South Bohemia Mathematical Letters
Volume 24, (2016), No. 1, 72-81.

KLASICKÉ ÚLOHY TEORIE GRAFŮ NA ŠKOLÁCH I V APLIKACÍCH

ŠÁRKA VORÁČOVÁ

Abstrakt. Klasické úlohy rovinných grafů nabízejí velké množství jednoduše formulovaných problémů, z nichž mnohé lze řešit již na prvním stupni základní školy. Právě pro tento svůj potenciál mají své nezpochybnitelné místo v rekreační matematice i matematických olympiádách. Přestože mnohé pedagogické experimenty prokázaly úspěšnost zařazení partií z teorie grafů na základní i střední školu, v učebnicích je najdeme jen okrajově. Přitom matematická podstata problémů přirozeného světa se v teorii grafů nalézá nenuceně a samozřejmě. Objevitelsky zaměřená výuka inspirovaná teorii grafů je podle mého názoru nejpřístupnější cestou k představení principů matematického modelování.

Úvod

Stěží lze nalézt jinou činnost, která by svými několika tisíci lety prověřenými zkušenostmi mohla být účinnější pro rozvíjení myšlení, abstrakce, představivosti a schopnosti řešit problémy, než je pěstování matematiky [22]. Přesto jsme již dlouhá desetiletí svědky stále klesající úrovně výuky matematiky na školách všech stupňů, základních, středních i vysokých [5]. Matematika, jak se s ní setkáváme na mnohých školách, nepřispívá k rozvoji myšlení, nepodněcuje tvořivého ducha, jež je přirozeně dán malým dětem. Matematika předkládána jako hotová disciplina se souhrnem pouček a algoritmů je pohodlná pro vyučujícího i pro průměrné žáky. Bývalý ministr školství Petr Piťha v roce 1996 napsal: „Neznám nic tak ničivého, jako je tichá symbióza líného učitele s vypočítavým studentem, jev dnes bohužel častý“ [23].

Význační čeští matematici i pedagogové pátrají po příčinách současného stavu a snaží se přispět svou autoritou, odborným i osobním postojem k nápravě věcí. My, učitelé, nezměníme společenské a ani rodinné klima žáků. Musíme se ale stále pokoušet své žáky zaujmout, poodhalit jim krásu matematického světa i napětí, jež takové odhalování přináší. Právě osobní zaujetí a skutečná motivace jsou nezbytné pro úspěšné vzdělávání. Jak řekl Petr Vopěnka v rozhovoru pro deník Právo: „Není utěšenějšího povolání nad učení dětí, které se učit chtějí, a není odpornějšího poslání nad učení dětí, které se učit nechtějí“ [22]. František Kuřina své didaktické přesvědčení formuloval takto: „V prostředí apatie, nezájmu, lhostejnosti, či dokonce bojkotu a nepřátelství nelze realizovat žádné účinné vzdělávání. Probuzení zájmu žáků je nutnou, ne však postačující podmínkou k nastartování vzdělávacího procesu. Zájem by měl být dále živen především úspěchy žáků, zajímavostí problematiky, uspokojením z vykonané práce.“ ([15], s. 247)

Cesty ke skutečnému zájmu o matematiku jsou osvětleny v publikacích našich nejvýznamnějších didaktiků matematiky. Mohu-li si dovolit shrnout do několika bodů; jsou jimi konstruktivistický přístup badatelsky orientované výuky s poukázáním na praktické užití matematiky, historicky zajímavé úlohy i současné aplikace a otevřené problémy.

Key words and phrases. Eulerovy tahy, obarvení grafu, problém čtyř barev, planární graf, konstruktivistické vyučování.

Teorie grafů nabízí celou řadu témat vhodných pro objevitelsky orientovanou výuku. Přirozeným způsobem spojuje grafickou a algebraickou reprezentaci, intuitivně formuluje problémy, o jejichž aplikaci není třeba nikoho přesvědčovat a širokou aplikační škálou propojuje různé vědní obory. Nadto, pro většinu dětí je i prvním grafickým modelem rovinné situace. Výhodou grafové reprezentace je snadná a intuitivní představa, pomocí které modelujeme objekty reálného systému jako vrcholy a vztahy mezi těmito objekty reprezentujeme hranami. Cílem tohoto příspěvku je poukázat na typy úloh vhodných pro základní školy, jež podněcují zájem žáků i jejich touhu experimentovat.

