. V bodě L sestrojíme kolmici na osu x a pohyblivě na ni umístíme bod O, kterým vedeme kolmici n na l (tj. rovnoběžku s osou x). V bodě C sestrojíme další kolmici na osu x, označíme ji c a určíme průsečíky přímky n s osou y a s přímkou c a v uvedeném pořadí je označíme E a F. Nakonec sestrojíme přímku e procházející body D a F a z bodu E k ní vedeme kolmici. Její pata, kterou označíme H, při pohybu bodu O podél l opisuje Dioklovu kisoidu kružnice k a přímky c vzhledem k bodu D. Pro důkaz tohoto tvrzení stačí určit průsečík přímky e s kružnicí k, nazvěme ho třeba K, a tímto bodem vést přímku z bodu C. Potom už se snadno ukáže, že platí $|DH| = |KF|$. Detailní provedení tohoto geometrického důkazu opět přenechávám čtenáři. Zde se zaměříme na automatický výpočet rovnice příslušné kisoidy. V *CAS* zadáme příkaz `RovniceMnozinyBodu[H,O]` (také jsme ho mohli zadat do vstupního řádku, použití *CAS* není nutností). Jak vidíme na Obr. 6, tentokrát je výsledkem čistá algebraická rovnice (1.3) vyšetřované Dioklovy kisoidy. V souladu s poznatkem získaným z předchozí konstrukce je to důsledek toho, že se nám tentokrát podařilo najít konstrukci množiny bodů daných vlastností, která je Eukleidovská a zároveň neobsahuje průsečíky přímky s kružnicí.

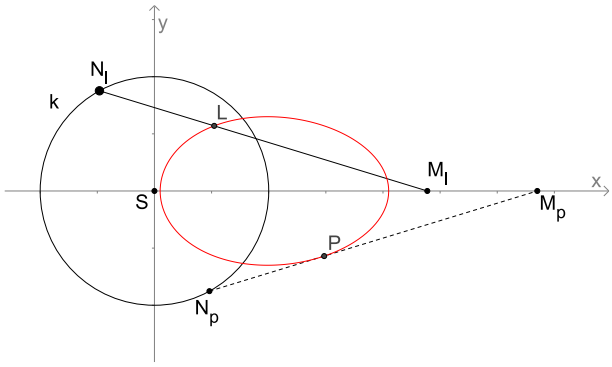
2. Rovinné mechanismy

Při hledání konstrukcí vhodných pro automatické odvození rovnice uvažované množiny bodů dané vlastnosti se nám osvědčilo nechat se inspirovat zařízeními pro mechanické kreslení křivek. Tyto rovinné mechanismy jsou v dnešní době pro výuku matematiky téměř zapomenuty. Přitom v historii zkoumání rovinných křivek sehrály významnou úlohu, [18], [19]. René Descartes (1596–1650) v [8] mimo jiné pojednává o křivkách vykreslovaných rovinnými mechanismy a je zřejmé, že pokládal za samozřejmé, že všechny z dnešního pohledu algebraické křivky se dají tímto způsobem vytvořit. Přitom důkaz tohoto tvrzení provedl anglický matematik Kempe až v roce 1876, [15].

