

VIZUÁLNÍ DŮKAZY VE VÝUCE MATEMATIKY

IRENA ŠTRAUSOVÁ

ABSTRAKT. Vhodná vizualizace matematického pojmu může pomoci k jeho lepšímu pochopení. Článek na praktickém příkladu ze středoškolské matematiky ukazuje, jak by bylo možné ve výuce využít vizuálních důkazů a tím žákům poskytnout nový pohled na prezentované matematické pojmy, a také na matematické důkazy.

ÚVOD

Argumentace, ověřování a dokazování jsou nedílnou součástí matematiky. Hrají nezastupitelnou roli nejen při budování a systematizaci matematických pojmů, ale také při porozumění matematice a její interpretaci. Argumentace a dokazování a různé způsoby využití těchto technik ve výuce matematiky jsou velice diskutovanými tématy mezi vyučujícími a experty na vzdělávání [4]. Dopad kvalitní průpravy v argumentaci a ověřování sahá daleko za hranice matematiky. Jestliže si žáci uvědomí, jak důležité je ověřovat různá tvrzení týkající se manipulace s čísly, může jim to například v budoucnu pomoci odpovědně řešit své osobní finance [14].

Významný přínos pro dokazování v matematice mělo zajištěné zavedení počítačů. Zatímco systémy počítačové algebry (CAS) a programy dynamické geometrie (DGS), jsou dnes v matematickém vzdělávání plně akceptovány, pozornost se obrací k programům pro automatické dokazování matematických vět [11, 13]. Přínos automatického dokazování pro matematiku je evidentní. Otázkou však zůstává, jak tuto metodu vhodně využít při výuce matematiky.

Role důkazů v matematickém vzdělávání je stále předmětem odborných diskusí a není zdaleka vyřešena [4]. Je třeba si proto ujasnit, co je myšleno pojmem „důkaz“ v tomto článku. Zatímco z pohledu akademické matematiky je důkaz chápán čistě formálně, jako postup založený na pravidlech matematické logiky, z hlediska vzdělávání se tento pojem chápe poněkud širěji. Při vyučování matematice se někdy k dokazování využívá i geometrických modelů, které se nazývají „vizuální důkazy“. A právě využitím těchto vizuálních důkazů se zabývá tento článek. Proto i pojem „důkaz“ je zde chápán z druhého zde zmíněného pohledu.

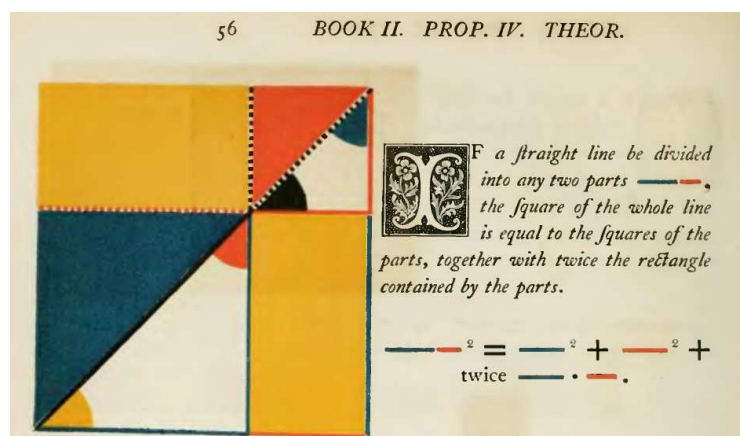
1. DŮKAZY BEZE SLOV

Obrázky a schémata hrají důležitou roli v procesu pochopení různých matematických pojmů. Navíc, vhodné schéma nebo obrázek může být použit jako vizuální důkaz některé geometrické vlastnosti nebo věty. A není to pouze záležitost týkající se geometrie. Také algebraické myšlenky často mají přirozené geometrické reprezentace. Vhodný obrázek dokáže zprostředkovat velké množství informací zorganizovaných podle souboru smysluplných vztahů. Tyto tzv. „důkazy beze slov“ bývají pro studenty více atraktivní a srozumitelné, než klasické algebraické důkazy. Nicméně je nutné si uvědomit i některá rizika, která představují. Především u statických