Teorie grafů na školách

S grafovou reprezentací nejrůznějších situací se setkávají děti od útlého věku. S nadšením hledají cestu v bludištích, pomáhají myšce nalézt cestu k sýru a spojují věci, které k sobě patří. Už předškolní děti se snaží vyznat v mapě nebo zjednodušeném plánku a bez větších potíží takový způsob modelování reality přijímají. Nabízí se tento zájem dále prohlubovat a využít pro předvedení principů matematického modelování a výstavbu ideálních matematických struktur. V neposlední řadě nám může teorie grafů posloužit pro oživení výuky zadáním netradičních problémů. Například, zvolíme-li jednoduchý plánek s vhodně ohodnocenými hranami, je náhodné hledání nejkratší trasy obchodního cestujícího nebo čínského pošťáka procvičováním sčítání čísel a kombinatorických schopností.

Ačkoliv není teorie grafů explicitně jmenována RVP ve vzdělávací oblasti „Matematika a její aplikace“ [26], některé její úlohy v učebnicích matematiky objevíme. Jejich místo je spíš okrajové – pro zpestření výuky v rámci rozšiřujícího učiva a netradiční formulaci problému [2], [3].

Autoři učebnic matematiky Molnár a Mikulenková [20] dávají možnost dětem získat zkušenosti s teorií grafů v mnohem větší míře. Prvňáčky lákají k průchodu labyrintem, ve druhém a třetím ročníku najdeme jednotažky a hledání cesty grafem, je otevřen i problém barvení grafu. Ve čtvrtém ročníku je eulerovský tah modifikován na procházku po vrcholech tělesa a taktéž je formulována úloha, kterou známe jako problém obchodního cestujícího.

Systematické využití grafové reprezentace lze vypozorovat v řadě učebnic vytvořených skupinou autorů sdružených kolem Milana Hejného [11]. Grafy provázejí děti, při řešení úloh z prostředí Cyklotras, Autobusů, Výstavišť, Mostů, Hadů i Pavučin. S pavučinami barevných cestiček doporučuje Milan Hejný začít už u pětiletých dětí. „Jakmile dítě úlohu úspěšně samo vyřeší, bude se dožadovat dalších pavučin a rodič může přiměřeně gradovat náročnost úloh a radovat se z rychlosti, kterou se jeho genetický kód v další generaci kultivuje“ [12]. Z katedry matematiky a didaktiky matematiky PedF UK pochází i dvě diplomové práce na téma teorie grafů ve školské matematice.

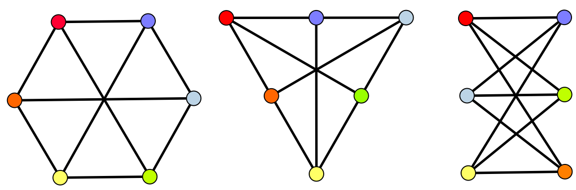
V diplomové práci Ester Glasové [7] jsou zpracována témata jednotažek, bludišť, minimální kostry grafu a řešení rébusu typu „zebra“ prostředky teorie grafů. Tatiana Mutinová popsala ve své diplomové práci z roku 2014 [21] hodiny s vybarvováním mozaiky a eulerovskými jednotažkami. Formou hypertextového dokumentu zpracoval a v roce 2010 obhájil diplomovou práci „Teorie grafů ve výuce na střední škole“ Lukáš Jirovský [14]. Ve stručnosti je zde nastíněna většina témat vhodných pro školskou matematiku, zajímavá je souvislost s teorií her a aplikace grafů na hru NIM.

Ze zahraničních počinů stojí za povšimnutí práce zaměřená na střední školy [24] a populární web amerického matematika a filosofa Joela Hamkinse působícího na City University of New York. Pro sedmi a osmileté děti připravil hodinu na obarvování vrcholu grafu, Eulerovy jednotažky a odvození Eulerovy věty pro planární grafy [8]. Nesčetné ohlasy těchto příspěvků svědčí o úspěšném nápadu, který stojí za to vyzkoušet.

Kreslení grafu

V aplikacích s velkým počtem vrcholů reprezentujeme grafy nejrozličnějšími datovými strukturami (např: seznam vrcholů, hran a incidenčních vazeb, matice sousednosti). Pro malé grafy je nejnázornější nakreslit obrázek. Vhodně zvolenými příklady můžeme zadat i obrázek, který je krásný, či známý z jiných souvislostí, a tím zvýšit atraktivitu tématu. Je třeba si uvědomit, že dva na první pohled různé obrázky mohou modelovat stejnou situaci. Při modelování grafem je podstatné, zda spolu dva vrcholy sousedí, popřípadě jaká je orientace a hodnota hrany. Poloha a pojmenování hran a vrcholů se mohou při různých nakresleních lišit, ale pokud jsou zachovány incidenční vazby hran a vrcholů, grafy prakticky nerozlišujeme. Říkáme, že jsou izomorfní ([18], s. 94).

