

## DĚLENÍ KRUHU NA OBLASTI

MAREK VEJSADA

ABSTRAKT. V textu se zabývám řešením následujícího problému: Zvolíme na kružnici určitý počet bodů tak, aby jejich vzájemným spojením vznikly tětivy, z nichž se žádné tři nebo více neprotínají v jediném bodě. Tětivy tak rozdělí kruh na oblasti, jejichž počet v závislosti na počtu zvolených bodů na kružnici mě zajímá. Pro tento počet odvozuji rekurentní vzorec, který v závěru převádím na vzorec pro  $n$  – tý člen.

### ÚVOD

V řadě publikací (např. [2], [3]) je uváděn následující příklad jako ukázka úlohy, která není jednoznačně zadána: *Jaké bude další číslo v následující posloupnosti přirozených čísel?*

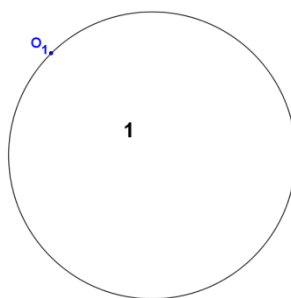
1, 2, 4, 8, 16, ???

Je zřejmé, že většina lidí doplní místo otazníků číslo 32, protože v číslech vidí členy geometrické posloupnosti s kvocientem 2. Místo otazníků je však možné doplnit i číslo 31, podíváme-li se na čísla „jinými očima“. Představme si kruh, na jehož obvodu umístíme postupně body. Spojením těchto bodů vytvoříme tětivy. Předpokládejme následující:

**Tvrzení 1:** Žádné tři nebo více tětív se neprotínají v jednom bodě.

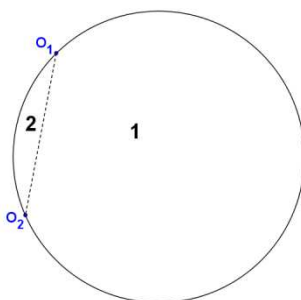
Pojďme nyní postupně zvyšovat počet bodů na obvodu kruhu a sledovat, jak vzniklé tětivy rozdělují kruh na oblasti:

Jeden bod na obvodu kruhu nevytvoří žádnou tětivu. Kruh není rozdělen a jedním bodem je tudíž vymezena jedna oblast (celý kruh).



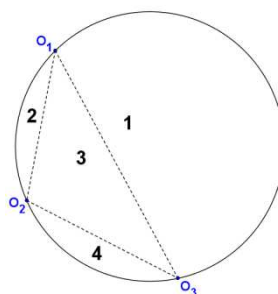
OBRÁZEK 1. Počet oblastí - 1 bod na obvodu

Dva body na obvodu kruhu vytvoří jednu tětivu a ta rozdělí kružnici na dvě oblasti (dvě kruhové úseče).



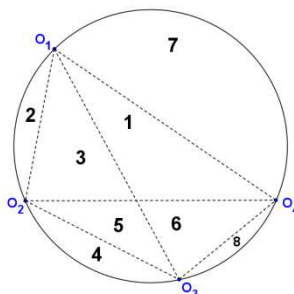
OBRÁZEK 2. Počet oblastí - 2 body na obvodu

Tři body na obvodu kruhu vytvoří tři tětivy a tedy čtyři oblasti kruhu (jeden trojúhelník a tři kruhové úseče).



OBRÁZEK 3. Počet oblastí - 3 body na obvodu

Čtyři body na obvodu kruhu vytvoří šest tětiv a osm oblastí (čtyři trojúhelníky a čtyři kruhové úseče).



OBRÁZEK 4. Počet oblastí - 4 body na obvodu

Zatím nám tedy vychází (vezmeme-li v úvahu počet oblastí) posloupnost 1, 2, 4, 8.

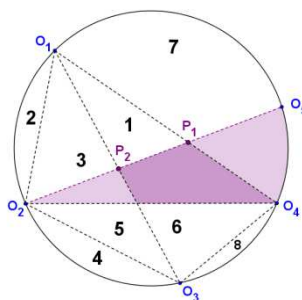
Jak bude posloupnost pokračovat? Je možné najít nějaký vztah pro závislost počtu oblastí na počtu bodů na obvodu kruhu? Hledání odpovědí na tyto otázky je předmětem tohoto článku.