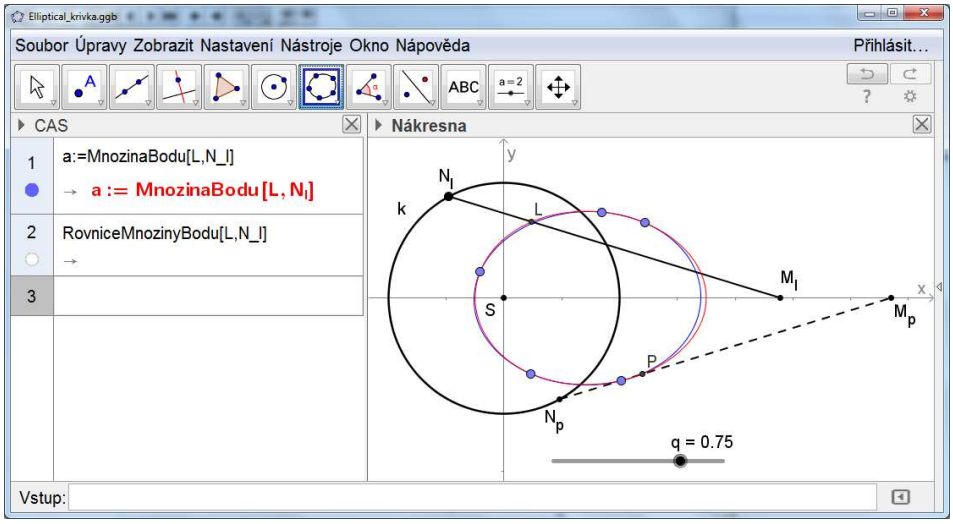
V roce 1877 vydal Kempe útlou popularizační knihu „How to draw a straight line; A lecture on linkages“ [16], kterou lze pro srozumitelnost poskytnutého výkladu a množství ilustračních obrázků i dnes doporučit jako vhodný úvod do rovinných mechanismů. Text vznikl sepsáním Kempeho přednášky pro učitele přírodních věd, věnované jedné pozoruhodné kapitole z historie rovinných mechanismů: hledání mechanismu pro převod otáčivého pohybu na pohyb přímočarý. Toto zadání nebylo rozhodně samoúčelné. Naopak, řešení bylo velice žádoucí v technické praxi. Přinášelo především zefektivnění chodu parních strojů, také však zlepšení fungování obráběcích strojů nebo důlních těžebních mechanismů. Přes zdánlivou triviálnost požadované funkce nebylo vůbec snadné takový mechanismus vymyslet. Jako první předložil řešení této úlohy James Watt v roce 1784. Jeho mechanismus (tzv. *Wattův mechanismus*) [25], však místo přímočarého pohybu realizuje pouze jeho aproximaci. Prvním mechanismem, který uskutečňoval skutečný přímočarý pohyb, byl až *Peaucellierův–Lipkinův mechanismus* [21] představený o 80 let později v roce 1864.

Poutavým způsobem, s detailním rozborem řady mechanismů, podává příběh o hledání mechanismu pro kreslení přímky také Jiří Fiala v článku „Jak přijít úsečce na kloub“ [11]. Jeho studium je vhodné absolvovat s otevřeným GeoGebraBookem [23], v němž jsou vytvořeny opravdu vydařené dynamické modely všech v článku uvedených mechanismů. Oba tyto materiály odhalují potenciál, jaký mají rovinné mechanismy pro výuku matematiky. Jak naznačuje Fiala v úvodu ke svému článku, nabízejí nám vnést do příslušných pasáží matematického učiva příběh, který tam často chybí. Připomeňme jenom, že těch příběhů spojených s mechanismy je celá řada, ne jenom ten o „hledání přímky“. Se zařízeními, která mají geometrickou strukturu rovinných mechanismů, se přece setkáváme každou chvíli, aniž bychom tomu věnovali nějakou pozornost. Přitom je snadné je s pomocí počítače modelovat a na rozličných úrovních matematického přístupu odhalovat jejich geometrickou podstatu, a tím dávat učivu geometrie viditelný praktický smysl. Ilustrujme si tyto myšlenky na konkrétním příkladu tzv. *ellipticalu.*

Elliptical [9], též *eliptický trenažér* je stacionární cvičební zařízení, jehož princip je schematicky znázorněn na Obr. 7. Uživatel stojí (v bodech L, P, pro levou a pravou nohu, v uvedeném pořadí) na dvou dlouhých šlapadlech (úsečky M_lN_l, M_pN_p), z nichž každé je jedním svým koncem otočně připevněno k obvodu setrvačníku (body N_l, N_p na obvodu kruhu k), zatímco jeho druhý konec je volně posuvný ve vodorovném směru (body M_l, M_p na ose x). Cílem je roztočit setrvačník. Cvičencovy nohy se při tom pohybují po křivce vypadající jako elipsa (odtud název zařízení), viz červená křivka na Obr. 7. Je to ale elipsa? Pojďme se pokusit najít odpověď na tuto otázku.