Hledání izomorfismu grafů je vhodný způsob na bližší seznámení s grafy. Příklady naleznete snad v každém výukovém textu, na obrázku 1 jsou tři verze zakreslení nerovinného bipartitního graf $K_{3,3}$ (Utility graph)[1].



Obrázek 1. Navzájem izomorfní grafy $K_{3,3}$

Rovinné grafy. Pokud jste někdy děti vybídli k tomu, aby spojily čarou odpovídající si objekty, jistě jste si všimli snahy zakreslit čáry tak, aby se nekřížily. Je to přirozená snaha, pramenící zřejmě z touhy po přehlednosti. Pokud se to dítěti nepovede a musí čáry překřížit, je to mnohdy v jeho očích tak ošklivý obrázek, že jej chce překreslit. Nezbývá nám, než vhodnými příklady předvést, že někdy nelze podmínku nekřížení splnit. Takovými příklady mohou být úplný graf K_5, Petersenův graf, nebo jeho podgraf $K_{3,3}$ na obrázku 1. Tím přivádíme k zavedení pojmu rovinný graf a zjišťování podmínek pro rovinnost grafu.

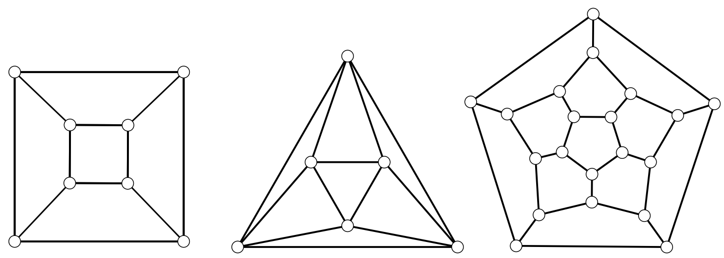
Graf, který lze znázornit v rovině tak, aby se jeho hrany neprotínaly, se nazývá rovinný nebo planární.

[1] Úplný graf K_n má n vrcholů, přitom každá dvojice vrcholů je spojena hranou. U bipartitního grafu jsou vrcholy rozděleny na dvě vzájemně nesousedící skupiny. V úplném bipartitním grafu $K_{n,m}$ je každý z n vrcholů první skupiny spojen hranou s každým vrcholem z druhé skupiny, tj. celkem má $n \cdot m$ hran.

Rovinnost grafu dokážeme jeho nakreslením, opačný výsledek se dokazuje hůře. Pokud při experimentech nevystačíme s tužkou a papírem, můžeme využít dynamiku GeoGebry, model s kameny a provázky, nebo použít děti jako vrcholy a hrany modelovat švihadly. Můžeme se ptát, jestli se rovinnost grafu změní, když na jednu hranu přidáme vrchol (dělení grafu), nebo zda nerovinný graf můžeme přidáním vrcholů a hran změnit na rovinný (nadgraf). Příklady K_5 a $K_{3,3}$ jsme nevolili náhodně. Jedná o nejmenší nerovinné grafy a každý nerovinný graf jeden z nich obsahuje, jak říká Kuratowského věta ([18], s. 176).

Graf G je rovinný, právě když žádný jeho podgraf není izomorfní dělení grafu $K_{3,3}$ ani dělení grafu K_5.

Rovinný graf těles. Rovinné grafy jsou důležitým nástrojem krystalografie a chemie, kde slouží ke znázornění mnohostěnu v rovině. Pokud odhlédneme od tvaru jednotlivých stěn a zajímá nás jen počet hran vycházejících z daného vrcholu a vazba sousedních vrcholů, je rovinné zakreslení účinným pomocníkem. Je-li pojem izomorfních grafů dobře pochopen, není obtížným cvičením nakreslit rovinný graf hranového modelu jakéhokoliv konvexního mnohostěnu. Při hledání co nejkrásnějšího planárního grafu těles se mi osvědčilo používání GeoGebry. V rovinné nákresně zobrazíte hranový model tělesa např. ve volném rovnoběžném promítání. Průměty vrcholů pak pohybujeme po nákresně tak, abychom získali rovinný graf, namístě je i požadavek na zachování symetrie.



