

ZKUŠENOSTI S VÝUKOU POLOHOVÉ STEREOMETRIE UŽITÍM PROGRAMU GEOGEBRA

HANA MAHNELOVÁ

ABSTRAKT. Výuka polohové stereometrie patří také z didakticko-metodického pohledu k obtížnějším tématům středoškolské matematiky. Jedním z možných způsobů, jak výuku tohoto tématu zkvalitnit, je užití dynamického programu GeoGebra, který v současné verzi umožňuje práci se zobrazeným tělesem ve 2D a také simulaci objektu ve 3D. Článek obsahuje popis organizace výuky, ukázky několika vybraných příkladů s konkrétními komentáři a zahrnuje osobní zkušenosti autorky s výukou podporovanou počítačem.

ÚVOD

Rámcové vzdělávací programy uvádějí jako jeden z očekávaných výstupů výuky stereometrie schopnost žáka zobrazit ve volné rovnoběžné projekci hranol a jehlan, sestrojít a zobrazit rovinný řez těchto těles. S principy volného rovnoběžného promítání se žáci seznamují už na základní škole, kdy jsou obvykle schopni zobrazit krychli a kvádr. Střední škola podle svého zaměření a možností rozšiřuje dovednost žáků zobrazit těleso *o* kolmé jehlany (nejčastěji pravidelný čtyřboký) a v některých případech další pravidelné kolmé hranoly. Výjimkou nejsou ani komolé jehlany. Protože konstrukce obrazu tělesa je časově náročná, je víc než vhodné pro další práci mít průměty těles předem připravené. Když jsem před mnoha lety začala svoji učitelskou praxi, běžně si žáci vyráběli ze čtvrtky či kartonu, později z plastové desky, šablony základních těles s otvory v místech vrcholů pro jejich snazší vykreslení. Překreslit zobrazené těleso pomocí šablony zkrátilo dobu potřebnou k získání průmětu tělesa. Dnes, v době používání moderních technologií, lze poměrně rychle připravit pracovní listy s průměty těles. Počítačem vytvořené předlohy jsou přesné a esteticky vzhledné, takže žáky úspěšně motivují k používání pravítka, k přesnému a čistému rýsování. A co víc. Specializované softwary umožňují interaktivní spolupráci mezi žáky a učitelem při řešení stereometrických polohových úloh. Ve své třídě jsem výuku tohoto tématu s maximálním přispěním počítače vyzkoušela. Zvolila jsem dynamický program GeoGebra z důvodu jeho intuitivního ovládání, plošného rozšíření, volné dostupnosti a možnosti pracovat ve 2D nebo 3D okně. Počítač také umožňuje ukázat jiné pohledy na prostorovou situaci, což oceníme především v případech, kdy se právě volné rovnoběžné promítání projeví jako nevhodné.

1. ORGANIZACE VÝUKY

V úvodních hodinách stereometrie žáci společně s učitelkou rýsovali základní tělesa ve volném rovnoběžném promítání. Vzhledem k možnostem školy, kdy se nepodařilo zajistit souvisle několik vyučovacích hodin v počítačové učebně, probíhala navazující výuka tak, že žáci dostali pracovní listy a učitelka pracovala v programu GeoGebra podle nápovědy

žáků. Předlohy odpovídaly přesně zadáním pracovního listu. Podle potřeby byla využívána dvojrozměrná či trojrozměrná počítačová zobrazení. Pro případ, že by některým žákům ani počítačové dynamické zobrazení nepomohlo porozumět situaci v trojrozměrném prostoru, byly v učebně k dispozici také papírové a drátěné modely těles, špejle a plastové desky. Významnou pomůckou učitelky bylo laserové ukazovátko.