## 1. REKURENTNÍHO VZTAHU

### 1.1. Přidáme pátý bod $O_5$

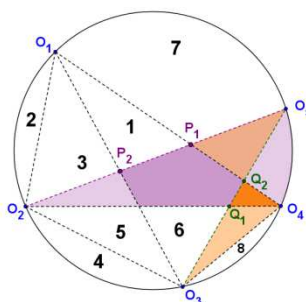
Přidáním pátého bodu  $O_5$  získáme další tětivy. Proberme si postupně, kolik se objeví nových oblastí.

Tětiva  $O_5O_2$  generuje ve smyslu tvrzení 1 dva nové průsečíky  $P_1$  a  $P_2$  a celkem tři nové oblasti, které jsou vyznačeny barevně.



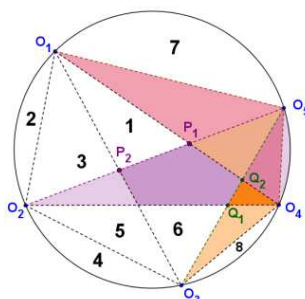
OBRÁZEK 5. Počet nových oblastí - tětiva  $O_5O_2$

Tětiva  $O_5O_3$  vytvoří s již existujícími tětivami průsečíky  $Q_1$  a  $Q_2$ . Získáme tak další tři nové oblasti, které jsou vyznačeny oranžovou barvou.



OBRÁZEK 6. Počet nových oblastí - tětiva  $O_5O_3$

Dvě nové tětivy  $O_5O_4$  a  $O_5O_1$  neprotnou žádnou z již existujících tětiv, získáme tak dvě nové oblasti. Každá ze zmíněných dvou tětiv přispěje jednou novou oblastí.

OBRÁZEK 7. Počet nových oblastí - tětivy  $O_5O_4$  a  $O_5O_1$ 

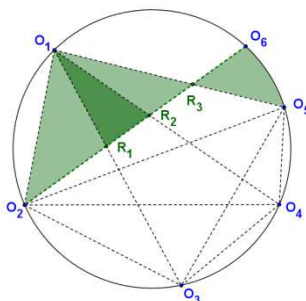
Shrňme si situaci po přidání pátého bodu  $O_5$ :

Pátý bod definuje celkem čtyři nové tětivy a  $3 + 3 + 2$  nové oblasti, spolu s osmi oblastmi pro čtyři body dostáváme 16 oblastí pro pět bodů na obvodu kruhu. Doplňme naši posloupnost o číslo 16:

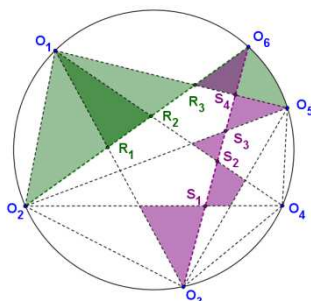
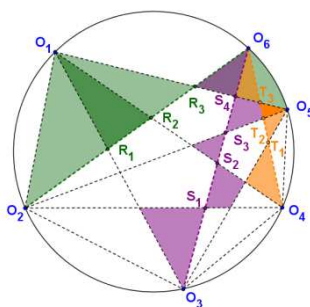
1, 2, 4, 8, **16**

### 1.2. Přidáme šestý bod $O_6$

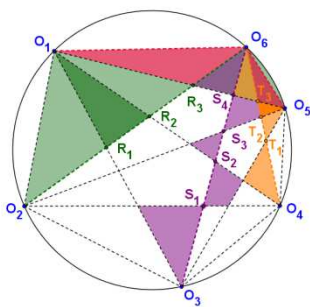
Jak se projeví dělení kruhu přidáním šestého bodu? Tětivou  $O_6O_2$  Získáme tři nové průsečíky této tětivy se stávajícími tětivami. Musíme samozřejmě vzít v úvahu tvrzení 1. Získáme celkem čtyři nové oblasti.

OBRÁZEK 8. Počet nových oblastí - tětiva  $O_6O_2$ 

Postupujme s dalšími dvěma novými tětivami  $O_6O_3$  a  $O_6O_4$  již trochu rychleji – stejným způsobem jako v předchozích odstavcích. Na následujících obrázcích 9 a 10 vidíme, že přibude celkem pět (fialové) a čtyři (oranžové) nové oblasti, dohromady devět nových oblastí:

OBRÁZEK 9. Nové oblasti - tětiva  $O_6O_3$ OBRÁZEK 10. Nové oblasti - tětiva  $O_6O_4$ 

Tětivy  $O_6O_1$  a  $O_6O_5$  neprotnou žádné ostatní tětivy. Získáme tak dvě nové oblasti červené barvy.