Obrázek 2. Planární grafy platonských těles

Na vysoké škole můžeme využít topologický přístup. Představme si, že můžeme mnohostěn – hrany i stěny libovolně natahovat. Na povrch pohlížíme jako na nekonečně pružnou blánu, na které jsou zakresleny hrany a vrcholy. Jinou možností je stereografická projekce kulové plochy na rovinu ([18], s. 179). Mnohostěn umístíme dovnitř koule, tak aby byl střed koule vnitřním bodem mnohostěnu. Promítneme mnohostěn ze středu koule na její povrch a tuto kresbu na kulové ploše stereograficky promítneme z vhodného bodu kulové plochy do roviny.

Hrany rovinného grafu rozdělí rovinu na několik souvislých oblastí a ty nazýváme stěny uvažovaného rovinného nakreslení grafu. Stěna mnohostěnu odpovídá stěně rovinného grafu mnohostěnu. Vztah mezi počtem vrcholů, hran a stěn mnohostěnu bez děr popisuje známá Eulerova věta.

Eulerova věta. Zůstává záhadou, proč tak jednoduchý a pouhou intuicí odvoditelný vztah neobjevili už řečtí matematici, proč jej dokázal až Leonard Euler

(1707–1783) ve článku, který vyšel v roce 1758[2]. Na tomto místě větu uvedeme v termínech planárního grafu.

Mějme souvislý rovinný graf, označme: e počet hran, v počet vrcholů a s počet stěn. Pak platí

$$v - e + s = 2$$

Důkaz provádíme matematickou indukcí podle počtu hran grafu ([18], s. 177). Není ale nutné, abychom termín matematická indukce používali, intuitivní přesvědčení vedené stejnou cestou je přístupné i dětem na základní škole [8]. Nejprve ověříme vztah pro $e = 0$ a $e = 1$. Pro stromy − tj. grafy, které neobsahují žádnou kružnici platí, že $e = v - 1$, odtud pro ně platí i Eulerův vztah. Nyní se zaměříme na grafy s kružnicemi. Pokud je hrana obsažena v kružnici, jejím vyškrtnutím získáme nový souvislý graf, v němž je o jedničku menší počet stěn i hran, tedy vyškrtnutím takové hrany se nezmění výsledek $v - e + s$. Takto můžeme pokračovat, až získáme strom.

Barveni grafu

Barvení grafu patří mezi nejvděčnější témata pro malé děti. Od útlého věku se baví omalovánkami a už v tomto věku přivítají výzvu, aby použily co nejméně pastelek. Barvení grafu zařadila do svých experimentů Tatiana Mutinová [21], kdy s dětmi třetí třídy vybarvovala mozaiku a zkoumala, jak musí mozaika vypadat, aby pro její obarvení stačily jen dvě barvy. Její popis je příhodným příkladem objevitelského přístupu učitele k výuce ([21], s. 49–51).

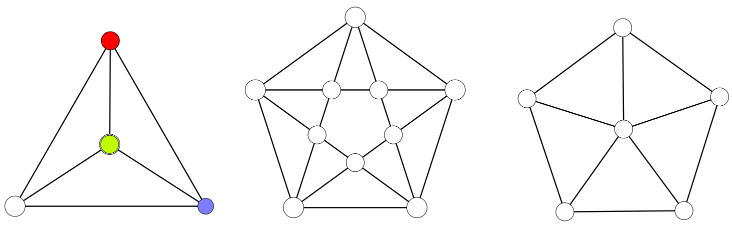
„Pro vyučujícího není tento způsob výuky zrovna jednoduchý, protože od něj vyžaduje, aby byl hodně trpělivý, nenabízel řešení, ale pokládal otázky a usměrňoval žáky v jejich bádání. Protože se řeší úlohy s narůstající obtížnosti, žáci mají radost i z menších úspěchů, ke kterým se mohou dopracovat jednoduchou metodou pokus – omyl. Chyba se zde vyskytuje jako edukační nástroj a přivádí děti k hlubšímu porozumění. Děti řeší spory dalším experimentováním, systematizují svá pozorování a hledají argumenty, kterými by svá tvrzení podpořily. Učí se své závěry formulovat... Co je potěšující, děti přijaly úlohy s využitím grafů velmi dobře a zjišťovaly, jestli budou ještě další. . . . Práce s obrázky je bavila a hodiny byly velmi živé.“

Problém barvení zpracoval pro sedmileté děti na svém webu i J.D. Hamkins [8]. Začal s obarvováním vrcholů a teprve poté formuloval problém na duální struktuře klasických omalovánek. Sousední vrcholy, tj. ty, které jsou spojeny hranou, musí být obarveny odlišnou barvou. Obarvování vrcholů je rychlejší a přehlednější pro nalezení minimálního počtu barev, menší děti ale považují omalovánky za atraktivnější. Při obarvování vrcholů velmi rychle se svými žáky objevíte podmínku pro dvoubarevný graf. Čtyřúhelník je dvoubarevný, ale vrcholy trojúhelníku již dvěma barvami neobarvíte. Vhodnými dalšími příklady uzavřených tahů (kružnic) sudé a liché délky dospějete k formulování věty.