obrázků je velké riziko toho, že vlastnosti, které zde můžeme pozorovat, nemusí mít obecný charakter [17]. Dalším nedostatkem v porovnání s klasickými důkazy může být i to, že tyto statické obrázky nezachycují sled myšlenek vedoucí k důkazu, ale pouze výsledek. Tyto nevýhody mohou být odstraněny, nebo alespoň minimalizovány, použitím softwaru dynamické geometrie. Neustálé vylepšování vlastností systémů dynamické geometrie umožňuje ověřovat různá tvrzení nebo vytvářet dynamické vizuální důkazy. Především pak využití posuvníku může hrát roli jakéhosi mediátora mezi argumentací a důkazem. Navíc, tento nástroj nabízí studentům možnost opakovaně pohybovat s obrázkem tam a zpět, což jim lépe umožňuje pochopit podstatu zobrazeného sdělení a usnadňuje jim tak snáze přenést svou empirickou zkušenost do teoretické roviny [4].

2. HISTORIE DŮKAZŮ BEZE SLOV

„Důkazy beze slov“ nejsou samozřejmě ničím novým. Jejich výskyt lze vysledovat již v dávné minulosti. Například v 6. století př. n. l. staří Řekové z ostrova Aigina používali k placení stříbrné mince, na jejichž zadní straně byl geometrický důkaz beze slov pro rovnost $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ [6]. Je to také velice pěkná ukázka toho, že matematika je součástí každodenního života už od dávných dob. Stejný obrázek později, okolo roku 300 př. n. l., použil i Eukleides ve svých Základech, kde jej však interpretuje čistě geometricky: „*Když se úsečka libovolně rozdělí, čtverec z celé rovná se čtvercům z úseček a dvojnásobnému pravoúhelníku úsečkami sevřenému*“ [3].



OBRÁZEK 1. Anglický kolorovaný překlad Eukleidových Základů z roku 1847 [1]

3. SOUČASNOST DŮKAZŮ BEZE SLOV

V dnešní době se můžeme v řadě publikací setkat s mnoha „důkazy beze slov“ různých matematických vět či vlastností. Asi nejznámější z nich jsou knihy od Rogera Nelsena [9, 10], které jsou kolekcí vynikajících důkazů z různých oblastí matematiky. Bohužel, jejich jedinou nevýhodou, jak to tak nevyhnutelně u všech tištěných materiálů bývá, je jejich statický charakter. V tomto ohledu mají výhodu

různé specializované webové stránky, na kterých můžeme nalézt dynamické „důkazy beze slov“.

Jako první uveďme stránku [5], věnovanou programu Java Geometry Expert (JGEX). Tento systém, který je stále vyvíjen a zdokonalován, spojuje vizuální dynamickou prezentaci důkazů se softwarem dynamické geometrie a se softwarem pro automatické dokazování. Krom jiného je zde prezentována více jak stovka vizuálních důkazů vytvořená tímto programem. Zajímavý projekt, který nabízí interaktivní ilustrace mnoha pojmů z různých oborů nalezneme na [20]. V sekci věnované matematice lze nalézt i řadu velice pěkných dynamických důkazů. Další stránku, která nabízí mnoho problémů z různých odvětví matematiky, některé z nich následované dynamickými vizuálními důkazy, nalezneme na [2].