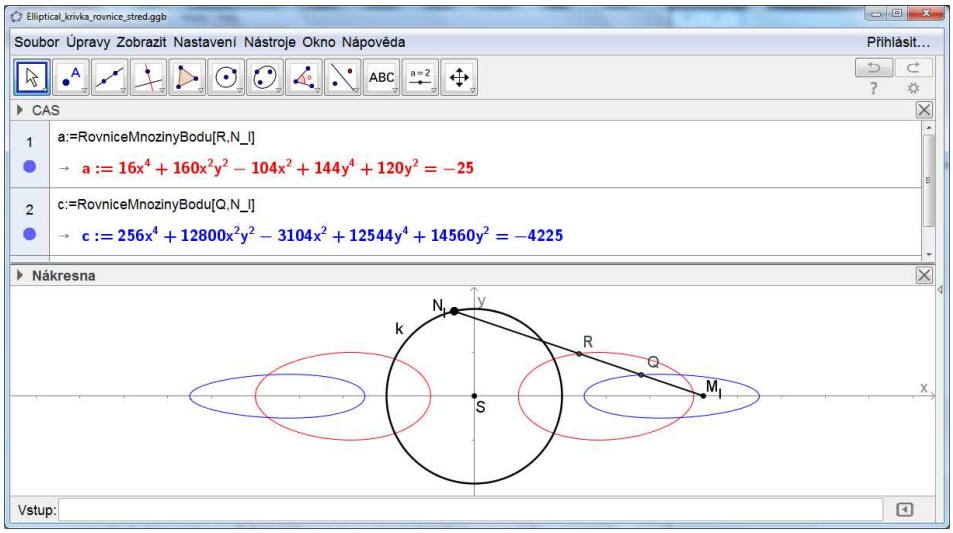
Obrázek 7. Princip ellipticalu



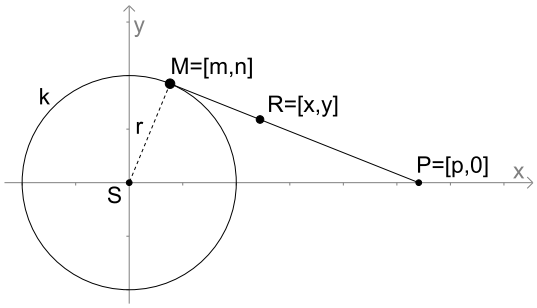
Obrázek 8. Křivka ellipticalu

Nejprve využijeme konstrukci na Obr. 7, kde jsou body L a P zadány příkazy do příkazového řádku ve tvaru $\mathtt{L} = \mathtt{M}_1 + \mathtt{q}(\mathtt{N}_1 - \mathtt{M}_1)$ a $\mathtt{P} = \mathtt{M}_\mathtt{p} + \mathtt{q}(\mathtt{N}_\mathtt{p} - \mathtt{M}_\mathtt{p})$ v daném pořadí, kde hodnota proměnné q je ovládána posuvníkem. Množina je zobrazena pomocí příkazu $\mathtt{MnozinaBodu}[\mathtt{L}, \mathtt{N}_1]$, jak vidíme v okně *CAS* na Obr. 8. Rovnici sice nedostaneme, můžeme ale pomocí nástroje *Kuželosečka daná pěti body* alespoň ověřit, že zobrazená křivka není elipsou. Tuto skutečnost nám program GeoGebra potvrdí automatickým výpočtem rovnice křivky alespoň v případě, kdy její tvořící bod sestrojíme pomocí nástroje *Střed*, jak vidíme pro body ve středu a ve čtvrtině úsečky M_lN_l na Obr. 9. Jedná se o algebraickou křivku čtvrtého stupně.