Graf bez smyček lze obarvit dvěma barvami právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky ([4], s. 214).

Při dalším zkoumání můžeme vyzvat studenty, aby vymysleli takový graf, při kterém by nestačily ani tři pastelky. Budou vymýšlet různé kombinace cyklů lichých délek, přijdou i na to, že důležitou vlastností je stupeň vrcholu.

[2]Euler, L., „Elementa doctrinae solidorum“, 1752. Prvním objevitelem byl ve skutečnosti René Descartes (1596–1650), ten však rukopis „Progymnasmata de solidorum dementis“ (Cvičení ze základů těles) nestačil publikovat a až v roce 1860 byl objeven Lebnizův opis tohoto díla [25].



Obrázek 3. Čtyřbarevné grafy

Algoritmické obarvování. Problém barvení grafů minimálním počtem barev je komplikovaný a dosud není uspokojivě vyřešen. Algoritmus, který zaručí správný výsledek minimálního počtu barev je veden metodou backtrackingu [1]. Ovšem přes všechnu svou obtížnost, má (za vhodných okolností) problém barvení grafů docela jednoduché přibližné hladové řešení. Při svých experimentech s obarvováním studenti vytvářejí víceméně podobné náhodné strategie, které dalšími zkušenostmi zefektivňují. Při správně volených otázkách a typech úloh se můžeme pokusit se svými žáky objevit nějakou variantu takového hladového algoritmu. Při každém kroku vybereme jeden vrchol a obarvíme jej barvou nevyskytující se u jeho sousedů. Pokud nemůžeme vybrat žádnou z již použitých barev, musíme namíchat barvu novou. Je zřejmé, že chování algoritmu je závislé na pořadí pro barvení vrcholů. Je sice pravda, že pro každý graf existuje pořadí vrcholů, které zaručí optimální výsledek hladového algoritmu, ale je NP těžký problém takové pořadí nalézt. Pro přibližné řešení se nabízí uspořádat sestupně podle stupně vrcholu, nebo při každém kroku přepočítat stupeň nasycení vrcholu - dosavadní počet barev jeho sousedů.

Problém čtyř barev. Atraktivnost tématu je dána i věhlasností problému čtyř barev, který po více než 100 let odolával rozřešení. Otázkou je, jestli je možné obarvit libovolnou mapu v rovině či na kulové ploše pomocí čtyř barev. Říká se, že tato otázka původně vznikla z potřeb kartografie, kdy sousední státy nesmí být obarveny stejnou barvou a přitom chceme použít co nejmenší počet barev. Problém byl formulován v roce 1852, v roce 1890 byl znám důkaz, že stačí pět barev, ale otázka čtyř barev zůstala otevřena do roku 1976, kdy Kenneth Appel a Wolfgang Haken pomocí počítače prověřili dle svého tvrzení všech 1936 možností. Tento důkaz zpočátku nebyl akceptován a postupně byl dalšími vylepšován a zjednodušen snížením rozkladu jednotlivých konfigurací. Důkaz bez počítače zatím ještě nalezen nebyl.

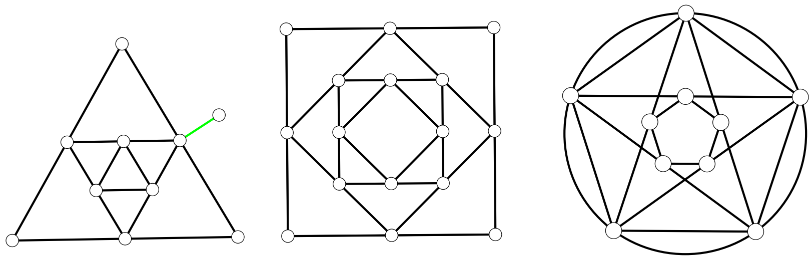
Barvení grafů využijeme všude tam, kde musíme objekty rozdělit na skupiny z nějakého důvodu neslučitelné, například při skladování nebezpečných látek bezpečnostní předpisy zakazují skladovat některé dvojice látek ve stejné skříni. Je třeba zjistit kolik skříní je zapotřebí k uskladnění předepsaného počtu látek. Podobně můžeme přistupovat k plánování procesů, při tvorbě rozvrhu, nebo při řešení sudoku a jiných rébusů ([4], s. 213).