4. DŮKAZY NA STŘEDNÍ ŠKOLE

Jak už zde bylo zmíněno, argumentace a dokazování hrají v matematice a její výuce nezastupitelnou roli. Kromě skutečnosti, že tyto techniky formují matematiku jako vědu, slouží také jako prostředek pro předávání matematických znalostí a procvičování logického uvažování. Učitelé, odborníci na vzdělávání i vládní činitelé si tyto důležité role argumentace a dokazování plně uvědomují. Proto jsou také tyto techniky zakotveny v Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia (RVP) [16]. V obecné části RVP, v pasáži věnované klíčovým kompetencím, je u kompetecí k řešení problémů uvedeno: *„Žák kriticky interpretuje získané poznatky a zjištění a ověřuje je, pro své tvrzení nachází argumenty a důkazy, formuluje a obhajuje podložené závěry.“* U kompetecí komunikativních: *„Žák používá s porozuměním odborný jazyk a symbolická a grafická vyjádření informací různého typu.“* V části věnované vzdělávací oblasti matematika a její aplikace je hned první sekce nazvána *„Argumentace a ověřování“*, ve které jsou očekávány tyto výstupy: *„Žák čte a zapisuje tvrzení v symbolickém jazyce matematiky, užívá správně logické spojky a kvantifikátory, rozliší definici a větu, rozliší předpoklad a závěr věty, rozliší správný a nesprávný úsudek, vytváří hypotézy, zdůvodňuje jejich pravdivost a nepravdivost, vyvrací nesprávná tvrzení, zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému.“*

Ačkoliv jsou kladeny od autorit tyto požadavky, mnoho středoškolských studentů nemá matematické důkazy rádo. Většina z nich považuje matematické důkazy za obtížné a zbytečné. Raději matematické větě rovnou věří, než aby ji dokázali. Na jedné straně je potěšitelné, že studenti důvěřují své učitelce či učiteli a informace, které jim sděluje, považují apriori za pravdivé, ale na druhé straně, určitý stupeň pochybností je hnací silou poznání.

Najít všechny důvody, proč jsou matematické důkazy u středoškoláků neoblíbené, není snadný úkol. Jedním z těchto důvodů mohou být například učebnice, které se k výuce používají. Ty většinou obsahují algebraické důkazy a to jak u algebraických vět, tak i u geometrických. Přitom algebraické myšlenky často mají i přirozené geometrické reprezentace [17]. Další důvody, které by mohly oblíbenost důkazů ovlivnit, jsou například osobnost učitele, využití počítačů, či jiných technologií ve výuce atd.. Ať už zde ale zmíníme cokoli, je jasné, že klíčovým faktorem ve zvýšení zájmu studentů o dokazování je jejich motivace.

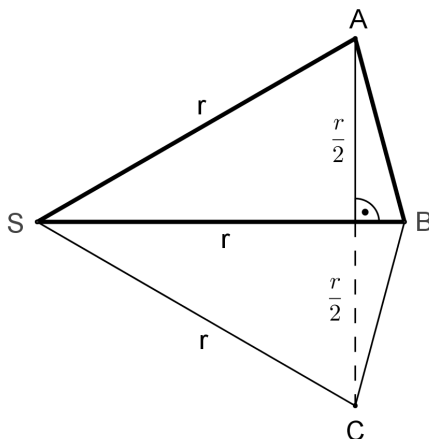
5. VHODNÁ VIZUALIZACE

Geometrickou představivost je nutné u studentů systematicky rozvíjet už třeba jen proto, že ji lze využít při práci v mnoha profesích [8]. Není důležité pouze nakreslit si obrázek, ale nakreslit si SPRÁVNÝ obrázek. Na jednoduchém příkladě rovnoramenného trojúhelníku si ukážeme, jak může odlišná geometrická reprezentace ovlivnit přístup k řešení problému.

V článku [7] je prezentován problém, který byl zadán absolventům základní školy a studentům učitelství:

Vypočítejte obsah pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru r .

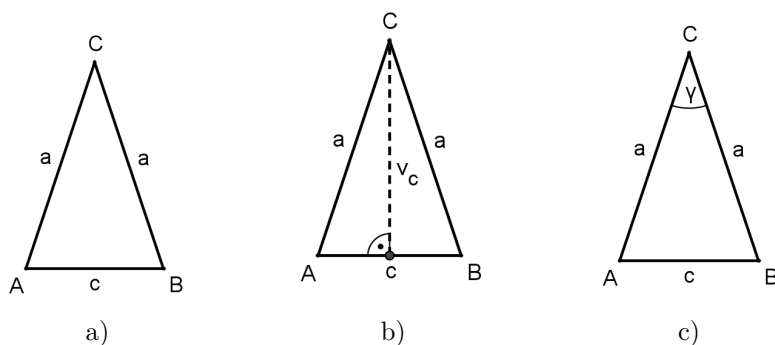
Autor zde poukazuje na to, že jen velice málo studentů odhalilo, že trojúhelníky, ze kterých je pravidelný dvanáctiúhelník složen, se dají chápat jako trojúhelníky se základnou délkou r a příslušné výšky $\frac{1}{2}r$ (obr. 2), čímž by relativně jednoduše odhalili správné řešení $S = 12 \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin 30^\circ = 3r^2$. Vina za tento deficit je autorem přikládána nízké matematické kultuře řešitelů.