Téma polohové stereometrie jsem v pracovních listech rozdělila na tyto části:

Vzájemná poloha přímek

Vzájemná poloha přímky a roviny

Vzájemná poloha dvou rovin

Kritéria rovnoběžnosti

Kritéria kolmosti

Řez tělesa rovinou

Průsečnice dvou rovin

Průnik přímky s rovinou

Průnik přímky s tělesem

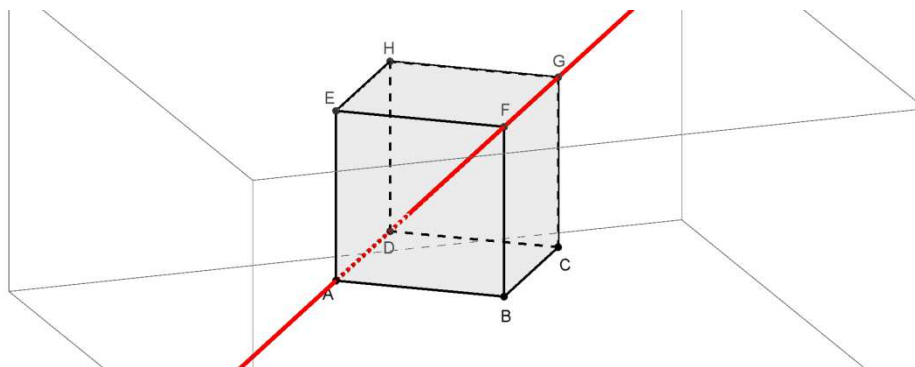
Úlohy byly zadány převážně na krychli, kvádru, pravidelném čtyřstěnu, pravidelném čtyřbokém jehlanu, pro šikovnější žáky jsem měla připravený pracovní list s dalšími tělesy, např. trojbokým, pravidelným pětibokým, šestibokým či osmibokým hranolem, pravidelným šestibokým jehlanem, kolmým hranolem s lichoběžníkovou podstavou, kosým hranolem a jehlanem. Další varianty obsahovaly příklady s přesně zadanými polohami bodů či přímek, avšak v průmětu ležících mimo hrany a vrcholy zobrazeného tělesa.

2. UKÁZKY VYBRANÝCH PŘÍKLADŮ

1.1. Příklad č. 1

V krychli $ABCDEFGH$ rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\leftrightarrow AB$, $\leftrightarrow GH$.

Vybraná úloha je ukázkou situace, kdy volné rovnoběžné promítání není v pracovním listu žáka vhodně zvoleno. Na průmětu krychle obě přímky splynou (obr. 1). Z didaktického hlediska je dobře, když žákům ukážeme, že je třeba sledovat prostorové objekty z různých pohledů a právě to umožní počítačový dynamický trojrozměrný model. Jednoduchým tažením myši těleso snadno rozpohybujeme.

