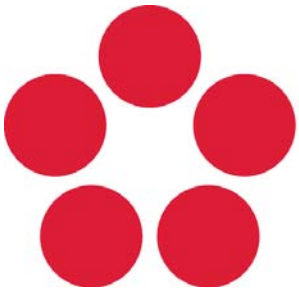


Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Sborník příspěvků 8. konference

Užití počítačů ve výuce matematiky

9. – 11. listopadu 2017

České Budějovice

Společnost učitelů matematiky
JČMF

Katedra matematiky Pedagogické fakulty
Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

ISBN 978-80-7394-677-7

Předmluva

Sborník obsahuje příspěvky, které zazněly na osmé konferenci „Užití počítačů ve výuce matematiky“, pořádané ve dnech 9. – 11. listopadu 2017 na půdě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Konference probíhala ve spolupráci se Společností učitelů matematiky JČMF a Jednotou českých matematiků a fyziků, pobočným spolkem České Budějovice.

Plenární přednášky přednesli Jarmila Robová (Univerzita Karlova v Praze): *Výuka matematiky v prostředí digitálních technologií*, Eduard Fuchs (Masarykova univerzita, Brno): *O matematické gramotnosti aneb Co naši žáci neumějí*, Zoltán Kovács (Private Pädagogische Hochschule der Diözese Linz, Rakousko): *Automated Reasoning Tools in GeoGebra* a František Kuřina (Univerzita Hradec Králové): *Chyby a omyly v matematice*. Anotace přednášek jsou spolu s prezentacemi dostupné na webové stránce konference www.pf.jcu.cz/upvm/2017.

Přednesené příspěvky se kromě tradičních témat využití systémů počítačové algebry (CAS) a dynamické geometrie (DGS) ve výuce a softwarové podpory e-learningu věnovaly také využití dalších programů a nových technologií ve výuce matematiky i dalších disciplín aplikujících matematické postupy. Celkem na konferenci kromě plenárních přednášek zaznělo 32 referátů a bylo uspořádáno 9 workshopů. Příslušné články jsou ve sborníku uvedeny v abecedním pořadí podle jmen autorů. Sborník byl recenzován členy programového výboru konference.

Poděkování patří členům organizačního výboru a studentům za obětavou práci při přípravě i v době konání konference. Dík patří rovněž vedení Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích a vedení Kolejí a menz Jihočeské univerzity za velmi vstřícný přístup.

Programový výbor konference pracoval ve složení

doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.
Mgr. Roman Hašek, Ph.D.
prof. Dr. Markus Hohenwarter
doc. RNDr. Helena Koldová (Binterová), Ph.D.
Dr. Zoltán Kovács
prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
doc. RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.
doc. RNDr. Jarmila Robová, Ph.D.

V Českých Budějovicích 18. prosince 2017

Za programový výbor

Pavel Pech

Obsah

Daniela Bímová
Výuka Mongeova promítání s využitím Geogebry 4

Radka Dofková
Připravenost budoucích učitelů pro používání digitálních technologií ve výuce matematiky 16

Jan Frank
Počítačová dekompozice polynomu na součet čtverců v historických souvislostech 17

Šárka Gergelitsová, Roman Hašek
Řešení úloh z pravděpodobnosti v programu Geogebra 19

Jaroslav Hora
Pollardův ρ – algoritmus pro faktorizaci přirozených čísel 25

Ladislav Jaruska, Anita Tóth-Bakos
Možnosti využitia webovej aplikácie vo vyučovaní matematiky 26

Jaroslav Jícha
Od logaritmického pravítka k počítači, aneb vývoj výpočetní techniky 20. století. 37

Jana Kaňková
Projektový den s finanční gramotností 47

Alexej Kolcun
Parametrické krivky ako nástroj pre ovládanie jednoduchého robota 54

Marie Košinová, Roman Hašek
Sketchometry – dynamická geometrie pro dotyková zařízení 59

Zoltán Kovács
Automated Reasoning Tools in GeoGebra: A New Approach for Experiments in Planar Geometry 64

Michaela Kovaříková
Použití logaritmu při výpočtu pH 65

Jitka Laitochová, David Nocar
Programování výpočtů školské matematiky 78

Vlasta Moravcová
Typografie pro učitele matematiky 85

David Nocar, Pavla Polejová, Jitka Laitochová
ICT podpora badatelsky orientovaného přístupu ve výuce matematiky na 2. stupni základních škol 103

Zuzana Pátíková
Možnosti programu SimReal+ 104

Vladimíra Petrášková, Přemysl Rosa
Podpora finanční gramotnosti s využitím aplikace StudentBroker 109

Jarmila Robová
Výuka matematiky v prostředí digitálních technologií 115

Libuše Samková
Badatelské úlohy ve vyučování matematice 116

Lucie Studená
Aplikace podmíněné pravděpodobnosti v lékařské diagnostice 132

Světlana Tomiczková
Motivace a geometrický software 146

Jiří Vančura
Khan Academy na střední škole 150

Klára Vocetková
Využití strukturních komponent interaktivních učebnic v hodinách matematiky na základě videostudií 159

Iva Vojkůvková
Využití MAPLE v základních kurzech matematiky na FIM 167

VÝUKA MONGEOVA PROMÍTÁNÍ S VYUŽITÍM GEOGEBRY

Daniela Bímová

Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

Abstrakt: Článek je věnován GeoGebra knize s názvem „Mongeovo promítání.“ Tato GeoGebra kniha obsahuje dynamické applety několika základních úloh a algoritmů Mongeova promítání. Dynamické applety se skládají ze symbolických zápisů konstrukcí v Mongeově promítání, ze samotných konstrukcí v Mongeově promítání a dále z prostorového řešení týchž úloh. Všechny vytvořené applety jsou vygenerovány i ve verzích pro anaglyfické brýle. GeoGebra kniha není zatím veřejně přístupná, lze ji otevřít pouze s použitím odkazu.

Klíčová slova: Mongeovo promítání, základní problémy Mongeova promítání, GeoGebra, dynamické applety.

Teaching of the Monge projection with the use of GeoGebra

Abstract: The article is dedicated to the GeoGebra book titled "Monge Projection." This GeoGebra book includes the dynamic applets of several basic Monge projection tasks and algorithms. Dynamic applets consist of symbolic entries of the Monge projection constructions, of the Monge projections themselves, and of spatial solutions of the same tasks. All created applets are also generated in versions for anaglyphic glasses. The GeoGebra book is not yet publicly accessible, it can only be opened using a link.

Key words: Monge projection, basic problems of the Monge projection, GeoGebra, dynamic applets.

Úvod

Již téměř 20 let vyučuji studenty bakalářského studia Fakulty strojní Technické univerzity v Liberci předmět Konstruktivní geometrie. Rok od roku se setkávám stále častěji s tím, že si studenti téměř vůbec nevědí rady s řešením prostorových úloh. Mnohdy si nedokáží ve svých představách vytvořit obrázek prostorové situace zadané úlohy a důsledkem toho pokulhávají i v jednotlivých krocích řešení problému. Zhruba dvě třetiny probírané látky tvoří v předmětu Konstruktivní geometrie Mongeovo promítání a konstrukční úlohy řešené v něm. Při studiu Mongeova promítání se studentům k problémům s řešením prostorových úloh přidávají ještě další obtíže a to s pochopením zobrazování objektů nacházejících se ve trojrozměrném prostoru na dvě navzájem kolmé průmětny, které navíc při rýsování splývají v jednu průmětnu.

Již mnohokráte jsem přemýšlela, jak studentům pomoci s řešením prostorových úloh v Mongeově promítání. Během přednášky, ale i během cvičení mají studenti možnost sledovat hlavní myšlenky řešení prostorových úloh při názorném modelování prostorových situací, dále také při klasickém výkladu a řešení úloh na tabuli a nakonec i při shlédnutí finálního statického grafického řešení úlohy v elektronických studijních materiálech. Což mnohým studentům ovšem nestačí. Právě pro podporu prostorové představivosti studentů již několik let cíleně vytvářím rozsáhlou sbírku dynamických appletů obsahujících prostorové situace a úlohy v Mongeově promítání. Před oficiálním spuštěním programu GeoGebra 3D jsem dynamické applety tvořila v geometrickém softwaru Cabri 3D. Tyto applety jsou volně dostupné na webové stránce [1]. Některým studentům při studiu Mongeova promítání však nepomáhají ani dynamické applety sestrojené v programu Cabri 3D. Jednou z příčin, proč jsou výše zmíněná grafická řešení úloh či dynamické applety sestrojené v programu Cabri 3D pro studenty nedostatečné, může být skutečnost, že jak grafická řešení, tak i dynamické applety v Cabri 3D jsou studentům předloženy již ve svých finálních podobách. Tj. obsahují konečná řešení prostorových situací či základních úloh. Studenti tak při samostudiu mohou narážet na problém, že přesně nevědí, v jakém pořadí se jednotlivé kroky řešení úloh v Mongeově promítání rýsovaly.

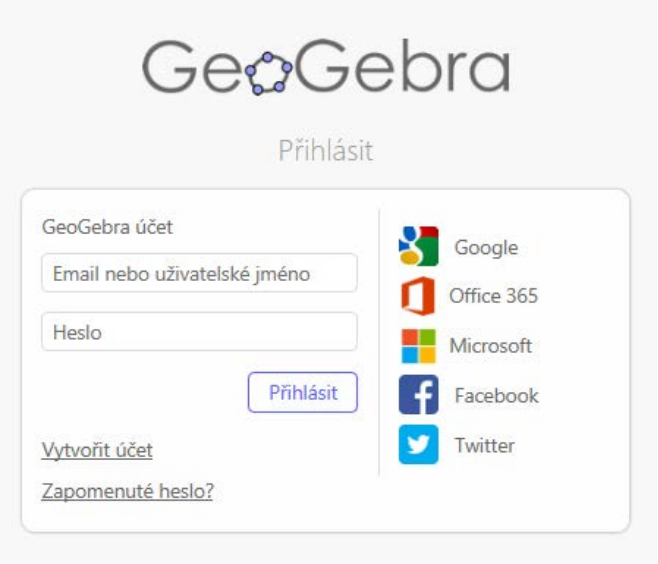
Možnosti dynamického softwaru GeoGebra 3D mi vnukly nápad, jak situaci zkusit vyřešit.

1. Dynamický software GeoGebra 3D

GeoGebra 3D je dynamický matematický software, ve kterém je mj. možné řešit geometrické úlohy a to jak rovinné, tak i prostorové. Velkou výhodou programu GeoGebra 3D je skutečnost, že v ní lze zobrazit najednou dvě dvourozměrné nákresny a jedno 3D okno. Za pomoci užití dynamického nástroje programu – posuvníku – můžeme propojit objekty sestrojené v obou dvourozměrných nákresnách mezi sebou, ale i s objekty sestrojenými ve 3D okně. A právě tato vlastnost programu GeoGebra 3D byla impulzem k sestrojení nových dynamických appletů (tentokráte v programu GeoGebra 3D) věnovaných základním úlohám Mongeova promítání.

1.1. GeoGebra účet

Po instalaci programu GeoGebra 3D se na obrazovce objeví plovoucí okno, v němž je nový uživatel programu vyzván k vytvoření si tzv. GeoGebra účtu. Viz obr. 1.