OBRÁZEK 2. Rovnoramenné trojúhelníky, ze kterých se skládá pravidelný dvanáctiúhelník [7]

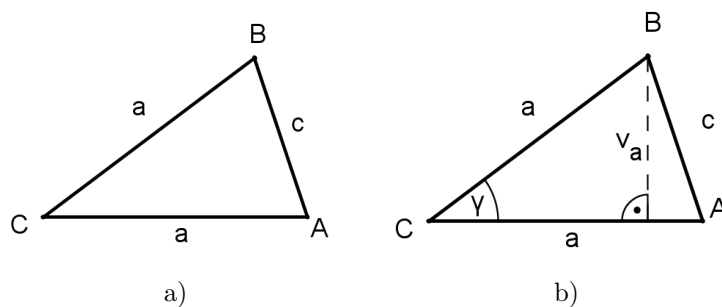
Když se ovšem zamyslíme nad tím, jakým způsobem jsou žáci seznamováni s problematikou rovnoramenného trojúhelníku, nebude se zdát výše uvedený výsledek zas tak překvapivý. V [18] je uvedeno: „**rovnoramenný trojúhelník** – trojúhelník, který má alespoň dvě strany shodné. Dvě shodné strany tvoří *ramena*, třetí strana je *základna* trojúhelníku“ (obr. 3a)). Dochází zde totiž ke konfliktu standardního názvosloví. Zatímco u obsahu trojúhelníku je pojmem „základna“ myšlena kterákoliv strana trojúhelníku („Obsah trojúhelníku se rovná základna krát výška lomeno dvěma“), u rovnoramenného trojúhelníku je tím myšlena pouze ta strana, která má různou délku. Při výpočtu obsahu rovnoramenného trojúhelníku pak nebývá problém, jestliže je zadána délka základny a k ní příslušná výška (obr. 3b)). Jiná situace však nastává, jestliže je dána délka ramen a velikost úhlu, který svírají (obr. 3c)). Klasickým řešením, které používá v tomto případě mnoho žáků, je rozdělení trojúhelníku příslušnou výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky. Pak využijí některou z goniometrických funkcí k výpočtu výšky $v_c = a \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$ (resp. poloviny

základny $\frac{c}{2} = a \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$), z Pythagorovy věty $(\frac{c}{2})^2 = a^2 - v_c^2$ dopočítají délku základny (resp. výšky) a nakonec s využitím známého vzorce $S = \frac{1}{2}c \cdot v_c$ dostanou požadovaný výsledek. Tento postup je samozřejmě z formálního hlediska naprosto v pořádku, ale je čistě mechanický.



OBRÁZEK 3. Rovnoramenný trojúhelník

Ukažme si nyní, jak může vhodný náčrt změnit náš pohled na problém a tím i ovlivnit složitost řešení. Stačí když trojúhelníkem ABC otočíme např. v rotaci $R(A, \pi - \alpha)$ (obr. 4a)). Rázem máme trojúhelník, kde základnu tentokrát tvoří jedna ze shodných stran rovnoramenného trojúhelníku. Jestliže si zde vyznačíme i příslušnou výšku v_a (obr. 4b)) k této straně, můžeme pak obsah trojúhelníku ABC jednoduše vyjádřit jako $S = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}a^2 \sin \gamma$.