Jednotažky

Již malé děti v mateřské školce znají kresby jedním tahem a nemusí to přímo znamenat kreslení lomených čar, tak jako kreslíme všeobecně známý domeček. Menší děti můžeme inspirovat kresbami zvířátek, kytiček a nejrůznějších ornamentů. Teprve potom můžeme přejít ke kreslení tahů v souvislém grafu tak, jak jej např. formuluje Matoušek s Nešetřilem ([18], s. 114)

Nakreslete daný graf jedním uzavřeným tahem, bez zvednutí tužky z papíru (přičemž žádná hrana se neobtahuje dvakrát).

Abychom neztratili zájem dětí, je třeba dopřát jim úspěch a volit ze začátku jednodušší příklady, kdy budou mít všechny vrcholy grafu sudý stupeň a uzavřený eulerovský tah můžeme začít v kterémkoliv vrcholu.



Obrázek 4. Eulerovské grafy. Přidáním vrcholu lichého stupně (spojeného zelenou hranou s původním grafem) určíme počátek i konec Eulerova otevřeného tahu.

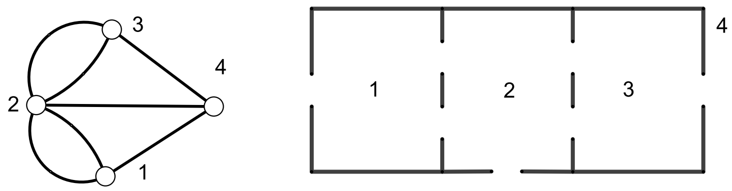
Pokud naši žáci problém správně pochopili a vyřešili jednoduché ornamenty, zadáme graf s jedním vrcholem prvního, popř. lichého stupně a vyzveme je, aby vymýšleli nové grafy, které nebude možné jedním tahem nakreslit. Děti budou navrhovat různé hypotézy, „kdy to jde, a kdy ne“, je třeba mít připraveny jednoduché názorné protipříklady. Posledním krokem je dodání domečku a dalších příkladů grafů s otevřeným eulerovským tahem. Při trpělivém vedení dospějí i sedmileté děti ke správnému závěru.

Jsou-li v grafu více než dva uzly lichého stupně, pak eulerovský tah neexistuje. Jsou-li v grafu právě dva uzly lichého stupně, pak existuje otevřený eulerovský tah začínající v jednom z těchto uzlů a končící v druhém. Jestliže jsou v grafu všechny uzly sudého stupně, pak existuje uzavřený eulerovský tah.

Sedm mostů města Královce. Jednotažky, nebo-li eulerovské tahy jsou historicky nejstarší grafovou úlohou. Říká se, že radní města Königsberg (Kaliningrad, česky Královec) vyzvali Leonarda Eulera, aby naplánoval průvod městem tak, aby po každém ze sedmi mostů prošli právě jednou. Ve skutečnosti není doloženo, jak se Euler o problému dozvěděl. Již v Eulerově době byl tento problém zmiňován jako velmi známý. Článek, v němž Euler dokazuje, že problém sedmi mostů nemá řešení je datován 1736 [6], ale vyšel až v roce 1741. Euler na žádném náčrtku nezakresluje čtyři části města pomocí vrcholů grafu ani mosty hranami, tak jak je kreslíme dnes, ale úvahy a závěry o počtu vrcholů lichých stupňů jsou stejné. Jak vyplývá z korespondence, samotný problém v Königsbergu Euler považoval za banální, zajímavé pro něj bylo zobecnění a souvislost s novou disciplínou, již Leibniz nazýval analysis situs (geometrical situs, topologie). Euler dokázal nutnou podmínku, důkaz postačující podmínky uveřejnil až v roce 1873 Carl Hierholzer [9]. Ten také popsal dodnes nejrychlejší algoritmus pro hledání uzavřeného eulerovského tahu, kdy počet operací roste lineárně s počtem hran. Nejznámějším algoritmem pro sestrojení eulerovského tahu je Fleuryho algoritmus. Není tak rychlý, jako Hierholzerův postup, svou jednoduchostí se ale hodí i pro nejmenší děti.