Obr. 1: Plovoucí okno k vytvoření nového GeoGebra účtu či k přihlášení se k již existujícímu GeoGebra účtu

Vytvoření GeoGebra účtu je bezplatné. Jeho výhodou je možnost ukládání appletů vytvořených v programu GeoGebra na internetové úložiště, tj. na GeoGebra účet daného uživatele. Applety se vkládají na GeoGebra účet jednotlivě. K jejich vložení na GeoGebra účet slouží příkazy

Soubor → *Export* → *Dynamický pracovní list jako webová stránka (html).*

Applety vložené na GeoGebra účet může uživatel sdílet trojím způsobem:

a) **sdílet veřejně** – ostatní uživatelé mohou prohlížet daný materiál
b) **sdílet odkazem** – pouze uživatelé, kteří mají odkaz, mohou prohlížet daný materiál; takovýto applet se nezobrazí ve výsledcích vyhledávání ostatních uživatelů
c) **sdílet soukromě** – pouze autor appletu může prohlížet daný materiál; takovýto applet se nezobrazí ve výsledcích vyhledávání ostatních uživatelů

Z appletů uložených na GeoGebra účtu lze vytvořit tzv. GeoGebra knihu.

1.2. GeoGebra kniha

Vytvoření GeoGebra knihy je velmi intuitivní. Na webové stránce GeoGebra účtu klikne uživatel na ikonu „+ Přidej“. V následně otevřeném plovoucím okně zvolí „Vytvořit Knihu“. Otevře se webová stránka, na níž uživatel vyplní základní údaje, které se zobrazí na titulní straně jeho GeoGebra knihy. Doplňované údaje nejsou povinné, ale mohou uživateli sloužit k lepší orientaci mezi uloženými GeoGebra knihami na jeho GeoGebra účtu. Mezi údaji k vyplnění jsou následující položky:

- název GeoGebra knihy
- jazyk GeoGebra knihy
- popis GeoGebra knihy
- cílová skupina (věk) – věk studentů, pro které je GeoGebra kniha určena

- klíčová slova – popisují GeoGebra knihu a pomáhají při vyhledávání
- způsob sdílení GeoGebra knihy

Uživatel může též vybrat a vložit obrázek, který se bude zobrazovat na titulní straně jeho GeoGebra knihy.

V záložce „Obsah“ uživatel přidá a následně pojmenujeme kapitoly, které chce, aby jeho GeoGebra kniha obsahovala. Do jednotlivých kapitol lze dále vkládat pracovní listy. Přitom pracovními listy mohou být

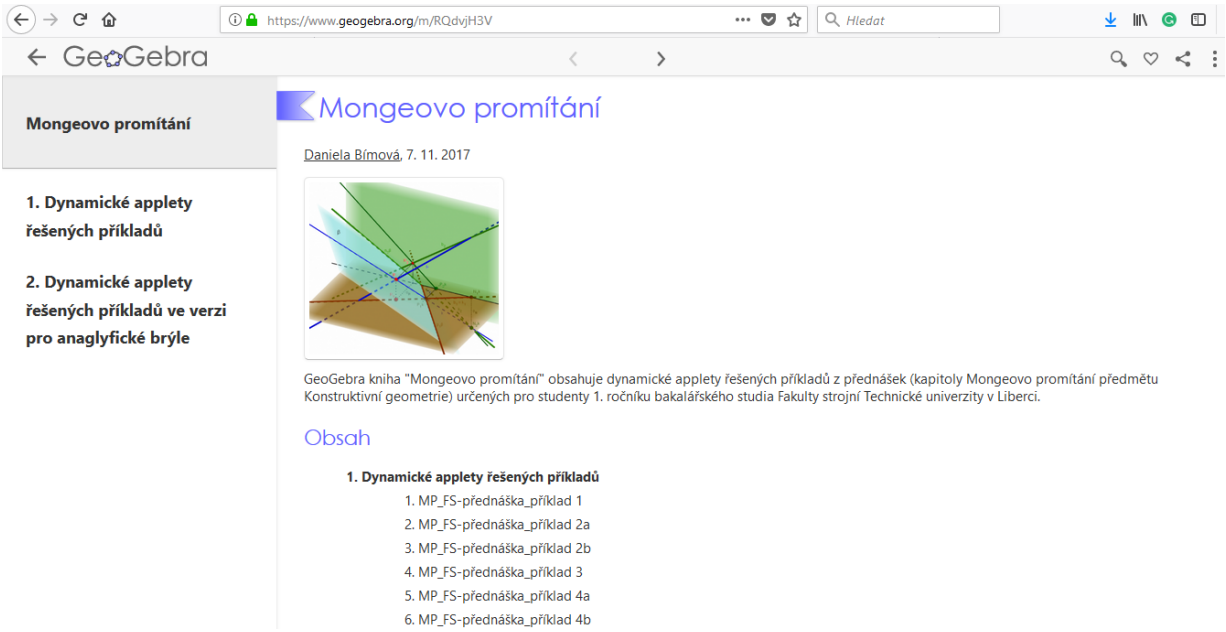
- text
- pdf soubor
- GeoGebra applet
- webový prvek
- video
- obrázek
- otázka – s otevřenou odpovědí
  – s vícenásobným výběrem odpovědí

2. GeoGebra kniha „Mongeovo promítání“

Na základě využití výše popsaných možností programu GeoGebra 3D jsem nejprve vytvořila v programu GeoGebra 3D dynamické applety základních úloh Mongeova promítání. Po té jsem je vyexportovala na svůj GeoGebra účet a ve finální fázi jsem je seskupila do GeoGebra knihy s názvem „Mongeovo promítání“. Vzhledem k tomu, že GeoGebra kniha „Mongeovo promítání“ není v současné chvíli ještě zcela dotvořená, je její sdílení nastaveno na sdílení odkazem [2].

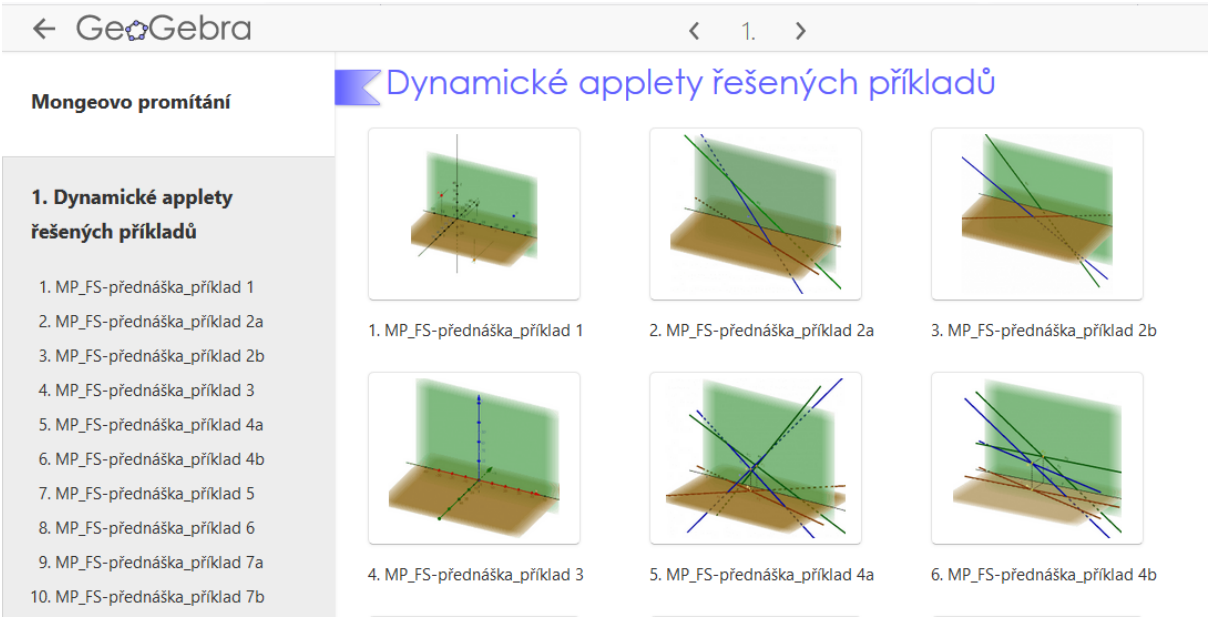
Obr. 2: Odkaz pro sdílení GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“

Po zadání odkazu do příkazového řádku internetového prohlížeče se otevře titulní strana GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“.



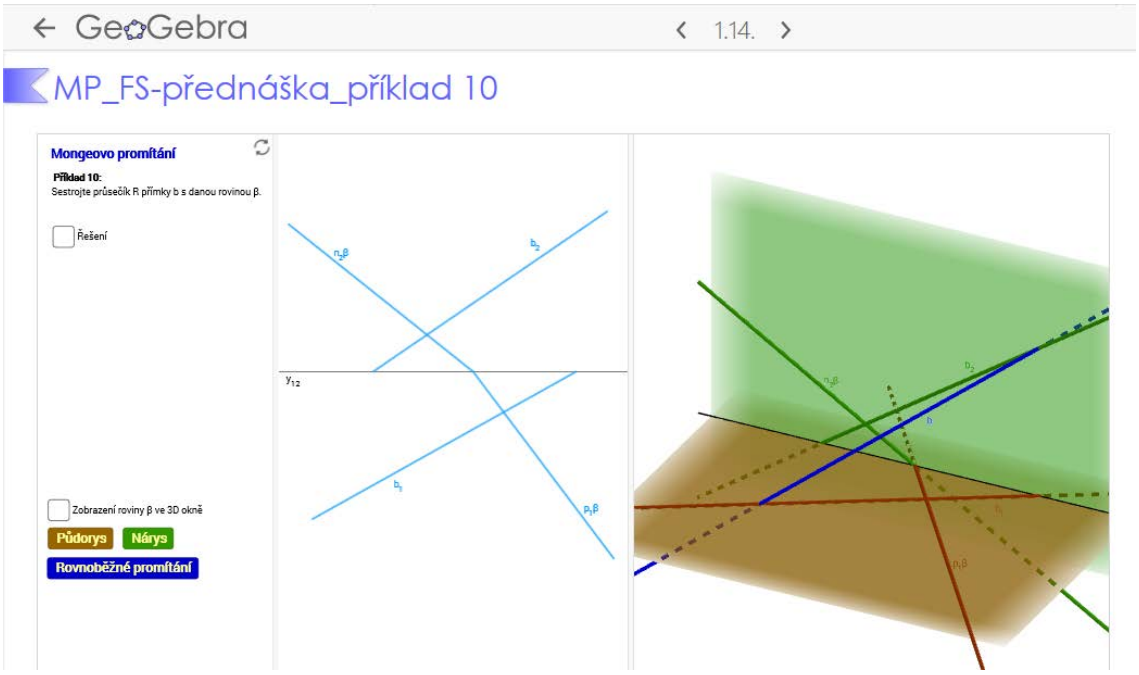
Obr. 3: Titulní strana GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“

GeoGebra kniha „Mongeovo promítání“ se v současné chvíli sestává ze dvou kapitol. Obsahem první kapitoly jsou dynamické applety vytvořené k řešeným příkladům z elektronických studijních materiálů předmětu Konstruktivní geometrie, viz [1].