OBRÁZEK 11. Nové oblasti - tětivy  $O_6O_1$  a  $O_6O_5$ 

Přidáním šestého bodu  $O_6$  na obvod kruhu podle tvrzení 1 získáme navíc  $4 + 9 + 2$  oblastí, tedy 15. V řadě čísel 1, 2, 4, 8, 16 budeme pokračovat číslem  $15 + 16 = 31$ , máme tedy:

$$1, 2, 4, 8, 16, 31.$$

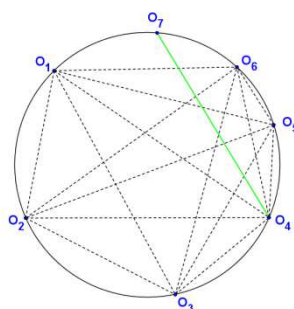
Tím jsme vysvětlili doplnění číselné řady z úvodu.  
 Jak bude pokračovat tato posloupnost přidáním sedmého bodu?  
 Jak bude pokračovat tato posloupnost přidáním  $n$  – tého bodu?

### 1.3. Příprava na odvození rekurentního vztahu pomocí bodu $O_7$

Přidáme bod  $O_7$  a sestrojíme tětivu  $O_7O_4$  podle obrázku 12. Tato tětiva rozdělí body na obvodu kruhu na dvě skupiny:

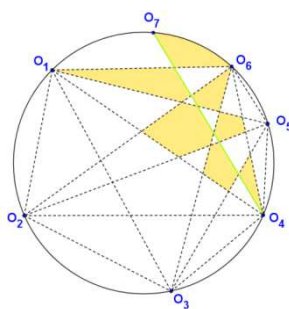
A) Tři body  $O_1, O_2$  a  $O_3$  („vlevo“)

B) Dva body  $O_5$  a  $O_6$  („vpravo“)



OBRÁZEK 12. Rozdělení bodů na kružnici tětivou  $O_7O_4$

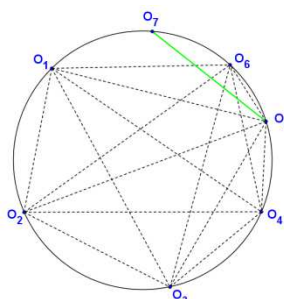
Díky tomuto rozdělení odvodíme počet průsečíků tětivy  $O_7O_4$  s ostatními tětivami: Každý bod „vlevo“ můžeme spojit s libovolným bodem „vpravo“, a každá tato spojnice protne naši tětivu  $O_7O_4$ , protože platí tvrzení 1. Získáme tak  $3 \cdot 2 = 6$  průsečíků s naší tětivou a ve smyslu předchozích úvah dostaneme  $3 \cdot 2 + 1 = 7$  nových oblastí, jak je možné vidět na obrázku 13. Situaci zapíšeme do tabulky 1. Podobným způsobem budeme počítat průsečíky dalších tětiv s krajním bodem  $O_7$  a budeme pokračovat ve vyplňování tabulky 1 (tabulka 2).



OBRÁZEK 13. Nové oblasti - tětiva  $O_7O_4$

tětiva	body vpravo	body vlevo	průsečíků	nových oblastí
$O_7O_4$	2	3	$2 \cdot 3 = 6$	7
$O_7O_5$				
$O_7O_3$				
$O_7O_2$				
$O_7O_1$				
$O_7O_6$				

TABULKA 1. Bilance - tětiva  $O_7O_4$

OBRÁZEK 14. Rozdělení bodů na kružnici tětivou  $O_7O_5$ 

tětiva	body vpravo	body vlevo	průsečíků	nových oblastí
$O_7O_4$	2	3	$2 \cdot 3 = 6$	7
$O_7O_5$	1	4	$1 \cdot 4 = 4$	5
$O_7O_3$				
$O_7O_2$				
$O_7O_1$				
$O_7O_6$				

TABULKA 2. Bilance - tětiva  $O_7O_5$ 

Další kroky provádíme analogicky, z úsporných důvodů je přeskočíme, podrobný postup v [6]. Kompletní situace, kterou získáme přidáním bodu  $O_7$ , je popsána v následující tabulce.

tětiva	body vpravo	body vlevo	průsečíků	nových oblastí
$O_7O_4$	2	3	$2 \cdot 3 = 6$	7
$O_7O_5$	1	4	$1 \cdot 4 = 4$	5
$O_7O_3$	3	2	$3 \cdot 2 = 6$	7
$O_7O_2$	4	1	$4 \cdot 1 = 4$	5
$O_7O_1$	5	0	$5 \cdot 0 = 0$	1
$O_7O_6$	0	5	$0 \cdot 5 = 0$	1

TABULKA 3. Úplná bilance po přidání bodu  $O_7$ 

Sečteme-li nové oblasti, získáme číslo 26, které když přičteme k předchozímu počtu 31, získáme pro  $n = 7$  celkem 57 oblastí kruhu.