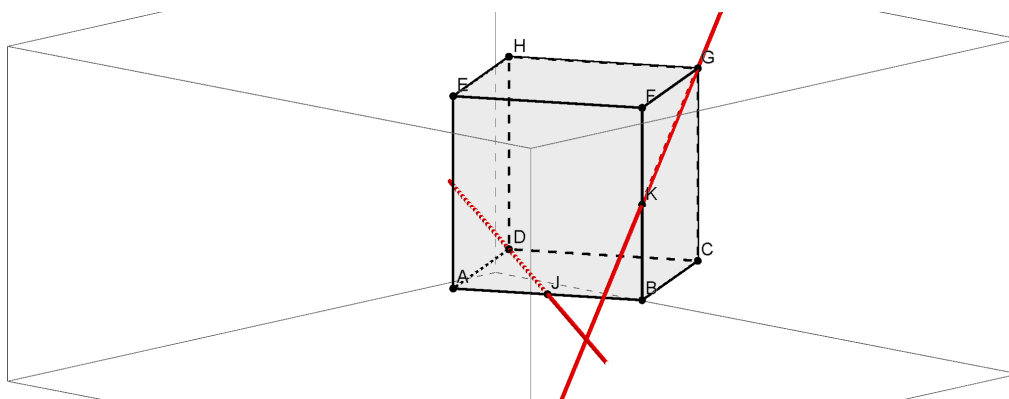


OBRÁZEK 1. Vzájemná poloha přímek $\leftrightarrow AD$ a $\leftrightarrow FG$

1.2. Příklad č. 2

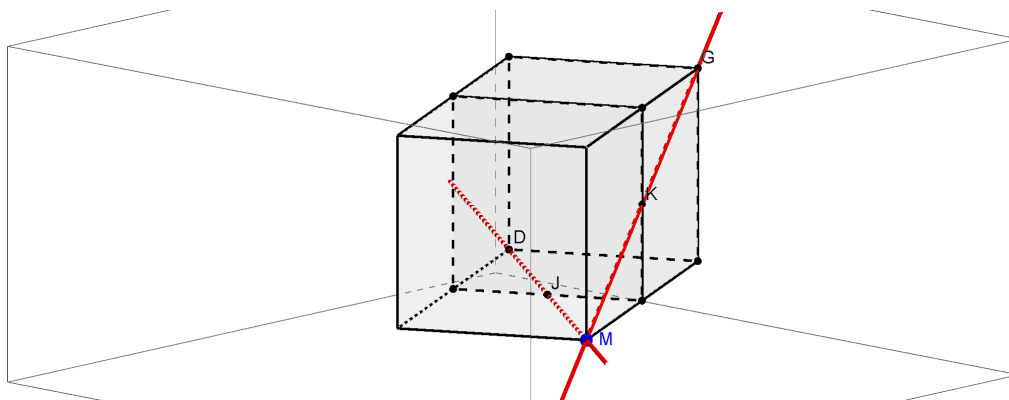
V krychli $ABCDEFGH$ rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\leftrightarrow DJ$, $\leftrightarrow GK$, kde body J a K jsou po řadě středy hran AB a BF .

Situaci ve volném rovnoběžném promítání ukazuje obr. 2. Přímky se jeví jako různoběžné nebo mimoběžné.



OBRÁZEK 2. Vzájemná poloha přímek $\leftrightarrow DJ$ a $\leftrightarrow GK$

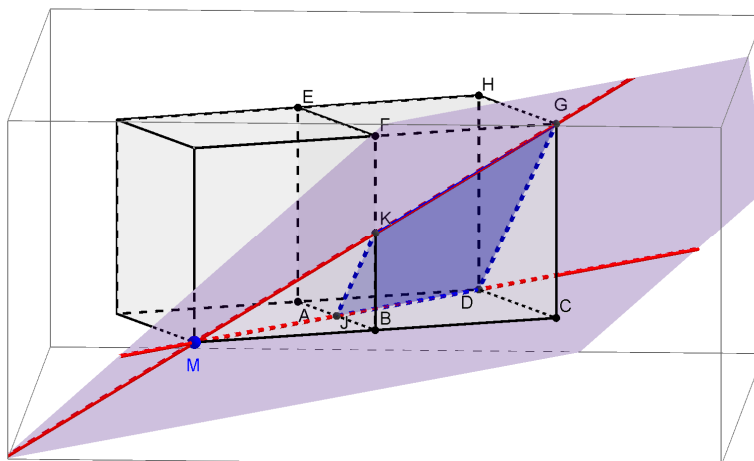
V době, kdy žáci řešili danou úlohu, ještě neuměli sestavit řez těla rovinou. Použili způsob rozšíření zobrazení prostoru pomocí další krychle, obr. 3. V programu GeoGebra další těleso sestojíme snadno např. užitím rovinové souměrnosti. Příklad je dobrou motivací k naučení se řezů na tělese.



OBRÁZEK 3. Rozšíření zobrazeného prostoru

Přímky se protínají v bodě M , který je předním pravým vrcholem přidané krychle. Žákům můžeme zdůraznit, že body D, J, M, K, G leží v jedné rovině, kterou také určují různoběžné přímky $\leftrightarrow DJ, \leftrightarrow GK$. Na počítači můžeme užitím nabídek *Rovina procházející třemi body* a *Průnik dvou ploch* snadno zobrazit řez uvažovanou rovinou

a v případě potřeby pohybem ukazovátka žákům demonstrovat jiný pohled, jako např. na obr. 4.