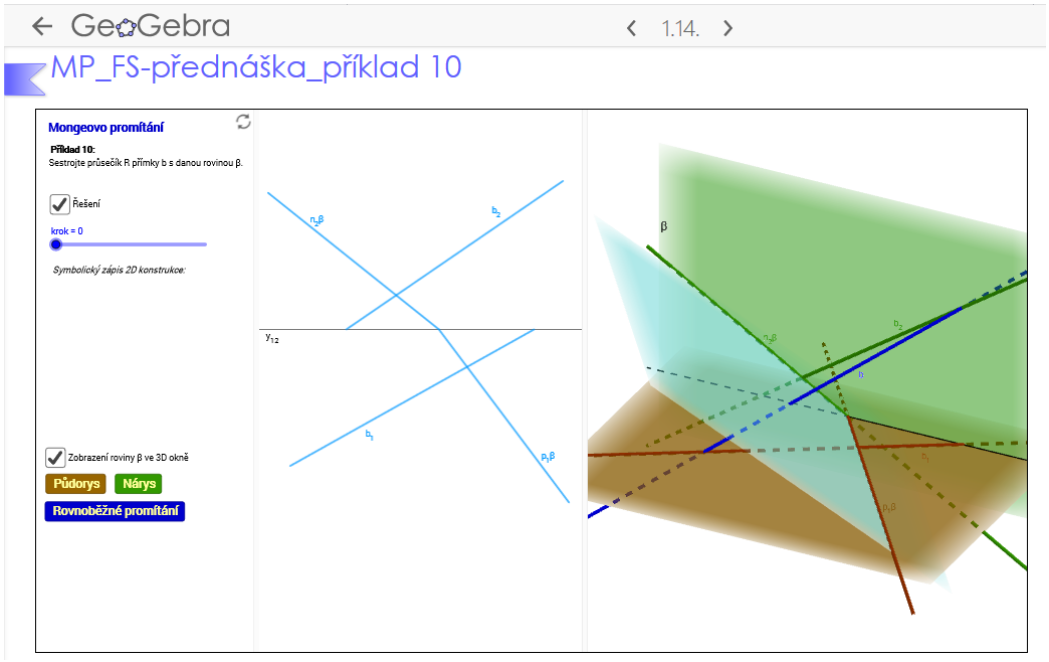
Obr. 4: Přehled několika appletů 1. kapitoly GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“

Kliknutím na název vybraného appletu se příslušný applet otevře ve webovém rozhraní. Prostředí všech appletů GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“ je rozděleno do tří oken.



Obr. 5: Vzhled jednoho z appletů 1. kapitoly GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“ po jeho otevření

V levém okně (jedno ze dvou 2D nákresen) je zapsán text zadání úlohy. Pod textem zadání úlohy je umístěno zaškrtávací políčko „Řešení“. Aktivováním zaškrtávacího políčka

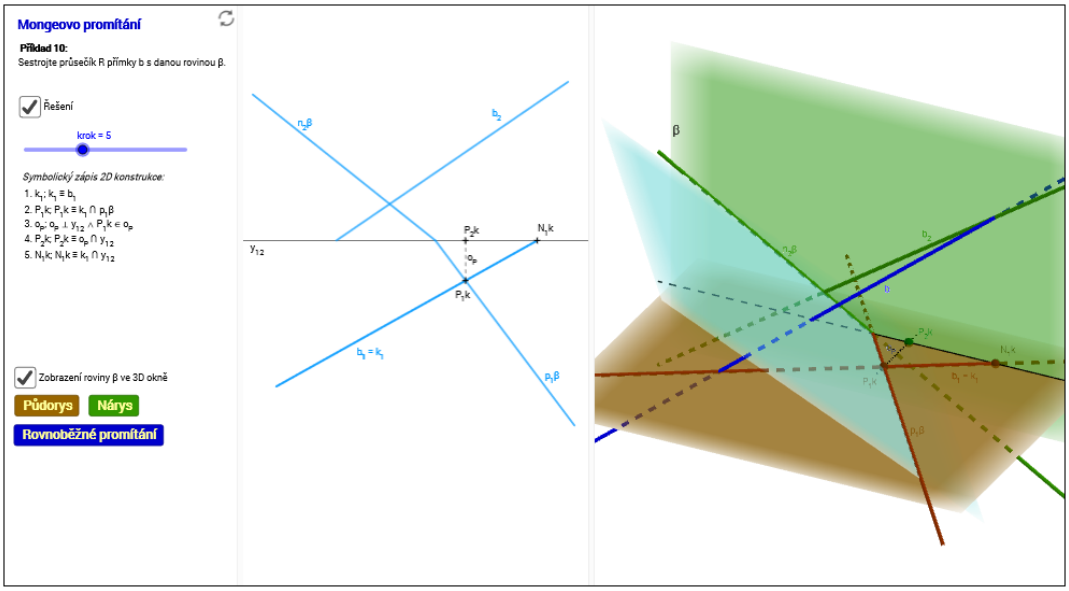


Obr. 6: Aktivování zaškrtávacího políčka „Řešení“ v jednom z appletů 1. kapitoly GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“

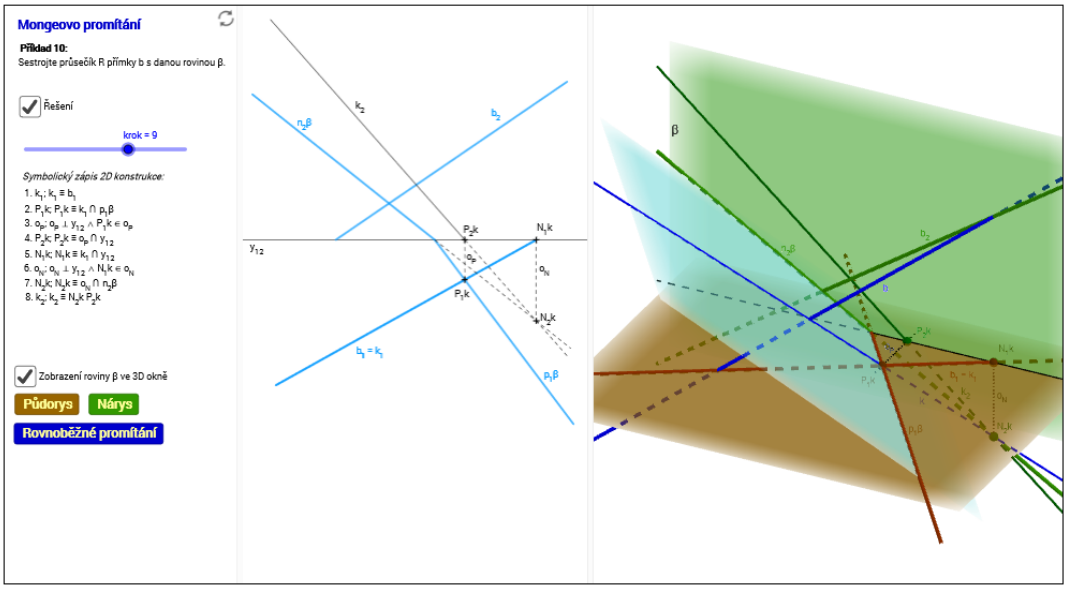
„Řešení“ se v témže okně objeví posuvník a také nápis „*Symbolický zápis 2D konstrukce*“. Pohybováním posuvníku krok po kroku se v levém okně postupně objevují jednotlivé kroky

symbolického zápisu 2D konstrukce Mongeova promítání. V tutéž chvíli se v prostředním okně (ve druhé 2D nákresně) appletu vykreslují geometrické objekty, které odpovídají objektům zapsaným v příslušném kroku symbolického zápisu 2D konstrukce. Souběžně s tím se také v pravém okně (ve 3D okně) appletu zobrazují tytéž geometrické objekty, tentokráte ovšem v prostorovém řešení úlohy znázorněném v rovnoběžném promítání.

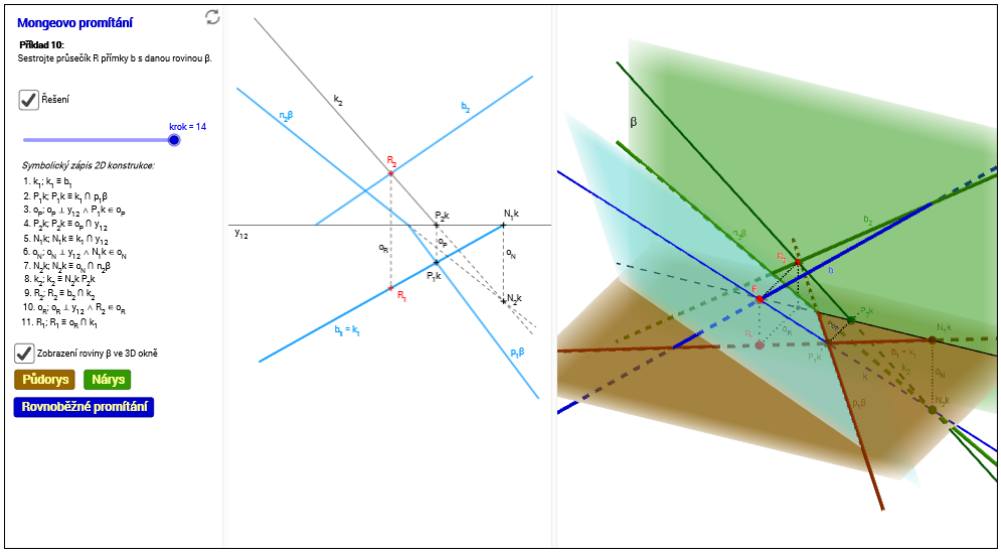
Pro tři náhodně vybrané kroky řešení úlohy *Nalezení průsečíku R přímky b s danou rovinou β* viz obr. 7 – obr. 9.



Obr. 7: Krok 5 řešení úlohy „Nalezení průsečíku R přímky b s danou rovinou β“



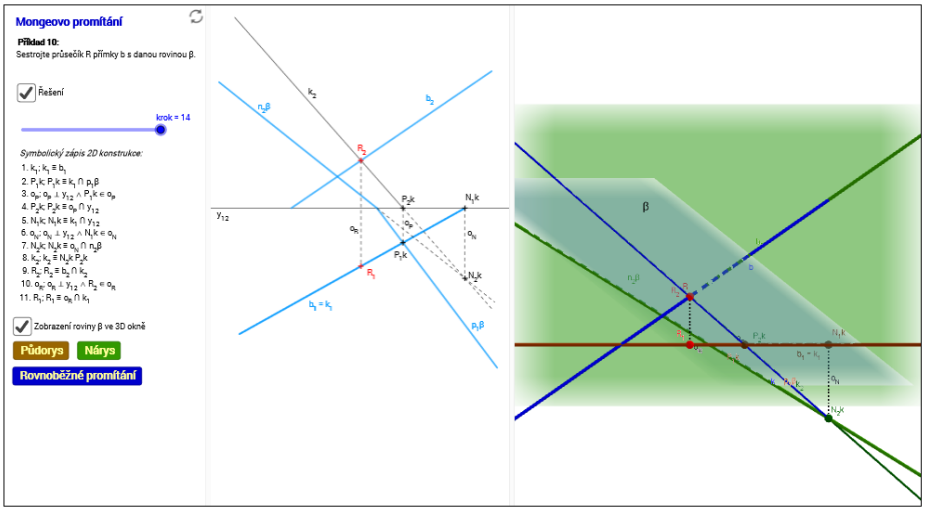
Obr. 8: Krok 8 řešení úlohy „Nalezení průsečíku R přímky b s danou rovinou β“



Obr. 9: Krok 11 (poslední krok) řešení úlohy „Nalezení průsečíku R přímky b s danou rovinou β“