Při hledání rovnice této křivky pro obecnou polohu tvořícího bodu ale naštěstí nejsme závislí na jejím automatickém výpočtu programem. Algebraický systém GeoGebry můžeme výhodně použít také jako prostředí pro samostatné odvození rovnice křivky, jak si nyní ještě ukážeme. Podle Obr. 10 přiřadíme potřebným bodům M, P, R obecné souřadnice, poloměr kružnice k označíme r a polohu bodu R na



Obrázek 9. Křivky ellipticalu pro střed a čtvrtinu úsečky $M_l N_l$



Obrázek 10. Schéma ellipticalu v soustavě souřadnic x, y

úsečce MP zadáme dělicím poměrem $(M, P; R) = q$. Zadání úlohy je potom ekvivalentní se soustavou čtyř rovnic, které vidíme na prvních čtyřech řádcích níže uvedeného zápisu řešení v *CAS* programu GeoGebra. První dvě rovnice jsou zápisy dvou pevných vzdáleností $|MS| = r$ a $|MP| = l$, které jsou pro mechanismus charakteristické. Zbývající dvě rovnice popisují polohu bodu R na úsečce MP a vznikly přepsáním vztahů

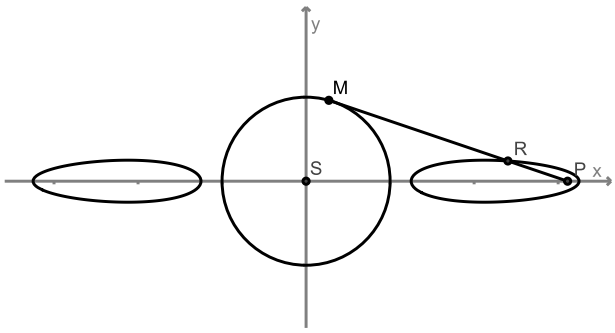
$$(M, P; R) = \frac{R - M}{R - P} = \frac{x - m}{x - p} = \frac{y - n}{y} = q. \tag{2.1}$$

Tuto soustavu čtyř algebraických rovnic řešíme eliminací neznámých m, n, p. Výsledný mnohočlen s parametrem q je bohužel natolik rozsáhlý, že z něho v zaznamenaném kódu vidíme jenom malou část (viz řádek č. 5). Po dosazení konkrétní hodnoty za q, například $q = -3$, dostaneme rovnici křivky

$$256\, x^4 + 12544\, y^4 + 12800\, x^2\, y^2 - 3104\, x^2 + 14560\, y^2 + 4225 = 0, \tag{2.2}$$

která odpovídá příslušné poloze bodu R, viz Obr. 11. Tím je úloha vyřešena. Své zkoumání můžeme uzavřít konstatováním, že výsledná křivka není elipsou. Jedná se o algebraickou křivku čtvrtého stupně.

1	r1:=m^2+n^2-r^2=0 → $\mathbf{r1 := m^2 + n^2 - r^2 = 0}$
2	r2:=(p-m)^2-l^2+n^2=0 → $\mathbf{r2 := -\ell^2 + n^2 + (-m + p)^2 = 0}$
3	r3:=q x-q p -x+m=0 → $\mathbf{r3 := -p\,q + q\,x + m - x = 0}$
4	r4:=q y-y+n=0 → $\mathbf{r4 := q\,y + n - y = 0}$
5	res:=Eliminovat[{r1,r2,r3,r4},{m,n,p}] → $\mathbf{res := \{4\,q^6\,x^2\,y^2 + 4\,q^6\,y^4 - 20\,q^5\,x^2\,y^2 - 4\,q^5\,y^2\,\ell^2 + 4\,q^5\,y^2\,r^2 - 20\,q^5\,y^4 +}$
6	rov:=Substituce[Prvek[res,1],{r=1,l=3,q=-3}]=0 → $\mathbf{rov := 256\,x^4 + 12544\,y^4 + 12800\,x^2\,y^2 - 3104\,x^2 + 14560\,y^2 + 4225 = 0}$
7	R:=Substituce[((q x(P)-x(M))/(q-1),-y(M)/(q-1)),{q=-3}] → $R := \left(\frac{344106026765}{143255359148}, \frac{833363}{3463052}\right)$