Fleuryho algoritmus. Pokud jsou všechny vrcholy sudého stupně, začneme v kterémkoliv vrcholu. Pokud jsou v grafu dva uzly lichého stupně, začneme v jednom z nich. Vydáme se po kterékoliv hraně. Při dalších tazích kontrolujeme, aby zbývající část grafu, tvořená zatím nevybranými hranami, byla souvislá a aby z aktuálního konce tahu vedla alespoň jedna nevybraná hrana [4].

Procházení labyrintem. Problém eulerovských tahů můžeme přeformulovat i na procházení labyrinty. Při daném půdorysu labyrintu je třeba projít všemi dveřmi právě jednou. Jednotlivé místnosti reprezentujeme uzly a tyto spojíme hranou, pokud jsou spojeny dveřmi. Slavný problém města Královce převedený na průchod labyrintem je na obrázku 5 vpravo.



OBRÁZEK 5. Sedm mostů města Královce

Zobecněním jednotažek je tzv. problém čínského pošťáka. Už v roce 1960 jej nejdříve definoval, a pak i řešil čínský matematik Mei-Ko Kwan [16]. Pošťák musí denně projít všemi ulicemi svého doručovacího obvodu. Měl by urazit co nejmenší vzdálenost a vrátit se zpět do místa, ze kterého vyšel. Je zřejmé, že pokud existují v grafu uzavřené tahy, pak optimální řešení bude mezi nimi. Pro jednoduché grafy lze tento problém postavit již před žáky první třídy.

APLIKACE TEORIE GRAFŮ

S grafy a grafovými úlohami, situacemi a problémy, při řešení kterých se pohybujeme na půdě teorie grafů, se setkáváme na nejrůznějších a často i nečekaných místech. Tato setkání bývají ale natolik přirozená, že s nimi většina lidí matematiku ani nespojuje. Grafem můžeme znázornit dopravní nebo počítačovou síť, sociologické vztahy ve skupině, plánování výrobních procesů či vzájemnou interakci léků.

S rozvojem výpočetních možností roste i možnost aplikace optimalizačních grafových algoritmů i přímý vliv na naše každodenní rozhodování. Nejnápadnějším příkladem je vyhledávání nejkratší cesty mezi dvěma místy a její uplatnění v navigacích. Vrcholům grafu odpovídají křižovatky a komunikace mezi křižovatkami jsou modelovány hranami. Každou hranu reprezentující úsek silnice můžeme ohodnotit pomocí délky příslušného úseku v kilometrech, nebo průměrného času průjezdu. Orientací hran pak můžeme znázorňovat případné jednosměrky v silniční síti, ve které trasu hledáme. Zadáme-li dvě místa na mapě, Dijkstrův algoritmus pro nejkratší cestu spolehlivě najde optimální spojení.

Plánování nejkratší trasy ale zdaleka není jediné využití takto reprezentované dopravní sítě. Pro optimalizaci rozvozu zboží hledáme co nejkratší cestu s předepsanými vrcholy, při zimní údržbě silnic naopak musíme projet předepsané hrany. V teorii grafů jsou to proslulé nedeterministicky polynomiální (NP-úplné) problémy obchodního cestujícího a hamiltonovské kružnice. Na první pohled nám mohou připadat jednoduché, ale zřejmě neexistuje algoritmus, jenž by v polynomiálním čase zaručil optimální řešení.[3] Pro řešení takovýchto problémů se používají nejrůznější heuristiky či aproximační řešení. Například, pro návrh tras pro funkci spojky zajišťující obslužnost předsedů povodňových komisí při vyhlášení I. stupně povodňové aktivity byl použit Littleho algoritmus pro problém obchodního cestujícího [19].

Závěr

V příspěvku nejsou zdaleka probrány všechny problémy vhodné do školské matematiky. Své nezpochybnitelné místo má teorie grafů v informatice. Nastínili jsme některé z těch nejjednodušších algoritmů, jež můžete s dětmi objevit i při kreslení na papíře. Můžete ale také objevit i úplně jiné postupy a soutěžit, který je v čem lepší. Možná vás překvapí některý z vašich žáků, když po prázdninách přijde s novým vylepšujícím postupem, nebo i novým příkladem z praxe, kde se dají grafy použít. A to je pro učitele ta nejlepší odměna.

Reference

[1] Bender, E. A., Wilf, H. S. „A theoretical Analysis of Backtracking in the Graph Coloring Problem“, In *Journal of Algorithms.* 1985.

[2] Blažková, R., Vaňurová, M., Matoušková, K. *Matematika pro 3–5. ročník ZŠ.* Praha: ALTER, 1995–2013.

[3] Čížková, M. *Matematika pro 1–4. ročník základních škol.* Praha: SPN a. s. 2008–2014.