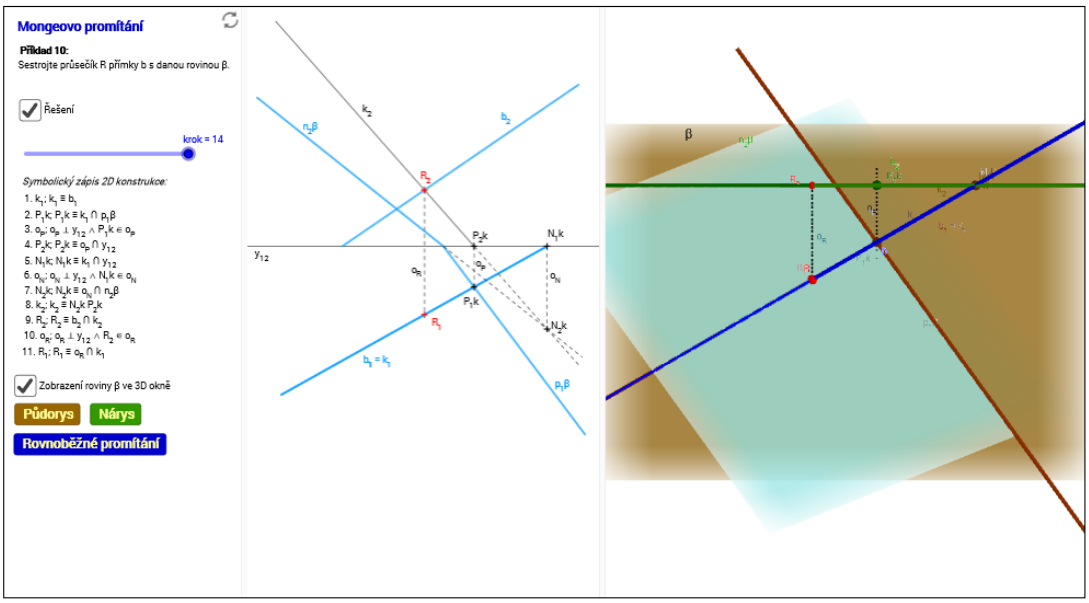
Pod symbolickým zápisem 2D konstrukce je v levém okně appletu vloženo zaškrtávací políčko „*Zobrazení roviny β ve 3D okně*“. Je-li toto zaškrtávací políčko aktivováno, je ve 3D okně rovina *β* znázorněna (např. viz obr. 9). Deaktivujeme-li uvedené zaškrtávací políčko, pak se rovina *β* skryje (viz obr. 5).

Protože Mongeovo promítání je pravoúhlé promítání na dvě na sebe navzájem kolmé průmětny, jsou pro snazší přepínání mezi jednotlivými pohledy ve spodní části levého okna umístěna tlačítka s názvy „*Půdorys*“, „*Nárys*“ a „*Rovnoběžné promítání*“. Kliknutím levého tlačítka myši na tlačítko „*Nárys*“ se prostorová konstrukce ve 3D okně automaticky nastaví na pohled kolmo zepředu, tj. zobrazí se nárys prostorové konstrukce. Viz obr. 10. Studenti si mohou v tomto případě porovnat obrázky konstrukcí v prostředním a v pravém okně appletu, tj. mohou zhodnotit shodu mezi řešením úlohy v Mongeově promítání a mezi prostorovým řešením úlohy ve 3D prostoru.



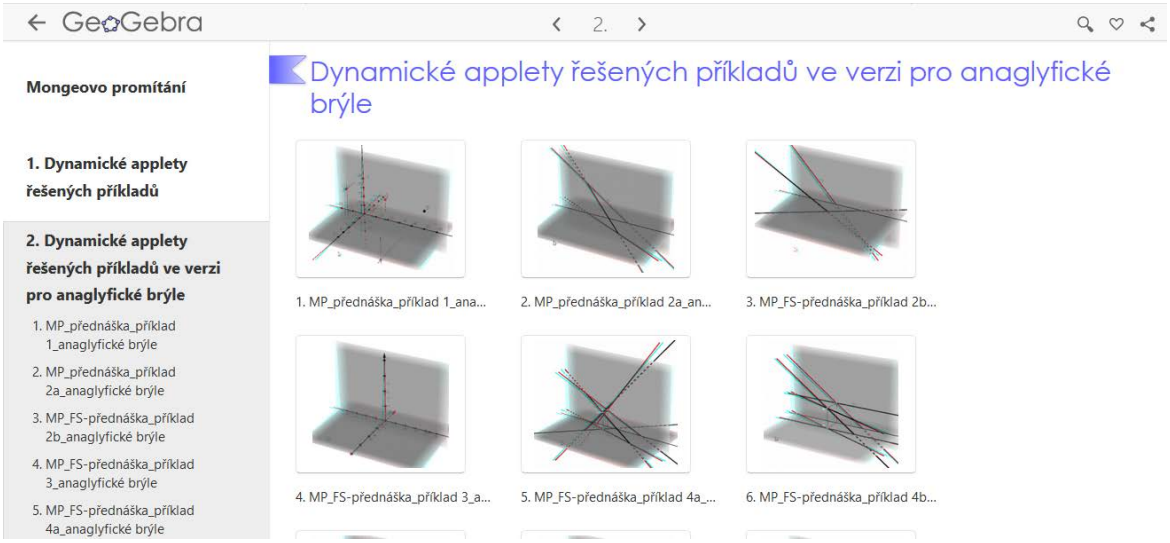
Obr. 10: *Zobrazení nárysu prostorové konstrukce ve 3D okně pomocí přednastaveného tlačítka „Nárys“*

Analogicky aktivováním tlačítka „*Půdorys*“ se prostorová konstrukce ve 3D okně automaticky zobrazí v pohledu kolmo shora, tj. zobrazí se půdorys prostorové konstrukce. Viz obr. 11. Studenti mohou tentokráte porovnat obrázky konstrukcí v prostředním a v pravém okně appletu, tj. mohou zhodnotit shodu mezi řešením úlohy v Mongeově promítání a mezi prostorovým řešením úlohy ve 3D prostoru.



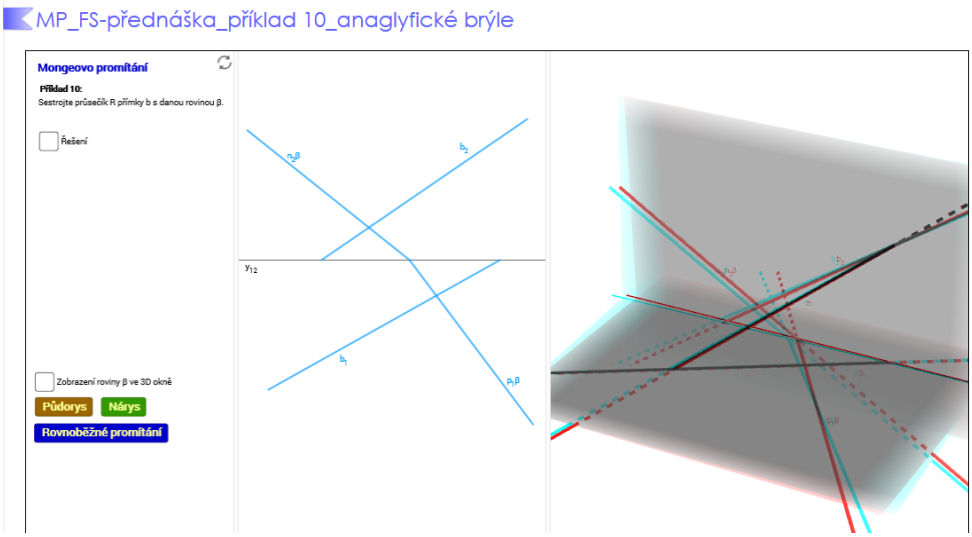
Obr. 11: Zobrazení půdorysu prostorové konstrukce ve 3D okně pomocí přednastaveného tlačítka „Půdorys“

Obsahem druhé kapitoly GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“ jsou tytéž dynamické applety jako applety obsažené v 1. kapitole téže GeoGebra knihy s tím rozdílem, že jsou applety tentokráte vygenerované ve verzi pro anaglyfické brýle. Náhled na několik prvních appletů z druhé kapitoly je uveden na obr. 12.



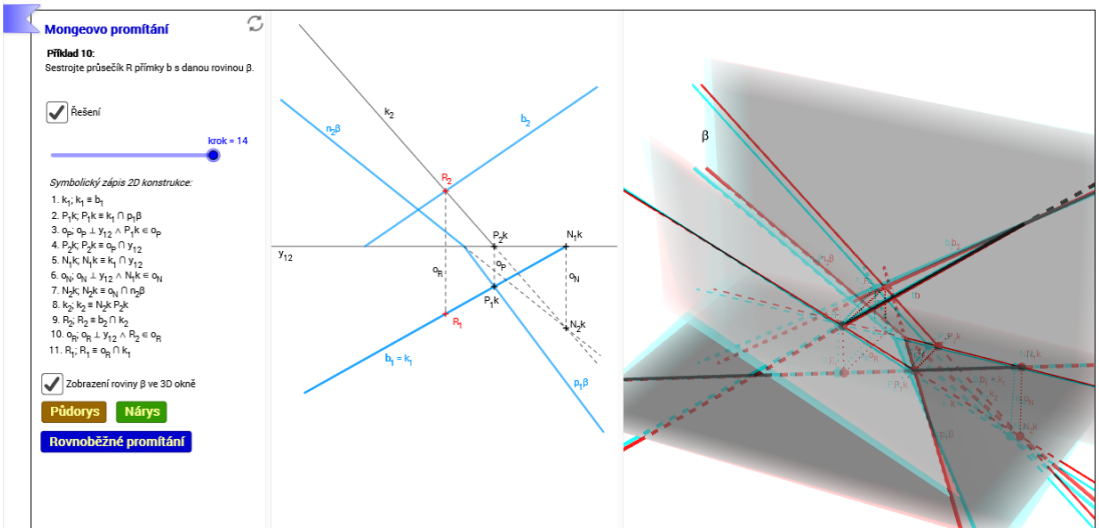
Obr. 12: Náhled na přehled několika prvních appletů 2. kapitoly GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“

Na obr. 13 je zobrazen po otevření tentýž applet, jako byl applet znázorněný na obr. 5. Tentokráte je však prostorová konstrukce ve 3D okně vyobrazena v promítání ve verzi pro anaglyfické brýle.



Obr. 13: Vzhled jednoho z appletů 2. kapitoly GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“ po jeho otevření

Někteří studenti, převážně ti, kteří mají nižší úroveň prostorové představivosti, mají problémy s vhledem do prostorového řešení úlohy ve 3D okně. Pro zlepšení jejich vhledu jim může pomoci možnost otáčet s prostorovým obrázkem ve 3D okně programu a to jen stisknutím pravého tlačítka myši a následným tažením myši v různých směrech. Prostorový obrázek si mohou nastavit tak, jak jim nejlépe vyhovuje vidět danou prostorovou úlohu. Pokud by se chtěli vrátit zpět k původnímu nastavení prostorového obrázku ve 3D okně, mohou stisknout předdefinované tlačítko „*Rovnoběžné promítání*“. Prostorový obrázek se tak automaticky vrátí zpět do původní polohy.



Obr. 14: Zobrazení výsledného řešení úlohy „Nalezení průsečíku R přímky b s danou rovinou β“ ve verzi pro anaglyfické brýle

Další možností lepšího vhledu do prostorové situace je sledování řešení úlohy zobrazené ve verzi pro anaglyfické brýle právě při užití těchto brýlí. Prostorová konstrukce se v tomto případě jeví vskutku prostorově a některým studentům pomáhá s uvědoměním si principů prostorového řešení úlohy.