#### 1.4. Obecný rekurentní vzorec pro nově přidaný bod $O_n$

Známe počet oblastí pro  $n - 1$  bodů. Označme tento počet  $p(n - 1)$ . Přidáme  $n$ -tý bod  $O_n$  a budeme hledat vztah pro počet oblastí  $p(n)$ , přičemž  $n$  je libovolné přirozené číslo větší než 1:

$$(1) \quad p(n) = p(n - 1) + q(n); \quad p(1) = 1; \quad n \in N - \{1\},$$

kde  $q(n)$  je počet nových oblastí, které získáme přidáním  $n$ -tého bodu. Budeme postupovat stejně, jako v kapitole 1.3, ve které jsme komentovali přidání sedmého bodu. Nyní příslušné úvahy zobecníme.

Spojme nový bod  $O_n$  s některým z předchozích bodů  $O_k$ , kde  $k$  je index bodu. Je to přirozené číslo větší nebo rovno jedné a menší než  $n$ . Sestrojíme tak tětivu  $O_n O_k$ . Počet bodů „vlevo“ od tětivy  $O_n O_k$  (ve smyslu úvah v kapitole 1.3, obrázek 11) je  $n - k - 1$ , počet bodů „vpravo“ je  $k - 1$ . Zkontrolujte si tyto obecné výrazy v tabulce 2 (pro všechny řádky!) podle následujícího vzoru:

Uvažujme například třetí řádek, kde  $n = 7$  a  $k = 3$ :

Počet bodů „vpravo“ od tětivy  $O_7 O_3$  je  $7 - 3 - 1 = 3$ .

Počet bodů „vlevo“ od tětivy  $O_7 O_3$  je  $3 - 1 = 2$ .

Počet průsečíků pro tětivu  $O_n O_k$  je  $(n - k - 1) \cdot (k - 1)$ .

Počet nových oblastí pro tětivu  $O_n O_k$  je

$$(2) \quad q_n(k) = (n - k - 1) \cdot (k - 1) + 1; \quad n \in N - \{1\}$$

Nyní sečteme všechny nové oblasti pro všechny tětivy vedené z bodu  $O_n$ :

$$(3) \quad q(n) = \sum_{k=1}^{n-1} q_n(k) = \sum_{k=1}^{n-1} [(n - k - 1) \cdot (k - 1) + 1]; \quad n \in N - \{1\}$$

Upravíme nyní výraz  $q(n)$  uvedený ve (3) roznásobením závorek na tvar

$$(4) \quad q(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (2 - n + nk - k^2); \quad n \in N - \{1\},$$

který přepíšeme na výraz

$$(5) \quad q(n) = \sum_{k=1}^{n-1} 2 - \sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} nk - \sum_{k=1}^{n-1} k^2; \quad n \in N - \{1\}.$$

Postupně sečteme jednotlivé výrazy na pravé straně:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} 2 &= 2 + 2 + 2 + \dots + 2 \text{ (celkem } (n-1) \text{ krát)} = 2(n-1) \\ \sum_{k=1}^{n-1} n &= n + n + n + \dots + n \text{ (celkem } (n-1) \text{ krát)} = n(n-1) \\ \sum_{k=1}^{n-1} k &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n-1}{2}(1 + (n-1)) = \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

Pro součet čísel od jedné do  $(n-1)$  jsme použili vzorec pro součet prvních  $(n-1)$  členů aritmetické posloupnosti s diferencí 1 a prvním členem 1, viz např. [4]. Odtud pak plyne:

$$\sum_{k=1}^{n-1} nk = n \cdot [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] = n \cdot \frac{n-1}{2} (1 + (n-1)) = \frac{1}{2} n^2 (n-1)$$

Pro součet druhých mocnin prvních  $(n-1)$  přirozených čísel jsem použil vzorec, získaný např. v [5].