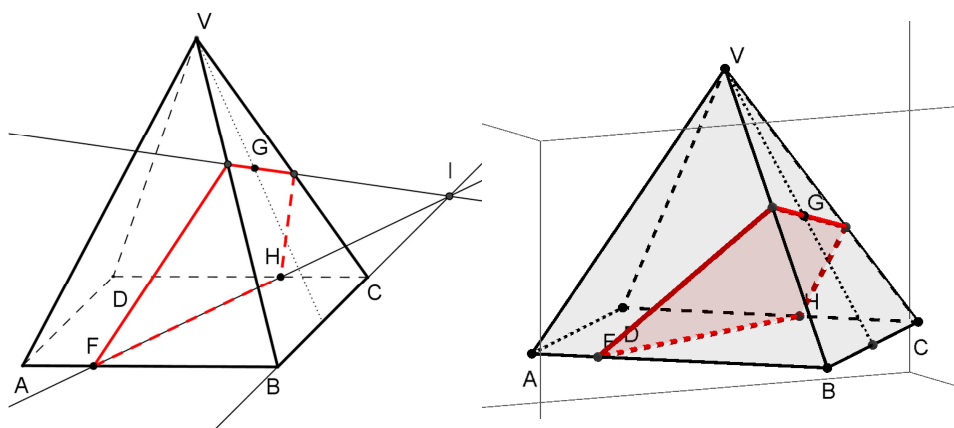


OBRÁZEK 4. Rovina určená přímkami $\leftrightarrow DJ$ a $\leftrightarrow GK$

1.3. Příklad č. 3

Zobrazte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou $\leftrightarrow FGH$, kde bod G náleží výšce boční stěny BCV tělesa.

Při konstrukci obrazu řezu ve volném rovnoběžném promítání žáci obvykle postupují tak, že nejdříve hledají dva body roviny jedné stěny tělesa, jejichž spojením by našli první část řezu. Poté zhodnotí, zda je možné využít rovnoběžnosti pro sestavení další části řezu. Pokud žádný z předchozích postupů není možný, je třeba využít společného průsečíku tří rovin. Úlohy na řezy jsme řešili ve 2D okně, pokud bylo třeba, správnost jsme ověřili ve 3D (obr. 5).

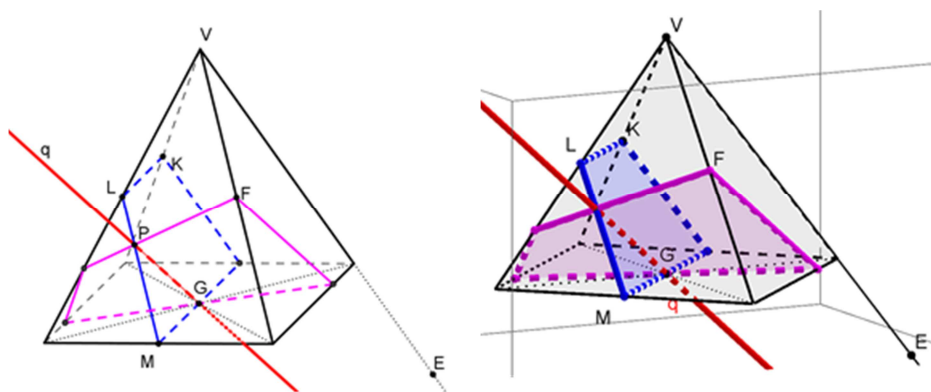


OBRÁZEK 5. Řez jehlanu rovinou ve 2D a 3D

1.4. Příklad č. 4

V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ zobrazte průsečnici rovin $\leftrightarrow EFG$ a $\leftrightarrow KLM$. Body K, L, M, F jsou středy hran, poloha bodů E, G plyne z vytečkovaných čar.