Závěr

Lze shrnout, že vytvořená GeoGebra kniha „Mongeovo promítání“ obsahující dynamické applety prozatím několika základních úloh a algoritmů Mongeova promítání je vhodným e-learningovým materiálem pro studenty 1. ročníku bakalářského studia na Fakultě strojní Technické univerzity v Liberci. Tuto skutečnost mi potvrdili i samotní studenti při anonymním zjišťování zpětné vazby týkající se užívání zmíněné GeoGebra knihy. Studenti ocenili několik skutečností.

Protože je GeoGebra kniha umístěná na internetu, lze ji otevřít a použít téměř kdekoliv. V dnešní době je totiž spíše výjimkou, že by studenti neměli možnost připojení k internetu. GeoGebra knihu mohout tudíž studenti s výhodou použít např. i během přednášek. Pokud se totiž studenti opozdí a nestihnou nějaký krok konstrukce, která je učitelem rýsovaná na tabuli, mohou v GeoGebra knize vyhledat příslušný applet a pomocí posuvníku si mohou nastavit právě ten krok, který jim při výkladu unikl. Dále pak mohou pokračovat ve sledování výkladu učitele.

Studenti též kladně hodnotili, že mohou využít GeoGebra applety pro lepší orientaci v náročnějších konstrukcích, v nichž už je složitější rozeznat, který objekt se v konstrukci nově objevil. Díky tomu, že jsou jednotlivé kroky symbolického zápisu konstrukce propojeny s odpovídajícími objekty ve druhém 2D okně a ve 3D okně, studenti vědí, který konkrétní objekt mají v konstrukci v daném kroku hledat. Kromě kroků symbolického zápisu lze také s objekty propojit odpovídající slovní komentáře.

Dále studenti mohou applety GeoGebra knihy využít i v případech, kdy si nejsou jisti, jak jsou geometrické objekty v prostoru umístěny, jaké jsou vzájemné vztahy mezi objekty, apod. S prostorovými obrázky ve 3D okně je totiž možné pohybovat pomocí stlačeného pravého tlačítka myši a současného tažení myši. Pomocí předdefinovaného tlačítka je nakonec možné vrátit prostorový obrázek do původně nastavené polohy. Applety GeoGebra knihy nemusí studenti využívat pouze během přednášek, ale také např. při jejich přípravě na testy či na zkoušku. Lepší vhled do prostorových situací umožňují také applety umístěné ve 2. kapitole GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“. Ty jsou vygenerované a do GeoGebra knihy vložené ve verzi pro anaglyfické brýle.

Studenti projevili zájem o vytvoření appletů i pro zbývající řešené úlohy kapitoly Mongeova promítání z elektronických studijních materiálů předmětu Konstruktivní geometrie. Jejich zájem o využívání vytvořených appletů a tedy i GeoGebra knihy „Mongeovo promítání“ mě potěšil a je pro mě motivací k další práci, tj. k sestrojování podobných appletů pro další úlohy Mongeova promítání.

Literatura:

[1] <https://kmd.fp.tul.cz/cs/component/content/article/143-cat-edu-subjects/245-bimova-konstruktivni-geometrie>

[2] <https://www.geogebra.org/m/RQdvjH3V>

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Studentská 1410/1
461 17 Liberec 1
e-mail: daniela.bimova@tul.cz

PŘIPRAVENOST BUDOUCÍCH UČITELŮ PRO POUŽÍVÁNÍ DIGITÁLNÍCH TECHNOLOGIÍ VE VÝUCE MATEMATIKY

Radka Dofková

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

Abstrakt: Cílem příspěvku je analýza připravenosti budoucích učitelů 1. stupně ZŠ pro používání digitálních technologií ve výuce matematiky. V rámci stanoveného cíle byl proveden absolutní sběr dat mezi 95 studenty Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. V rámci výzkumu byl použit dotazník vlastní konstrukce modifikován dle mezinárodního výzkumného nástroje *Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-M).

Klíčová slova: Digitální technologie, matematika, student, učitel.

Elementary prospective teachers preparedness for using digital technologies in mathematics teaching

Abstract: The aim of the paper is analyzing elementary teachers preparedness for using digital technologies in mathematics teaching. There was a research among 95 prospective teachers in lessons of didactics of mathematics. We used the modified questionaries from international surveys *Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-M).

Key words: mathematics, digital technologies, students, teachers.

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/Dofkova.pdf

POČÍTAČOVÁ DEKOMPOZICE POLYNOMU NA SOUČET ČTVERCŮ V HISTORICKÝCH SOUVISLOSTECH

Jan Frank

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, Fakulta pedagogická,
Západočeská univerzita v Plzni

Abstrakt: Jedním ze základních problémů matematiky je dokázat, že jistý polynom ***f*** je pozitivně semidefinitní, tedy že pro všechny reálné hodnoty neurčitých ***x*** nabývá tento polynom pouze nezáporných hodnot. Jednou z metod důkazu je rozložit polynom ***f*** na součet čtverců. Tento způsob důkazu úzce souvisí s tzv. 17. Hilbertovým problémem předneseným na mezinárodním kongresu matematiků v roce 1900. V jednodušších případech (polynomy jedné neurčité) se může jednat i o příklady řešitelné na středních školách, ve složitějších případech (polynomy více neurčitých) se může jednat o úlohy velmi náročné a rozsáhlé, kdy jejich řešení raději přenecháme počítačovému softwaru.

Klíčová slova: pozitivně semidefinitní polynom, rozklad na součet čtverců (SOS), 17. Hilbertův problém, Motzkinův polynom, MATLAB, SOSTOOLS, Wolfram Mathematica

Sum of squares decomposition of polynomial by computer in the context of history

Abstract: One of the basics problems in mathematics is to prove that a certain polynomial ***f*** is a positive semidefinite polynomial it means that for all variable ***x*** from real numbers is polynomial ***f*** nonnegative. One method of proof is sum of squares decomposition. This is related to Hilbert's seventeenth problem from year 1900. In elementary cases (polynomial of one variable) is possible to solve some examples at high school. In more complicated cases (polynomial in two or more variable), it is necessary to use computer technology and special mathematical software.

Key words: positive semidefinite polynomial, sum of squares decomposition (SOS), Hilbert's seventeenth problem, Motzkin polynomial, MATLAB, SOSTOOLS, Wolfram Mathematica

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/Frank.pdf

ŘEŠENÍ ÚLOH Z PRAVDĚPODOBNOSTI V PROGRAMU GEOGEBRA

Šárka Gergelitsová[1], **Roman Hašek**[2]

[1]Gymnázium Benešov, [2]Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Abstrakt: Článek vychází z workshopu programu GeoGebra, který autoři realizovali na konferenci „Užití počítačů ve výuce matematiky“. Přináší především popisy tvorby klíčových prvků appletů určených pro podporu výuky pravděpodobnosti. Na jednom příkladu je pak ilustrováno společné využití algebraického a grafického prostředí programu k názornému řešení jednoho klasického problému z pravděpodobnosti.

Klíčová slova: GeoGebra, pravděpodobnost, applet.

Probability problems in GeoGebra

Abstract: The paper is based on the workshop on the use of GeoGebra that was given by the authors at the 8th conference “The use of computers in mathematics education”. It mainly provides descriptions of the key steps of the creation of GeoGebra applets designed to support the teaching of probability. Through one classical probability problem the joint use of CAS and DGS views of GeoGebra to solve it illustratively is also presented.

Key words: GeoGebra, probability, applet.

Úvod

Článek vychází z workshopu, který byl autory realizován na 8. konferenci Užití počítačů ve výuce matematiky v Českých Budějovicích v listopadu 2017. Zaměřuje se na využití volně dostupného dynamického matematického programu GeoGebra [3], primárně vyvíjeného pro vzdělávací účely, k podpoře výuky pravděpodobnosti. Důraz je při tom kladen na tvorbu originálních appletů, dovolujících vnést do výuky prvek hry, který k pravděpodobnosti bezesporu patří. Podtitulem článku by tak mohlo být heslo „Hrajeme si s pravděpodobností“.

Pro řešení úloh z pravděpodobnosti nabízí GeoGebra jednak unikátní prostředí s názvem *Pravděpodobnostní kalkulačka,* dostupné prostřednictvím volby *Zobrazit* z hlavního menu programu, jednak řadu dalších užitečných příkazů, jejichž kompletní přehled najdeme,

po kliknutí na otazník napravo od vstupního řádku, v seznamu příkazů v části *Pravděpodobnost*. Chceme-li si připravit vlastní applet ilustrující zadání nějaké úlohy z pravděpodobnosti, neobejdeme se v něm bez náhodného vybírání či losování. Proto si jako příklad uveďme příkaz *NahodneMezi(k, l)*, jehož výstupem je náhodné celé číslo z intervalu $\langle k, l \rangle$, kde *k, l* jsou rovněž celá čísla. Všechny tyto příkazy můžeme použít buď okamžitě pro konkrétní výpočty, nebo jako součást appletu určeného pro opakované použití. Prostředí *Pravděpodobnostní kalkulačka* pak představuje grafické rozhraní, jehož prostřednictvím můžeme aplikovat většinu z příkazů, aniž bychom znali jejich syntaxi, a získat k tomu přehledný výstup kombinující číselné hodnoty s tabulkami a grafy. Konkrétně můžeme jeho prostřednictvím bez potřeby předchozí přípravy okamžitě interaktivně sledovat hodnoty pravděpodobností jevů, které podléhají různým typům pravděpodobnostních rozdělení. Z řady zde implementovaných rozdělení využijeme pro výuku především binomické a hypergeometrické rozdělení. V následujících partiích popíšeme vybrané kroky tvorby appletů pro podporu výuky pravděpodobnosti. Příslušné soubory jsou dostupné ke stažení na stránce konference [7].

Vybrané prvky pravděpodobnostních appletů

Náhodná čísla

Ve většině případů realizujeme náhodný výběr ze souvislé podmnožiny množiny celých čísel. Jak již víme, k náhodnému tažení celého čísla použijeme příkaz *NahodneMezi(a, b)*, který náhodně generuje celé číslo *x*; $a \leq x \leq b$. Použijeme-li ho ve tvaru *NahodneMezi(a, b, true)*, bude výsledné číslo „upevněné“, tedy jeho hodnota se nebude generovat opakovaně při přepočítávání objektů v appletu, ale jen při načtení souboru (ale také vždy, když provedeme krok „Zpět“ či „Znovu“). Potřebujeme-li generovat čísla, jejichž výskyt podléhá nějakému rozdělení pravděpodobnosti, najdeme mezi příkazy GeoGebry i tyto možnosti.