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1)$$

Předchozí rovnosti dosadíme do vztahu (5):

$$q(n) = 2(n-1) - n(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

Výraz na pravé straně roznásobíme, sečteme odpovídající členy a převedeme na společného jmenovatele. Získáme vztah:

$$(6) \quad q(n) = \frac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 17n - 12); \quad n \in N - \{1\}$$

Hledaný obecný rekurentní vztah pro počet oblastí  $p(n)$  získáme dosazením vztahu (6) do vzorce (1):

$$(7) \quad p(n) = p(n-1) + \frac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 17n - 12); \quad p(1) = 1; \quad n \in N - \{1\}$$

Poslední vzorec je možné ověřit pomocí údajů z tabulky 3.

## 2. VYJÁDŘENÍ POČTU OBLASTÍ VZORCEM PRO $n$ -TÝ ČLEN POSLOUPNOSTI

Vyjdeme z rekurentního vztahu (7):

$$p(n) = p(n-1) + \frac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 17n - 12); \quad p(1) = 1; \quad n \in N - \{1\}$$

Vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti  $p(n)$  budeme hledat ve tvaru mnohočlenu čtvrtého stupně:

$$(8) \quad p(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$$

Koeficienty  $a, b, c, d, e \in R$  určíme ze známých údajů získaných z rekurentního vzorce (7) nebo z tabulky 2:

$$\begin{aligned} p(1) = 1 &\Rightarrow a + b + c + d + e = 1 \\ p(2) = 2 &\Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 2 \\ p(3) = 4 &\Rightarrow 81a + 27b + 9c + 3d + e = 4 \\ p(4) = 8 &\Rightarrow 256a + 64b + 16c + 4d + e = 8 \end{aligned}$$

Řešíme soustavu pěti rovnic o pěti neznámých, např. dosazovací metodou. Řešením této soustavy jsou koeficienty:

$$a = \frac{1}{24}; \quad b = -\frac{1}{4}; \quad c = \frac{23}{24}; \quad d = -\frac{3}{4}; \quad e = 1$$

Po dosazení koeficientů do rovnice (8) a její následné úpravě, dostaneme hledaný vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti počtu oblastí, na které je rozdělen kruh tětivami vedenými z  $n$  obvodových bodů:

$$(9) \quad p(n) = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$$

Tento vzorec je hledaným vzorcem pro  $n$ -tý člen posloupnosti určující počet oblastí, které vzniknou rozdělením kruhu díky tětivám vedených s obvodových bodů.

#### ZÁVĚR

V úvodu jsme si stanovili úkol najít vztah, který by umožňoval určit počet oblastí definovaných tětivami kružnice v závislosti na počtu bodů na kružnici při platnosti tvrzení 1, že žádné tři nebo více tětív se neprotínají v jednom bodě. Vztah (9) a následná kontrola pro dostupné údaje ukazují, že byl úkol splněn.

Nabízí se otázka, je-li rekurentní metoda odvození vztahu (9) prezentovaná v tomto článku jediná. Jak je možné zjistit v [1], vzorec (9) lze odvodit i jiným způsobem zaměřeným více na kombinatoriku s využitím několika topologických prvků.

**Acknowledgment.** Chtěl bych poděkovat Mgr. Romanovi Haškovi, PhD. za cenné postřehy a připomínky při psaní nejen tohoto článku.

#### REFERENCE

- [1] [https://en.m.wikipedia.org/wiki/Dividing\\_a\\_circle\\_into\\_areas](https://en.m.wikipedia.org/wiki/Dividing_a_circle_into_areas)
- [2] ŠTRAUSOVÁ, I. GeoGebra a OK Geometry jako pomocníci při dokazování. *Sborník příspěvků 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2013. ISBN 978-80-7394-448-3. s. 350–357.
- [3] ACHESON, D. 1089 + all that, Oxford University Press, ISBN 978-0-19-959002-5, s. 17, 18.

#### Doplňkové elektronické materiály

- [4] VEJSADA M., Dělení kruhu na oblasti, kapitola 1, GeoGebra soubor, 2014. Dostupné z <http://tube.geogebra.org/book/title/id/1605321>
- [5] VEJSADA M., Dělení kruhu na oblasti, kapitola 2, GeoGebra soubor, 2014. Dostupné z <http://tube.geogebra.org/book/title/id/1605321>
- [6] VEJSADA M., Dělení kruhu na oblasti, kapitola 3, GeoGebra soubor, 2014. Dostupné z <http://tube.geogebra.org/book/title/id/1605321>

GYMNÁZIUM, ČESKÉ BUDĚJOVICE, ČESKO-ANGLICKÉ GYMNÁZIUM S.R.O.

*E-mail adresa* : [mvejsada@cag.cz](mailto:mvejsada@cag.cz)