OBRÁZEK 4. Rovnoramenný trojúhelník

6. UKÁZKOVÝ PŘÍKLAD

Jak zde bylo ukázáno, vhodná vizualizace matematického problému může zcela změnit přístup k jeho řešení. Další důležitou roli může vhodná geometrická reprezentace sehrát i při zavádění nových matematických pojmů. Zde uvedený příklad je vybrán z látky středoškolské matematiky. Na jedné matematické větě jsou ukázány tři různé typy k důkazů - algebraický, statický geometrický a dynamický geometrický.

V učebnici matematiky pro gymnázia [12] jsou společně uvedeny i dokázány následující věty pro goniometrické funkce:

Věta 6.1. Pro všechna reálná čísla x, y platí

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad (1)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \quad (2)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad (3)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \quad (4)$$

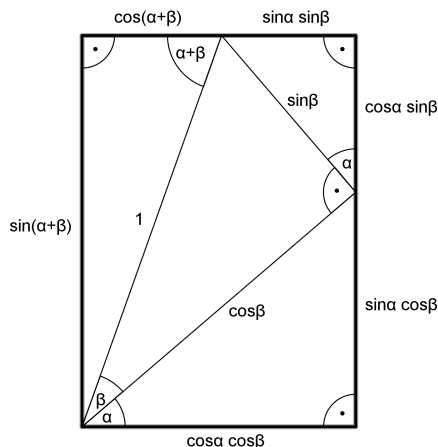
Věta 6.2. Pro každé $x \in R$: $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ a $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

Algebraický důkaz prvního součtového vzorce 6.1(1), který je v [12] uveden, je založen na tvrzení pomocné věty 6.2 a na platnosti ostatních součtových vzorců 6.1(2-4).

Důkaz. 6.1 (1) Využijeme 6.2 a 6.1(4): $\sin(x + y) = \cos[\frac{\pi}{2} - (x + y)] = \cos[(\frac{\pi}{2} - x) - y] = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \cos y + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$, což jsme měli dokázat. \square

Samotný důkaz 6.1(1) není příliš složitý, ale je důležité si uvědomit, že vychází ze vzorce 6.1(4), jehož důkaz je dlouhý přes dvě strany učebnice [12] a krom jiného se také opírá o otočení soustavy souřadné, což bývá pro studenty velice obtížný krok.

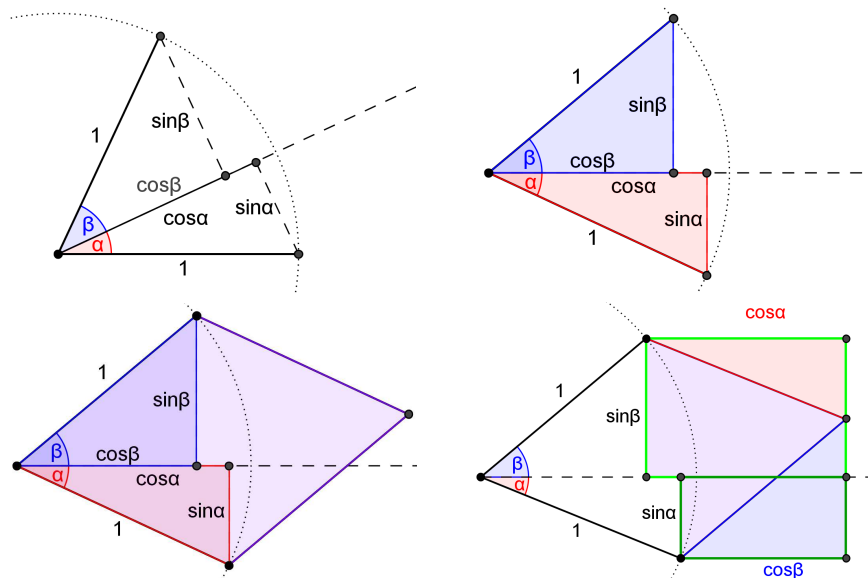
V již zmiňovaném článku [7] je uveden velice pěkný geometrický důkaz (obr. 5) zároveň pro věty 6.1(1) i 6.1(2):



OBRÁZEK 5. Statický geometrický důkaz 6.1(1) a 6.1(2) [7]

Jeho slabá stránka tkví v tom, že je omezen pouze na úhly α a β , jejichž součtem je ostrý úhel. Avšak přináší zase jiný pohled na daný problém a navíc nabízí propojení goniometrie a trigonometrie. Toto propojení mezi různými matematickými tématy, která ve většině učebnic chybí díky jejich monotematické koncepci, jsou přitom v procesu učení klíčová. Pomáhají žákům zasadit daný pojem do širších souvislostí.