Konstrukci na počítači ve 2D opět provádí učitelka podle nápovědy žáků. Ti současně frontálně rýsují do svého pracovního listu. Mnozí vybarvují pastelkami plochy jednotlivých mnohoúhelníkových řezů. Z důvodu lepší přehlednosti promítaného obrázku jsem skryla popisy některých vrcholů tělesa. Také při řešení průsečnic dvou rovin jsme vyzkoušeli projekci ve 3D okně. Pro většinu žáků už byly obrázky při postupném zobrazování celých rovin, pak řezů a nakonec průsečnice příliš komplikovaný. Špatně se v nich orientovali. (Konečné podoby můžeme porovnat na obr. 6.) Proto jsem se rozhodla v dalších úlohách, kde se pracuje s více než dvěma rovinami, 3D okno dále nevyužívat.

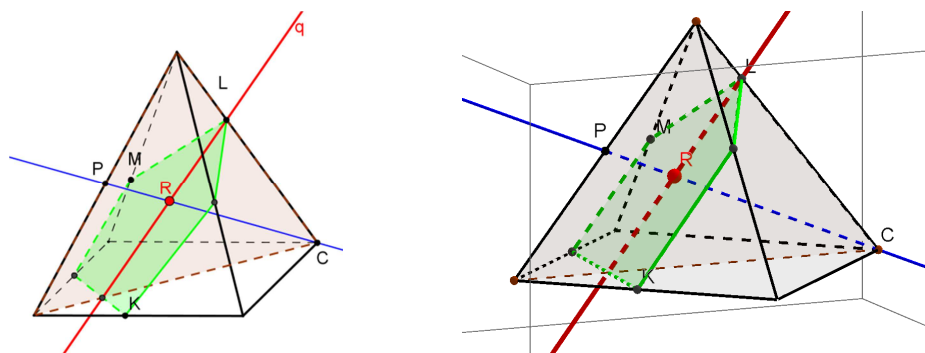


OBRÁZEK 6. Průsečnice rovin ve 2D a 3D

1.5. Příklad č. 5

Zobrazte průnik přímky $\leftrightarrow PC$ s rovinou $\leftrightarrow KLM$ v pravidelném čtyřbokém jehlanu.

Při grafickém řešení (obr. 7) této úlohy používáme dvě roviny, první je zadaná a druhou volíme tak, aby obsahovala danou přímku. Řez jehlanu rovinou $\leftrightarrow KLM$ nepatří k jednoduchým, při konstrukci využíváme několikrát společný bod tří rovin. Tak nám v obrázku vzniká mnoho pomocných čar, které je potřeba včas skrývat, aby žáky nemátly.



OBRÁZEK 7. Zobrazení průsečíku přímky s rovinou ve 2D a 3D

V pracovních listech se řešitelé ochotně učí rozlišovat sílu čar, případně jejich barevné rozlišení. Počítačové řešení rychleji vytvoříme ve 3D okně.

3. ZKUŠENOSTI

Moje původní představa byla taková, že několik prvních hodin, kdy se zavádí a procvičuje teoretická výstavba polohové stereometrie, budou žáci pod mým vedením ovládat připravené interaktivní obrázky, vyslovovat hypotézy a následně je zdůvodňovat. Dle možností ve škole jsem od záměru musela upustit a celá výuka tohoto tématu probíhala víceméně frontálně. Moje požadavky na didaktické prostředky se zúžily na učitelův počítač s nainstalovaným programem GeoGebra verze min. 5.0 (starší ještě nejsou vybaveny prostředím 3D) a dataprojektor. Obojím jsou v naší škole vybaveny všechny nedělené učebny.

Příprava na každou hodinu byla poměrně náročná. Mnoho hodin jsem tvořila a řešila v GeoGebra vybrané příklady tak, aby se zadání i následné řešení vešlo na papír, aby velikost předlohy byla optimální pro práci na papíře. Takto připravené listy jsem nakopírovala každému žákovi. Po žácích jsem vyžadovala, aby pracovali s kvalitními rýsovacími pomůckami. Pokud si vzpomínám, nenastal problém, že by někdo neměl čím rýsovat.