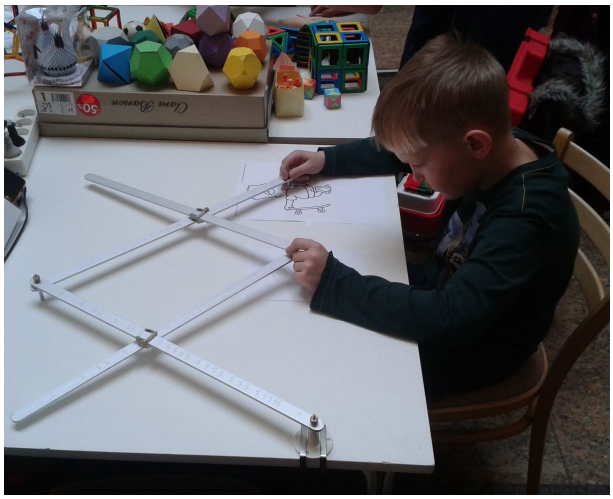


Obrázek 11. Křivka ellipticalu pro $(M, P; R) = -3$

Závěr

Článek se věnoval možnostem využití programu GeoGebra při zkoumání algebraických křivek. Zvláštní pozornost byla věnována aplikaci algebraického systému GeoGebry k automatickému výpočtu rovnice křivky z dané konstrukce. Bylo ukázáno, jaká omezení implementace této metody v programu GeoGebra má a jak je vhodné postupovat pro dosažení správného výsledku. Zde je nutno poznamenat, že zdokonalování schopností programu GeoGebra na poli automatického dokazování a odvozování geometrických vět je předmětem soustavné pozornosti špičkových odborníků v tomto oboru, viz např. [3, 4]. Cílem jejich snah je vytvořit inteligentní algebraický systém interpretující geometrické konstrukce tak, že uvedená omezení budou redukována na minimum.

V článku bylo též poukázáno na ne příliš využitý potenciál rovinných mechanismů pro výuku matematiky. Mohlo by se zdát, že tato zařízení či jejich modely současné školáky uvyklé na počítače a jiné sofistikované hračky neosloví. Členové Katedry matematiky Pedagogické fakulty JU však mají opačnou zkušenost. Během dvou ročníků popularizační akce *Věda pro každého v Géčku*, kterou v jednom českobudějovickém nákupním centru realizovaly fakulty Jihočeské univerzity (viz `https://www.jcu.cz/o-univerzite/udalosti/veda-pro-kazdeho-v-gecku`), měla katedra na svém stanovišti mimo řady jiných aktivit zaměřených na matematiku vystaven pantograf, na němž si zájemci mohli zmenšovat připravené obrázky, viz Obr. 12. Zájem byl nečekaný. Při setkání se skutečným pantografem navíc děti



Obrázek 12. Pantograf na akci *Věda pro každého v Géčku*, n. c. Géčko, České Budějovice, 28. 2. 2015 (foto: autor článku)

začaly zcela přirozeně klást otázky, které se dotýkaly učiva geometrie, např.: „Lze pantograf použít tak, aby zvětšoval?“, „Lze pantografem vytvářet kopie stejně velké jako originál?“, „Jak mohu změnit poměr zmenšení/zvětšení?“.

Reference

[1] Artobolevskij, I. I. *Mechanisms in modern engineering design: Lever mechanisms.* Mir Publ., Moskva, 1976.