Poslední prezentovaný důkaz (obr. 6) je také geometrický, ale je dynamický, vytvořený pomocí open-source software GeoGebra [21].

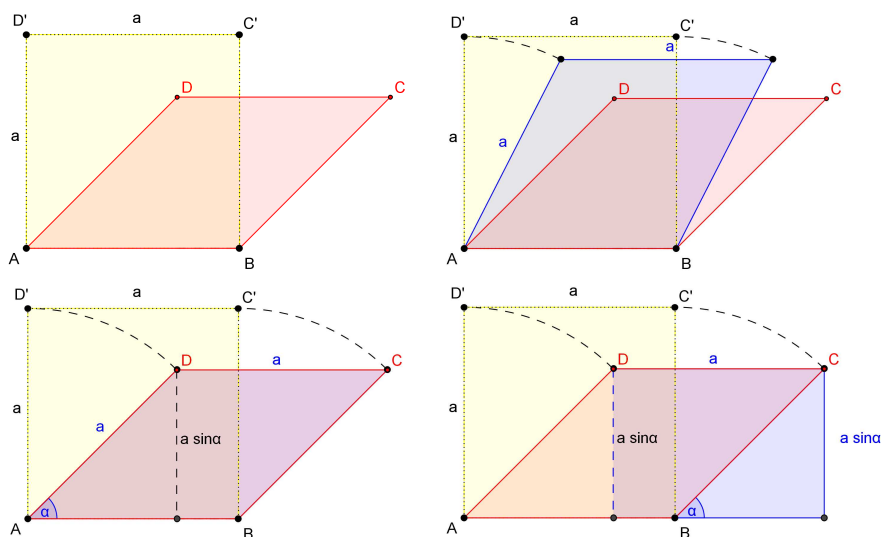


OBRÁZEK 6. Dynamický geometrický důkaz 6.1(1) [22]

Stejně tak jako předchozí důkaz i tento je koncipován tak, že u něj dochází k propojení různých matematických témat. Tentokrát jde o propojení poznatků z planimetrie a z goniometrie. Předpokládá se zde znalost vzorce pro výpočet obsahu kosočtverce $S = a^2 \sin \alpha$. Je možné, že žáci se s tímto vzorcem dříve nesetkali. Protože například v [15] mezi vzorci pro výpočet obvodu a obsahu rovinných obrazců tento vztah uveden není. Není však problém, aby si ho žáci v rámci přípravy sami odvodili. Mohou k tomu například využít dynamický důkaz [23], který je znázorněn na obrázku 7.

ZÁVĚR

V tomto článku jsem se pokusila ukázat, jak může vhodná vizualizace pomoci při řešení matematických problémů i objasnění matematických pojmů. Na konkrétním příkladě jsem naznačila, jak by se mohlo při výuce využít „důkazů beze slov“, které by mohly kromě lepšího pochopení matematických pojmů také pomoci rozvinout argumentační schopnosti a přispět k rozvoji geometrického myšlení. Některé další příklady lze nalézt v [19]. Zařazení těchto materiálů do vyučování s sebou ale přináší i požadavky na změnu v přístupu k učení jak od žáků, tak i od učitelů. Ze strany žáků je to například aktivní zapojení do výuky, argumentace při objevování nových vlastností a obhajování svých řešení nebo využití nabytých znalostí v širším kontextu. Od učitelů tento přístup vyžaduje například změnu výukových metod a hodnocení, volbu vhodných témat. Tyto požadavky se jeví jako zřejmé, ale k jejich přesné identifikaci je třeba v tomto směru provést seriózní šetření. Proto také výzkum, který bude součástí mé disertační práce, bude zaměřen na tuto problematiku.