[4] Demel, J. *Grafy a jejich aplikace*, Praha: Academia. 2002.

[5] Dlab, V. „Předstírání k nápravě nepomůže: Učitelé se tváří, že vyučují a studenti, že studují“. In *Sborník 11. setkání učitelů matematiky všech typů škol*, Srní. s. 101–104, 2008.

[6] Euler,L. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperi- alis Petropolitanae 8 128-140 = Opera Omnia (1) 7 (1911-56), 1–10. 1736.

[7] Glasová, E. *Teorie grafů a její výskyt ve školské matematice*, diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. 2012.

[8] Hamkins, J. D. *Math for seven-year-olds: graph coloring, chromatic numbers, and Eulerian paths and circuits, Math for eight-year-olds: graph theory for kids* Dostupné na http://jdh.hamkins.org/category/math-for-kids/. 2014–2015.

[9] Hopkins, B., R. J. Wilson, R. J. „The Truth about Königsberg“, In *The college Mathematics Journal*, Vol 35, No 3, p 198–207. 2004.

[10] Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* 2. vydání. Praha: Portál. 2009.

[11] Hejný, M., Jirotková, D., Bomerová, E. (2007–2011), J. *Matematika – učebnice pro základní školy (1. – 5. ročník).* Plzeň: Fraus.

[12] Hejný, M. „Nestandardní matematická prostředí pro děti 5-7leté“, In *Zborník príspevkov z Letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS* , Bratislava. 2006.

[13] Fortnow, L., Homer, S.„A Short History of Computational Complexity“, In *Bulletin of the EATCS* 80, s. 95–133. 2002.

[14] Jirovský, L. *Teorie grafů ve výuce na střední škole.* Diplomová práce MFF UK, Praha. 2010.

[3] NP-úplná (NP-complete) je úloha ve třídě NP, pomocí které lze efektivně řešit všechny ostatní NP úlohy. Pro NP problémy zatím nebyl objeven polynomiální deterministický algoritmus, ale ověřit správnost řešení počítač v polynomiálním čase dovede. Otázka, zda úloha, u které dokáže počítač v polynomiálním čase ověřit správnost nabídnutého řešení, dokáže počítač také sám v polynomiálním čase vyřešit, je zatím nezodpovězena. Patří mezi tzv. sedm problémů tisíciletí, za jejichž vyřešení nabízí Clayův matematický ústav jeden milion amerických dolarů.

[15] Kuřina, F. „Kritické jevy naší školské matematiky". In *Matematika-Fyzika-Informatika*, 24, s. 241–251. 2015.

[16] Kwan, Mei-ko. „Graphic programming using odd or even points", In *Acta Mathematica Sinica* (in Chinese), 10: 263-266. Translated in Chinese Mathematics 1: 273-277, 1962.

[17] Liebling, T., Pournin, L. „Voronoi diagrams and Delaunay triangulations: ubiquitous Siamese twins". In *Optimization Stories. Documenta Mathematica.* Extra Volume ISMP. s. 419–431. 2012.

[18] Matoušek, J., Nešetřil, J. *Kapitoly z diskrétní matematiky.* 4. vydání. Praha: Karolinum. 2000.

[19] Mocková, D. „Využití teorie grafů pro svolání členů povodňových komisí" In *Perner's Contacts*, s. 125–135, 2013.

[20] Molnár, J., Mikulenková, H. *Matematika – učebnice pro základní školy* (1.–5. ročník). Olomouc: Prodos, 1993–1997.

[21] Mutinová, T. *Prvky teorie grafů v učivu matematiky na 1. stupni základní školy*, diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. 2014.

[22] Pavelka, Z. "Dnešní školství nás táhne dolů, říká matematik a filosof Petr Vopěnka", In *Právo*, Salon, 2014. Dostupné na novinky.cz.

[23] Piťha, P. „Hledání učitele". In *Hledání učitele*, 50. Výročí založení Pedagogické fakulty UK, Praha, s. 26–39. 1996.

[24] Smithers, D. B. *Graph Theory for the Secondary School Classroom*, Tennessee State University, Electronic Thesis and Disertations. 2005.

[25] Svobodová, V. *Historie pravidelných mnohostěnů*, rigorózní práce Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Brno. 2006.

[26] *Rámcový vzdělávací program pro základná vzdělávání*, MŠMT, Praha 2016.

Ústav aplikované matematiky, Fakulta dopravní ČVUT v Praze, Česká republika
E-mail address: voracova@fd.cvut.cz