Seznam

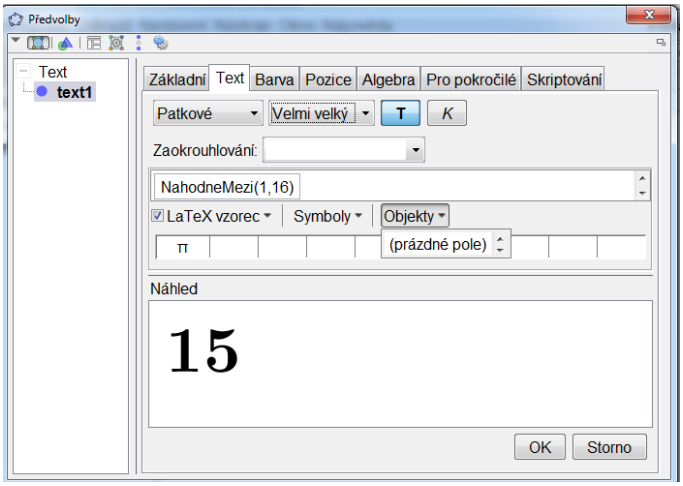
Chceme-li náhodně vybírat něco jiného, než čísla, musíme mít takové objekty z čeho vybírat, potřebujeme tedy nějakou množinu. Konkrétně použijeme objekt typu seznam, tj. uspořádanou množinu objektů. Seznam vzniká jednak jako výsledek některých příkazů, jednak jej lze cíleně vytvořit tak, že požadované objekty zapsané a oddělené čárkou uzavřeme do složených závorek. K vytvoření seznamu můžeme využít také prostředí *Tabulka*, v němž lze do podoby seznamu převést obsah vybraných buněk. Další možností, kterou využijeme k tvorbě seznamu objektů generovaných na základě nějakého algoritmu, je aplikace příkazu *Posloupnost()*.

Náhodný prvek seznamu „vylosujeme“ příkazem *NahodnyPrvek()*. Tento příkaz hledejte v seznamu příkazů v sekci *Seznam*. Chceme-li vyrobit náhodnou permutaci prvků seznamu, využijeme příkaz *Promichat()*, který najdeme rovněž v seznamu příkazů, tentokrát v sekci *Pravděpodobnost*. Chceme-li náhodně „vylosovat“ podmnožinu daného seznamu jako nový seznam, jehož prvky však již nezachovávají vzájemné uspořádání z výchozího seznamu, využijeme příkaz *NahodnyVyber()*.

Zdůrazněme, že uvedené náhodně generované objekty využijeme nejen pro tvorbu appletů zaměřených na pravděpodobnost, ale zejména pro přípravu a generování zadání sad úloh pro různá témata. Zde můžeme využít také příkazy *NahodnyPolynom()* či *NahodnyBodV()*.

Losování

V rámci workshopu jsme viděli applet, v němž jsme losovali čísla [5]. Připravená množina obsahovala čísla 1..16. K tomuto účelu by stačilo použít pouze příkaz *NahodneMezi(1, 16)*, který bychom například zapsali do rámečku vymezeného pro „prázdné pole“ objektu *Text*, viz Obr. 1. V appletu by tak, kromě náležitě velkého textu, nemusel být žádný další objekt, aktualizaci bychom docílili klávesou *F9* nebo kombinací *Ctrl+R*. Takový applet ale oko nepotěší a žáka nezaujme.



Obr.1: Losování čísla v textovém poli

Příprava osudí

Necháme z osudí vyskakovat míčky s čísly. Každý míček s číslem je představován zvláštním obrázkem, který vytvoříme ve vhodném grafickém editoru. Po vložení do appletu jednotlivé obrázky míčků spojíme s předem sestrojenými body tak, že v jejich *Vlastnostech* na kartě *Pozice* zvolíme *Centrovat* (*Center Image*) vůči příslušnému bodu. Ještě ale zbývá vyřešit definici a pohyb těchto bodů (v našem případě jich je 16). Každý z nich necháme pohybovat po nějaké dráze. Dráhy vytvoříme nakreslením pomocí nástroje *Pero*, tak, aby vytvořily iluzi odrazu a dopadu vystřeleného míčku v kruhovém osudí. Označíme je *tah1*, *tah2*,… Přitom jeden z těchto tahů vede ven z osudí. Je zcela jedno, který to je. V našem appletu je to *tah7*.

Animace

Kdybychom teď zadáním příkazů *P1 = Bod(tah1)*, *P2 = Bod(tah1)*,… zvolili body na těchto drahách, po spuštění animace by se pohybovaly spolu s přiřazenými obrázky míčků po stále stejných drahách. Abychom toto jejich nereálné chování napravili, uzavřeme tahy do seznamu se jménem *cesty*. Tak dojde k tomu, že na *tah1* se bude možno odkazovat příkazem *Prvek(cesty, 1)*, na *tah2* příkazem *Prvek(cesty, 2)* atd. Čtenáře teď možná napadlo, že příkaz *Promichat(cesty)* zařídí potřebné. Bohužel, ne tak docela. Přeskupení objektů v poli *cesty* je časově náročná operace, takže se může stát, že se seznam nestihne včas aktualizovat, a tak nám některé body poběží po nových, některé po starých drahách.

Obr. 2: Losovátko

Promíchání bodů na drahách

Takže ještě jeden trik: Bod *P1* nepoběží po 1. dráze seznamu cest, *P2* po 2. dráze seznamu cest, ale tyto indexy promícháme. Nebudeme proto promíchávat seznam *cesty*, ale seznam *cisla*, který do něj ukazuje a který se promíchává mnohem rychleji. Definujeme ho jako *cisla = Posloupnost(16).*

A abychom měli lepší kontrolu nad pohybem bodů po drahách, využijeme druhý parametr *„Parametr“* u příkazu *Bod(Objekt, Parametr)*, který říká, v jakém zlomku celé cesty se bod nachází. Potom, například, příkaz *P1 = Bod(Prvek(cesty, Prvek(cisla, 1)), a)* znamená, že bod *P1* je bod toho tahu seznamu *cesty*, jehož index je 1. prvek seznamu *cisla.* A tento seznam budeme promíchávat, takže onen index se bude měnit. Proměnná *a* přísluší posuvníku, jehož hodnoty se mění od čísla blízkého nule k jedné (při nulové hodnotě by bod mohl získat hodnotu „nedefinovaný“). Popsaný režim náhodného přiřazení cesty bodu ilustrujme následujícím příkladem: Jestliže má pole *cisla* aktuální hodnotu {15, 10, 13, 6, 14, 2, 3, 9, 4, 7, 11, 8, 12, 1, 16, 5}, pak se bod *P1* pohybuje po dráze *tah15*, bod *P2* po dráze *tah10* atd.

Spuštění losování

Promíchání a spuštění pohybu zařídíme příkazem, který se vykoná po stisku tlačítka. Příslušný GeoGebra Skript využívá skriptovací příkaz *NastavitHodnotu(Objekt, Objekt)*, kterým můžeme nastavit okamžitou hodnotu volné proměnné (objektu) na hodnotu, kterou má v tom okamžiku jiná proměnná (nebo výraz, nápověda parametrů příkazu v tomto trochu mate). Celý skript je tvořen následujícími příkazy:

NastavitHodnotu(cisla, Promichat(cisla))
NastavitHodnotu(a, 0.05)
StartAnimace(a, true).

Losované číslo je…

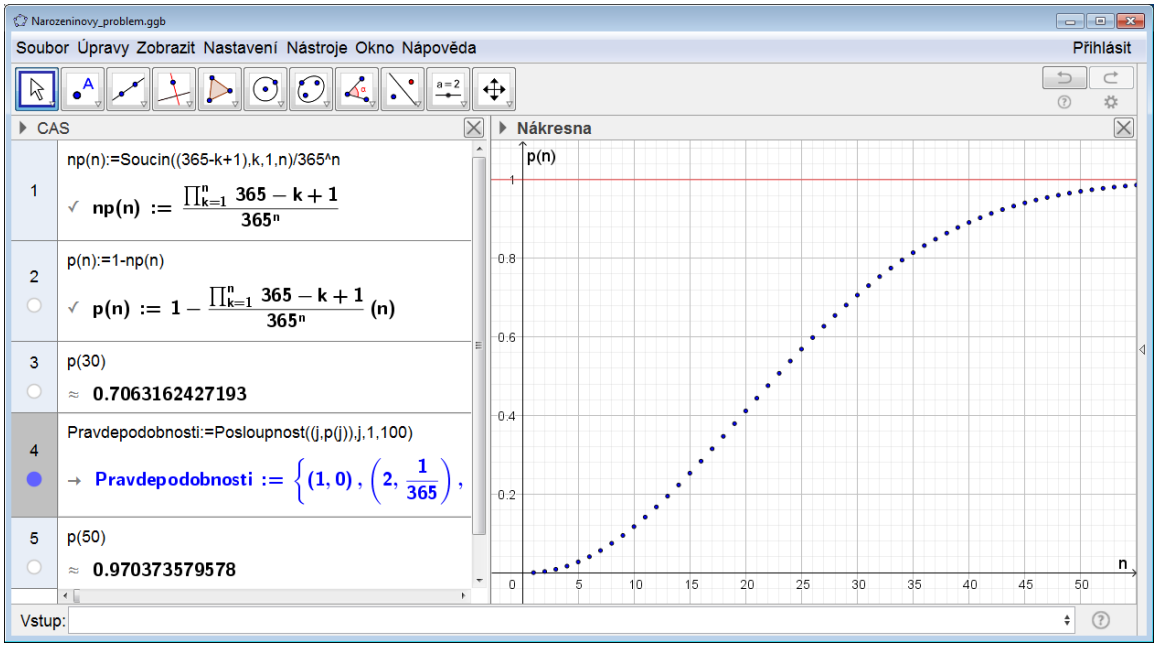
Losované číslo sice vidíme na příslušném míčku, ale je to jenom obrázek. Kdybychom chtěli získat toto číslo jako hodnotu, třeba ho zapsat do seznamu tažených čísel, odkud ho zjistíme? Je to číslo bodu, který se pro dané losování pohyboval po dráze „ven“ (to je *tah7*). To je ten

index, na kterém je v tom okamžiku v poli *cisla* hodnota 7. Hodnota taženého čísla je proto výstupem příkazu *IndexPrvku(7, cisla)*.

Narozeninový problém

Pojďme se nyní podívat na řešení klasického „Narozeninového problému“ v programu GeoGebra, na kterém si budeme ilustrovat výhody propojení prostředí pro algebraické výpočty *CAS* s grafickým prostředím *Nákresna*. Přestože nepoužijeme žádný speciální příkaz pro počet pravděpodobnosti, poskytne nám společné použití těchto prostředí dva vzájemně se doplňující úhly pohledu na řešení dané úlohy, symbolickou reprezentaci s numerickým řešením v prostředí *CAS* a grafické znázornění v *Nákresně*.

Narozeninový problém [1, 2]: Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině n lidí, například ve školní třídě s n = 30 žáky, najdeme alespoň dvě osoby, které mají stejný den a měsíc narození? Podstata řešení úlohy není nijak komplikovaná, použijeme klasickou definici pravděpodobnosti, doplněnou základními znalostmi kombinatoriky. Z tohoto hlediska se jedná o pěknou úlohu na aplikaci středoškolského učiva pravděpodobnosti, detailní rozbor jejího řešení viz [1, 2]. Problémem je, na rozdíl od tradičních úloh na vybírání z osudí, její výpočetní náročnost. Naštěstí zde jako ideální prostředek pro překonání této obtíže a dosažení konečného výsledku poslouží počítač. Navíc nám poskytne i vizuální informaci o zkoumaném jevu. Pravděpodobnost jevu popsaného zadáním označíme $p(n)$. Z důvodu snazší matematické reprezentace budeme ale pracovat s jevem doplňkovým $np(n) = 1 - p(n)$, tj. s pravděpodobností, že z uvažované skupiny n lidí nemají žádní dva narozeniny ve stejný den. Hledanou pravděpodobnost $p(n)$ potom určíme ze vztahu $p(n) = 1 - np(n)$. Postup řešení v prostředí CAS je zaznamenán na Obr. 3.