Žáci ochotně pracovali na připravených listech a postupně se zlepšovala kvalita jejich rýsování (rovnoběžek, kolmic, průsečíků přímek, přímky přesně procházely danými body, ...). Mohli pracovat svým tempem. Pokud byli s povinnou prací dříve hotovi, dostali pracovní list s další verzí úloh, případně pomohli slabším spolužákům.

Jak už bylo řečeno, řešila jsem danou úlohu na počítači podle pokynů žáků. To mi umožnilo vyvolat jednotlivce a zjistit, co mu dělá největší problém. Žáci si současně vštěpovali důležité pojmy a rozvíjeli své schopnosti slovního vyjádření. Zpočátku jim to dělalo trochu problém, ale časem bylo zřetelné výrazné zlepšení jejich slovního projevu k danému tématu. Tento způsob práce jsem využila také při zkoušení. Mohlo by se zdát, že souběžné řešení úlohy žákem na papíře a učitelem na počítači bude nesynchronní. Moje zkušenost je taková, že jsme s většinou žáků drželi krok (zpočátku jsem byla i rychlejší), pokud se pracovalo ve 2D. Práce ve 3D okně už mi trvala o trochu déle. Vysvětluji si to nedostačujícím hardwarem počítačů. Při pohybu kurzorem se např. rozblíkají popisy ve 3D okně. Stalo se, že obraz ve 3D se nezobrazil celý. Problém jsem odstranila nastavením vhodného rozlišení.

Každý pracovní list byl oboustranný formátu A4, pokud jsme řešili úlohy se zdůvodňováním, na každé straně byly minimálně tři příklady. Strana listu, kde se

procvičovaly konstrukční dovednosti, obsahovala obvykle šest úloh. Domnívám se, že takový způsob výuky poskytl prostor k řešení velkého počtu příkladů a potřebnému procvičení.

Řešení na počítači umožnilo ukázat různé způsoby řešení vedoucí ke správnému výsledku, jednoduchou manipulací opakovat postup po krocích, demonstrovat přesné a kvalitní grafické řešení, pohybovat tělesem ve 3D a ukázat i jiné pohledy na prostorovou situaci.

Práce ve 3D okně programu má ale určité slabiny. Např. chceme-li, aby zobrazení tělesa ve 3D správně rozlišovalo viditelnost hran, není možné nastavit ve *Vlastnostech objektu* na kartě *Barva* neprůhlednost na 0. Mnoho objektů je potřeba měnit přes algebraické okno. V grafickém 3D se obtížně „uchopí“ pomocí ukazovátko. Nabídka *Bod na objektu* ve 3D umístí bod do roviny, nikoli jen na přímku. Zde jsem použila pro umístění bodu na přímku ikonu *Nový bod* a při přiblížení k přímce se automaticky bod přichytí.

ZÁVĚR

Stereometrie, stejně jako planimetrie, nepatří mezi příliš oblíbená témata matematiky pro žáky a mnohdy ani pro učitele. Vzpomínám si, jak jsem črtávala na tabuli tělesa podobná krychlí a jehlanům, využívala barevné křídly například k odlišení rovin a běhala po třídě, abych žákům ukázala správné řešení, které mám vyrýsované na papíře. Doba se změnila. Po zpětném projektoru, jednom z významných materiálních didaktických prostředků, nastoupila výpočetní technika. Počítač však klade na učitele nové nároky. Ale může hodně pomoci. Příprava hodin polohové stereometrie s podporou počítače mne stála mnoho úsilí a času. Předpokládám, že podle těchto příprav budu moci učit ještě několik dalších let. Významnou odměnou pro mne byla kladná zpětná vazba přímo od žáků.

REFERENCE

- [1] BALADA, Jan. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia: RVP G*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007, 100 s. ISBN 978-80-87000-11-3.
- [2] POLÁK, Josef. *Středoškolská matematika v úlohách*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 626 s. ISBN 80-719-6166-3.
- [3] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

ADRESA AUTORA; GYMNAZIUM BOHUMILA HRABALA V NYMBURCE, ČESKÁ REPUBLIKA
E-mail address :h.mahnelova@seznam.cz