OBRÁZEK 7. Dynamický geometrický důkaz pro vzorec na výpočet obsahu kosočtverce [23]

REFERENCE

- [1] BYRNE, Oliver. *The first six books of the Elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters*. London: William Pickering, 1847. Dostupné také z <http://publicdomainreview.org/2012/06/21/the-first-six-books-of-the-elements-of-euclid-1847/>
- [2] *Cut The Knot*. Dostupné z <http://www.cut-the-knot.org>.
- [3] EUKLEIDÉS,. *Základy*. 3., opr. vyd. Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni, 2010, s. 87. ISBN 978-80-7043-974-6.
- [4] HANNA, Gila a Michael DE VILLIERS, eds. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study*. New York: Springer, 2011, ISBN 978-940-0721-289.
- [5] *Java Geometry Expert (JGEX)*. Dostupné z <http://www.cs.wichita.edu/~ye>.
- [6] JONES, Alfred. Ancient Coinage. *Historic mysteries*. [online] 2011 [cit. 2013-01-15]. Dostupné z <http://historicmysteries.com/ancient-coinage>.
- [7] KUŘINA, František. Matematická kultura a vyučování matematice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010, roč. 55, č. 3, s. 243-255. ISSN 0032-2423. Dostupné z <http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141963>
- [8] KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN 80-042-3753-3.
- [9] NELSEN, Roger B. *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America, 1993. ISBN 0-88385-700-6.
- [10] NELSEN, Roger B. *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America, 2001. ISBN 0-88385-721-9.
- [11] NEUPER, Walther. On the Emergence of TP-based Educational Math Assistants. *The electronic journal of mathematics* [online]. 2013, roč. 7, č. 2. ISSN 1933-2823. Dostupné z <https://php.radford.edu/~ejmt/ContentIndex.php#v7n2>
- [12] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia - Goniometrie*. 3. vyd. Praha : Prometheus, 2005. s. 84-87. ISBN 80-7196-203-1.
- [13] PECH, Pavel. *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2005, ISBN 80-704-0805-7.
- [14] PETRÁŠKOVÁ, Vladimíra a Roman HAŠEK. Financial education demands concerning teacher training. *Acta Didactica Universitatis Comenianae-Mathematics*. Issue 12, 2012. ISSN 1210-3608.

- [15] POMYKALOVÁ, Eva *Matematika pro gymnázia - Planimetrie*. 5. vyd. Praha : Prometheus, 2010. s. 66. ISBN 80-7196-203-1.
- [16] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. 100 s. [cit. 2013-01-05]. Dostupné z <http://www.vuppraha.cz>. ISBN 978-80-87000-11-3.
- [17] *Proof* [online] [cit. 2013-01-05]. Dostupné z <http://www2.edc.org/makingmath/handbook/teacher/proof/proof.asp>
- [18] *Slovník školské matematiky*. Praha: SPN, 1981.
- [19] ŠTRAUSOVÁ, Irena a Roman HAŠEK. "Dynamic visual proofs" using DGS. *The electronic journal of mathematics* [online]. 2013, roč. 7, č. 2. ISSN 1933-2823. Dostupné z <https://php.radford.edu/~ejmt/ContentIndex.php#v7n2>
- [20] *Wolfram Demonstrations Project*. Dostupné z <http://demonstrations.wolfram.com/index.html>

Software

- [21] GeoGebra, volně šiřitelný matematický software pro studium a výuku. Dostupné z <http://www.geogebra.org>.

Doplňkové elektronické materiály

- [22] Štrausová, I., *Dynamický důkaz součtového vzorce pro funkci sinus*, GeoGebra soubor, 2013. Dostupné z <http://www.geogebra.org/material/show/id/27591>.
- [23] Štrausová, I., *Dynamický důkaz pro vzorec na výpočet obsahu kosočtverce.*, GeoGebra soubor, 2013. Dostupné z <http://www.geogebra.org/material/show/id/27592>.

KATEDRA MATEMATIKY, PEDAGOGICKÁ FAKULTA, JIHOČESKÁ UNIVERZITA, ČESKÉ BUDĚJOVICE,
ČESKÁ REPUBLIKA
E-mail address: strausi@email.cz