[2] Artobolevsky link-gear mechanism for tracing cissoids of Diocles. In *Europeana Collections* [online]. Europeana Foundation, Haag, 2015. Dostupné na `http://www.europeana.eu`

[3] Botana, F., Kovács, Z. A Singular web service for geometric computations, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, August 2015, Volume 74, Issue 3, p. 359-370, Springer (2015).

[4] Botana, F., Hohenwarter, M., Janičić, P., Kovács, Z., Petrović,I., Recio, T., Weitzhofer, S. Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements, *Journal of Automated Reasoning*, March 2015, Volume 55, Issue 1, p. 39-59, Springer.

[5] Cissoid. In *Wikipedia: The Free Encyclopedia* [online]. Dostupné na adrese `https://en.wikipedia.org/wiki/Cissoid`

[6] Courant, R. and Robbins, H. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 1996.

[7] Decker, W., Greuel, G.-M., Pfister, G., Schönemann, H. Singular 4-0-2 — A computer algebra system for polynomial computations. Available at `http://www.singular.uni-kl.de` (2015).

[8] Descartes, R. *Geometrie*, překl. J. Fiala, Oikoymenh, Praha, 2010.

[9] Elliptical trainer. In *Wikipedia: The Free Encyclopedia* [online]. Dostupné na adrese `https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptical_trainer`

[10] Eukleides, *Základy. Knihy I–IV.*, koment. Petrem Vopěnkou, OPS, Nymburk, 2008.

[11] Fiala, J., Jak přijít úsečce na kloub – Půvab polozapomenutých mechanismů, *Vesmír 87*, duben 2008, str. 258, Dostupné na http://casopis.vesmir.cz

[12] B. Parisse, Giac/Xcas, a free computer algebra system. Dostupné na `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html` (2015).

[13] Hašek, R. *Křivky v GeoGebře.* Plenární přednáška na na 7. konferenci Užití počítačů ve výuce matematiky v Českých Budějovicích, 5.–7. listopadu 2015. Dostupné na `http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2015/prednasky/R_Hasek_UPVM_2015.pdf`

[14] Hohenwarter, M. at al. *GeoGebra 5.0.178.0, free mathematics software for learning and teaching.* Dostupné na `http://www.geogebra.org` (2015).

[15] Kempe, A. B. On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1876.

[16] Kempe, A. B. *How to draw a straight line; A lecture on linkages*, London, 1877.

[17] Kovács, Z. *Computer Based Conjectures and Proofs in Teaching Euclidean Geometry*, Dissertation, JKU Linz, 2015. Dostupné na `http://test.geogebra.org/~kovzol/data/diss/diss-20150708.pdf`

[18] Lockwood, E. H. *A Book of Curves.* Cambridge University Press, 1961.

[19] Lomtatidze, L. *Historický vývoj pojmu křivka.* Nadace Universitas v Brně, Brno, 2007. Dostupné na `http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/401091`

[20] Pantograph. In *Wikipedia: The Free Encyclopedia* [online]. Dostupné na adrese `https://en.wikipedia.org/wiki/Pantograph`

[21] Peaucellier–Lipkin linkage. In *Wikipedia: The Free Encyclopedia* [online]. Dostupné na adrese `https://en.wikipedia.org/wiki/Peaucellier%E2%80%93Lipkin_linkage`

[22] Sturm, J. C. *Mathesis Enucleata.* Norimberk, 1689. Dostupné na `https://archive.org/details/johchristophstu00sturgoog`

[23] Vinkler, M. *M – Jak přijít úsečce na kloub* [online], Dostupné na `http://tube.geogebra.org/material/simple/id/75074`

[24] Voráčová, Š. (ed.) *Atlas geometrie.* Praha: Academia, 2012.

[25] Watt's linkage. In *Wikipedia: The Free Encyclopedia* [online]. Dostupné na adrese `https://en.wikipedia.org/wiki/Watt's_linkage`

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Česká republika

E-mail address: `hasek@pf.jcu.cz`