Obr. 3: Řešení narozeninového problému v prostředích *CAS* a *Nákresna* programu GeoGebra

Vidíme, že pro 30 osob je pravděpodobnost sledovaného jevu téměř 72 %, pro 50 osob pak dokonce 97 %. Zobrazíme-li závislost $p(n)$ na n v *Nákresně*, ukáže se, jak poměrně strmě hodnoty $p(n)$ s rostoucím n narůstají. Díky tomuto vývoji se problém někdy zmiňuje také jako „Narozeninový paradox“. O žádný paradox se však nejedná. Pouze je třeba mít na paměti, že posuzování shody narozenin dvou lidí je

analogické vytváření dvojic. Potom je zřejmé, že čím více je osob ve skupině, o to větší přírůstek počtu možných dvojic přinese přidání jedné osoby do této skupiny.

Grafické nástroje programu GeoGebra kombinované s jeho ostatními funkcemi přímo vybízejí k použití při názorném řešení problémů užitím geometrické pravděpodobnosti, viz například applet [6] pro simulaci úlohy známé jako „Buffonova jehla“.

Závěr

Pro další studium možností využití GeoGebry lze doporučit stránku https://www.geogebra.org/materials, kde se po zadání hesla „probability“ do vyhledávacího pole zobrazí rozsáhlý přehled volně dostupných materiálů. Zájemci o ucelený text věnující se základům práce s GeoGebrou i řešení vybraných úloh v tomto programu lze doporučit starší text [4], byť s tou výhradou, že možnosti GeoGebry již značně pokročily.

Literatura:

[1] Birthday problem [online]. *Wikipedia: The FreeEncyclopedia* [10. prosinec 2017]. Dostupné na http://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem

[2] Narozeninový problém [online]. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [10. prosince 2017]. Dostupné na https://cs.wikipedia.org/wiki/Narozeninov%C3%BD_probl%C3%A9m

[3] *GeoGebra – Dynamická matematika pro studium a výuku* [online]. [10. prosinec 2017]. Dostupné na https://www.geogebra.org

[4] Gergelitsová, Š. *Počítač ve výuce nejen geometrie – průvodce Geogebrou*. Generation Europe, Praha, 2011.

[5] Gergelitsová, Š. Losování z osudí [online]. GeoGebra applet [10. prosinec 2017]. Dostupné na https://www.geogebra.org/m/ppdSHQtG

[6] Hašek, R. Buffonova jehla [online]. GeoGebra applet [10. prosinec 2017]. Dostupné na https://www.geogebra.org/m/vnAZxxzN

[7] Workshopy [online]. *8. konference Užití počítačů ve výuce matematiky, www stránka* [10. prosinec 2017]. Dostupné na http://home.pf.jcu.cz/~upvm/2017/index.php/workshopy

Šárka Gergelitsová
Gymnázium
Husova 470
256 01 Benešov
e-mail: sarka@gbn.cz

Roman Hašek
Jihočeská univerzita v Č. B.
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: hasek@pf.jcu.cz

POLLARDŮV ρ – ALGORITMUS PRO FAKTORIZACI PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Jaroslav Hora

KMT FPE ZČU Plzeň

Abstrakt: S rozvojem moderních šifrovacích metod jde ruku v ruce i zvýšený zájem o moderní algoritmy pro hledání rozkladu složeného čísla v součin prvočísel. Faktorizační metoda, navržená J. M. Pollardem v r. 1975, byla svého času nejlepším známým algoritmem pro rozklad složených přirozených čísel. Jde o metodu využívající pravděpodobnost a lze ji vysvětlit i studentům středních škol.

Klíčová slova: Faktorizace přirozených čísel, metoda opakovaného dělení, narozeninový paradox, Pollardův ρ – algoritmus.

Pollard's Rho Algorithm for Prime Factorization of Natural Numbers

Abstract: With the development of modern cryptographic methods, there is an increased interest in modern algorithms for finding decomposition of a composite number in the product of prime numbers. The method of factorization, designed by J. M. Pollard in 1975, was around 1980 the best known algorithm for factorization of composite natural numbers. This is a probability method and can be explained to secondary school students.

Key words: Natural numbers factorization, trial division method, birtday paradox, Pollard's ρ – algorithm.

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/Hora_2.pdf

MOŽNOSTI VYUŽITIA WEBOVEJ APLIKÁCIE VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

Mgr. Ladislav Jaruska, Phd. – Mgr. Anita Tóth-Bakos, PhD.

Univerzita J. Selyeho, Komárno

Abstrakt: Moderné, inovatívne vyučovanie vyžaduje od učiteľa okrem odbornej znalosti vo svojej špecializácii a v pedagogicko-didaktickej oblasti aj aplikáciu nových foriem a metód vyučovania, teda aj aktívny a kreatívny prístup k vytvoreniu učebného prostredia s podporou on-line aplikácií a digitálnych technológií. V článku sa budeme venovať využitiu vybranej webovej aplikácie, ktorá ponúka pedagógom nové možnosti výkladu teórie a študentom nástroj na budovania kognitívnych spojení. Ukážeme niektoré možnosti vytvorenia ukážkových modelov učebných on-line aktivít.

Klíčová slova: matematika, webová aplikácia, on-line aktivity

Possibilities of using a web-based application in teaching mathematics

Abstract: Modern, innovative teaching requires the teacher, in addition to expertise in his specialization and pedagogical-didactic field, to apply new forms and methods of teaching, including an active and creative approach to creating a learning environment with the support of on-line applications and digital technologies. In the article, we will focus on the use of a web-based application that offers the teacher new theoretical interpretation options and the student's tool for building cognitive connections. We will show some possibilities for creating sample models of learning online activities.

Key words: mathematics, web-based application, on-line activity

Úvod

Je všeobecne potvrdené, že kvalitu a efektívnosť vyučovania matematiky okrem iných faktorov významne ovplyvňuje použitie vyučovacích prostriedkov a pomôcok informačnej technológie. Moderné, inovatívne vyučovanie vyžaduje od učiteľa okrem odbornej znalosti vo svojej špecializácii a v pedagogicko-didaktickej oblasti aj aplikáciu nových foriem a metód vyučovania, teda aj aktívny a kreatívny prístup k vytvoreniu učebného prostredia s podporou on-line aplikácií a digitálnych technológií. V článku sa budeme venovať využitiu vybranej webovej aplikácie, ktorá ponúka pedagógom nové možnosti výkladu teórie a študentom nástroj na budovania kognitívnych spojení. Ukážeme niektoré možnosti vytvorenia ukážkových modelov učebných on-line aktivít, ktoré sú didakticky spracované prostredníctvom vybranej webovej aplikácie.

Webové aplikácie vo vyučovaní

Rozvoj IKT v poslednej dobe má značný vplyv aj na výchovnovzdelávací proces. Fyzický priestor vzdelávacieho procesu sa dopĺňa interaktívnym svetom digitálneho prostredia, ktorý ponúka atraktívne, flexibilné, kreatívne a efektívne ihrisko tak pre učiaceho sa ako aj pre učiteľa. Moderné, inovatívne vyučovanie vyžaduje od učiteľa okrem odbornej znalosti vo svojej špecializácii a v pedagogicko-didaktickej oblasti aj aplikáciu nových foriem a metód vyučovania, teda aj aktívny a kreatívny prístup k vytvoreniu učebného prostredia s podporou on-line aplikácií a digitálnych technológií. Dôležitý cieľom premeny vyučovania sú rozvíjanie kreatívneho myslenia a zručnosti riešenia problémov žiakov a ich príprava na riešenie náročnejších úloh využitím moderných technológií.

Vďaka technologickému pokroku, ako je väčšia šírka pásma internetu, širšie internetové pokrytie a rastúci počet samostatných a internetovo orientovaných vzdelávacích programov, sa od učiteľov očakáva, že budú môcť využívať technológiu dostupnú v školách na zlepšenie výučby a zapájanie študentov do vzdelávania.

Avšak IKT pedagogika vo všeobecnosti a predovšetkým možnosti webovej pedagogiky zostávajú v školách veľmi nevyužité [1],[2]. Je pravdepodobné, že stále existuje to, čo Trend, Davis a Loveless [16], nazývajú "medzerou reality a rétoriky", pokiaľ ide o efektívnu integráciu IKT a webovej pedagogiky do matematických učebných situácií. Rétorika spočíva v tom, že digitálna technológia má potenciál zmeniť spôsob výučby, ale skutočnosť, že učitelia stále zápasia s tým, ako najlepšie urobiť. Početné štúdie, ktoré sa uskutočnili s cieľom určiť spôsoby využitia IKT v triede, ukázali, že IKT sa zriedkavo používajú novými spôsobmi, ale ukazujú charakteristiky tradičných prístupov k učeniu [13] alebo dopĺňajú existujúce praktiky v triede [6].

Učitelia matematiky potrebujú odborný rozvoj na zmysluplnú integráciu technológií tak, aby mohli prispieť k výučbe a štúdiu matematiky [3], [5], [7]. Programy profesionálneho rozvoja musia obsahovať modelovanie plánovania a pedagogiky s technológiou výučby špecifických matematických tém [3], [9]. Výskum zistil, že napriek presvedčeniu učiteľov o

tom, že môžu začleniť technológiu do svojej budúcej výučby matematiky a posunúť sa od myslenia na technológiu ako posilňujúci nástroj k rozvoju porozumenia, zostávajú skeptickí, pokiaľ ide o vhodnosť používania technológií pri vývoji matematických pojmov [12]. Ako najlepšie podporovať učiteľov v ich úsilí o zmysluplnú a bezproblémovú integráciu technológie transformačného učenia sa javí ako naďalej naliehavá otázka.

Pri snahe pochopiť, ako sa IKT, on-line vyučovanie a webové aplikácie môžu lepšie integrovať do vzdelávania, bolo navrhnutých niekoľko možností, napr. [10], [17], [4], [11], [18], [5].

Projekt „*Web-Based aplikácie v transdisciplinárnom vzdelávaní budúcich učiteľov*“

Posledné desaťročia sa moderné technológie, ako sú smartfóny, tablety a notebooky, ako aj on-line aplikácie a nástroje, stali neoddeliteľnou súčasťou života väčšiny učiteľov a študentov na celom svete. Tieto zariadenia zmenili spôsob komunikácie, vyhľadávania informácií a práce. Pre pedagógov na našej univerzite bolo výzvou preskúmať, ako sa moderné technológie a webové aplikácie môžu používať na podporu vzdelávania [14], [15]. Hľadanie odpovedí na výzvy novej doby sa realizuje v rámci projektu „*Web-Based aplikácie v transdisciplinárnom vzdelávaní budúcich učiteľov*“.

Ohniskom a prvoradým prostriedkom projektu sú web-based aplikácie, ktoré sú aplikovateľné do vzdelávacieho procesu. Jedná sa o bezplatné alebo čiastočne aplikácie, teda nemajú žiadne finančné nároky na rozpočty tých škôl, ktoré ich využívajú výlučne na vzdelávacie účely. Plánovaný výskum v projekte sa orientuje na integráciu nových foriem a metód vysokoškolského vzdelávania prostredníctvom webových aplikácií.

Hlavné ciele projektu:

- poukázať na možnosti web-based aplikácií v transdisciplinárnom vysokoškolskom vzdelávaní,
- poskytnúť vysokoškolským učiteľom ako aj našim študentom, budúcich učiteľom súbor existujúcich webových freeware aplikácií integrovateľných do vzdelávania a ich didaktické spracovanie do modelov učebných aktivít,
- inovovať vzdelávacie formy a metódy prípravy budúcich učiteľov na UJS prostredníctvom webových aplikácií,
- podporiť ich orientácie v rýchlo sa rozvíjajúcom sa svete informačnej spoločnosti a uľahčiť proces integrovať sa do komunity on-line sveta.
- poskytnúť modely učebných aktivít s webovými aplikáciami a interaktívnych on-line učebných aktivít integrovateľné do vysokoškolského vzdelávania prípravy budúcich učiteľov,
- tvorba užívateľských manuálov v maďarskom resp. slovenskom jazyk a návrh a vytvorenie súbor ukážkových modelov učebných on-line aktivít didakticky spracovaných prostredníctvom vybraných webových aplikácií.

Možnosti webovej aplikácie GoConqr

Po hodnotení viacerých webových aplikácií podľa rôznych kritérií sme sa rozhodli v oblastiach matematiky používať webovú aplikáciu GoConqr.

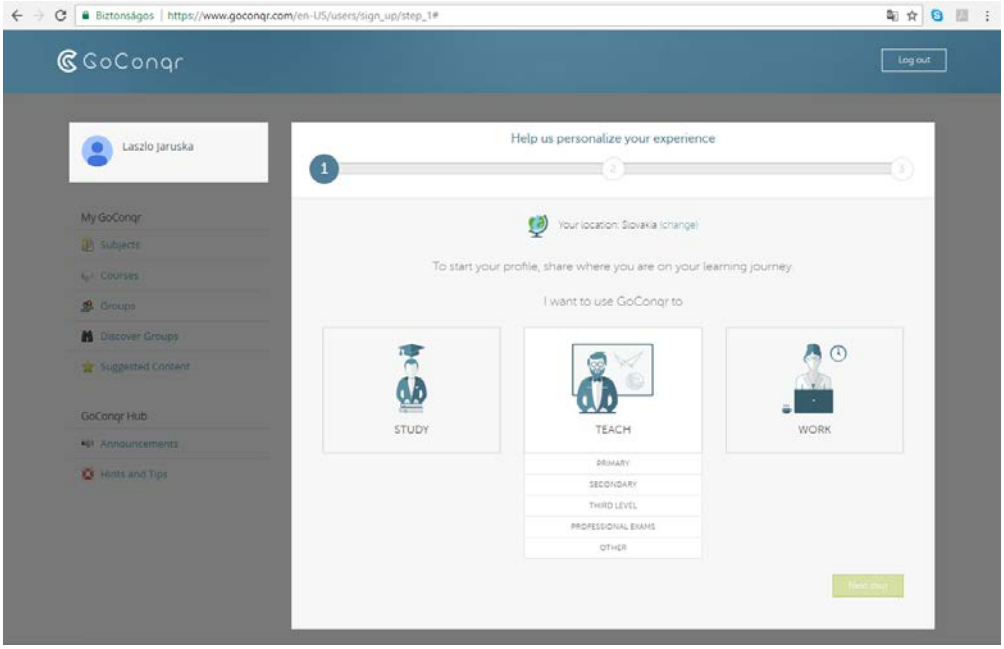
GoConqr je sociálna vzdelávacia sieť, ktorá poskytuje používateľom nástroje na objavovanie, vytváranie a zdieľanie vzdelávacieho obsahu. Funkcie a aplikácie platformy sú navrhnuté tak, aby vyhovovali všetkým typom špecifických potrieb používateľov, či už ide o študenta, pedagóga, inštitúciu alebo spoločnosť. Webová aplikácia GoConqr umožňuje pedagógom a študentom prístup ku komplexnej knižnici zdrojov vytvorených používateľmi na širokú škálu tém. Používatelia aplikácie sa môžu zapojiť do študijných skupín, tým podporuje štúdium pomocou sociálnej siete. GoConqr umožňuje pedagógom vytvárať študijné materiály bohaté na médiá, ktoré pomáhajú zobrazovať staré informácie novými dynamickými spôsobmi. Kombináciou rôznych materiálov a zdrojov pedagóg má možnosť na použitie série techník, aby sa tým dostal bližšie k študentom a vzbudil ich záujem o vybranú tému.

V ďalšej časti príspevku predstavíme webovú aplikáciu Goconqr, ako prostriedok na poskytnutie modelov učebných aktivít s webovými aplikáciami a interaktívnych on-line učebných aktivít integrovateľné do vysokoškolského vzdelávania prípravy budúcich učiteľov. Po zapísaní adresy https://www.goconqr.com do adresného riadka prehliadača sa otvorí hlavná stránka aplikácie, kde je potrebná registrácia. Registrovať sa dá ako študent (Learners), učiteľ (Educators), inštitúcia (Institutions) alebo ako spoločnosť (Companies).

V našom prípade prezentujeme možnosti využitia aplikácie pre učiteľov (Educators)

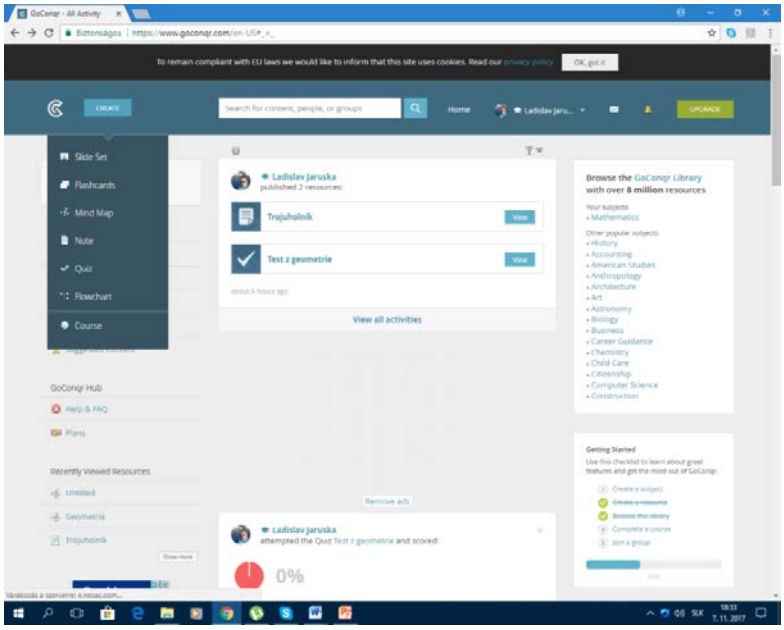
Po prihlásení z ponúkaných možností vyberáme Učiteľa (TEACH) (Obr. 1), kde v rozbaľovacom menu z ponúkaných možností vyberáme príslušnú úroveň školy.

V ďalšom kroku zvolíme predmet / predmety, ktoré vyučujeme.



Obr. 1 – Vytvorenie učiteľského profilu

Kliknutím na položku CREATE v hlavnej menu môžeme vytvoriť rôzne typy učebných materiálov, ktoré neskôr môžeme editovať podľa vlastnej potreby.(Obr. 2)

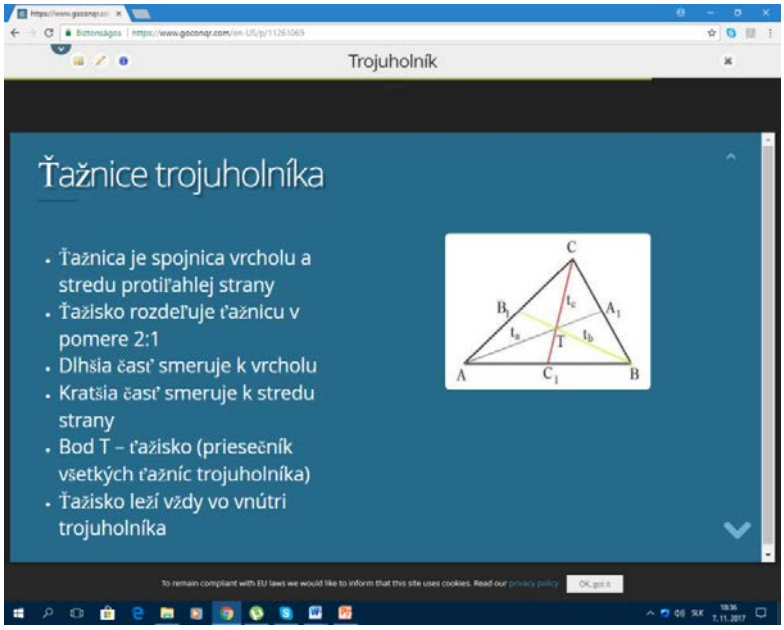


Obr. 2 – Vytvorenie materiálov

V rozbaľovacom menu máme možnosť vybrať z nasledovných: Prezentácia (Slide Set), Kartičky (Flaschcards), Myšlienková mapa (Mind Map), Poznámky (Note), Kvíz (Quiz), Vývojový diagram (Flowchart), Kurz (Course).

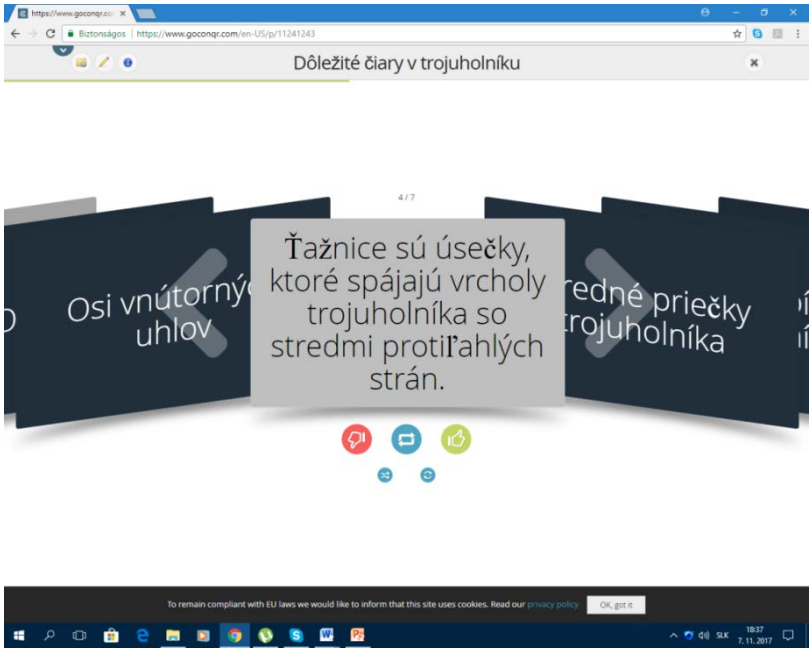
Pomocou učebných materiálov pedagóg môže potom vytvoriť vlastné kurzy (Course), napríklad prezentáciou uviesť nové učivo, kartičkami zabezpečiť precvičovanie pojmov, myšlienkovou mapou alebo vývojovým diagramom podporovať pochopenie podstatu učiva, a otestovať vedomosti pomocou testu. Pre všetky typy učebných materiálov sa dajú vložiť navzájom do ľubovoľného materiálu, aj s odkazom na novšie.

Kliknutím na funkciu Prezentácia (Slide Set) máme možnosť na vytváranie a editovanie prezentácií.(Obr. 3)



Obr. 3 – Prezentácia (Slide Set)

Kliknutím na funkciu Kartičky (Flaschcards) máme možnosť na vytváranie a editovanie kartičiek.

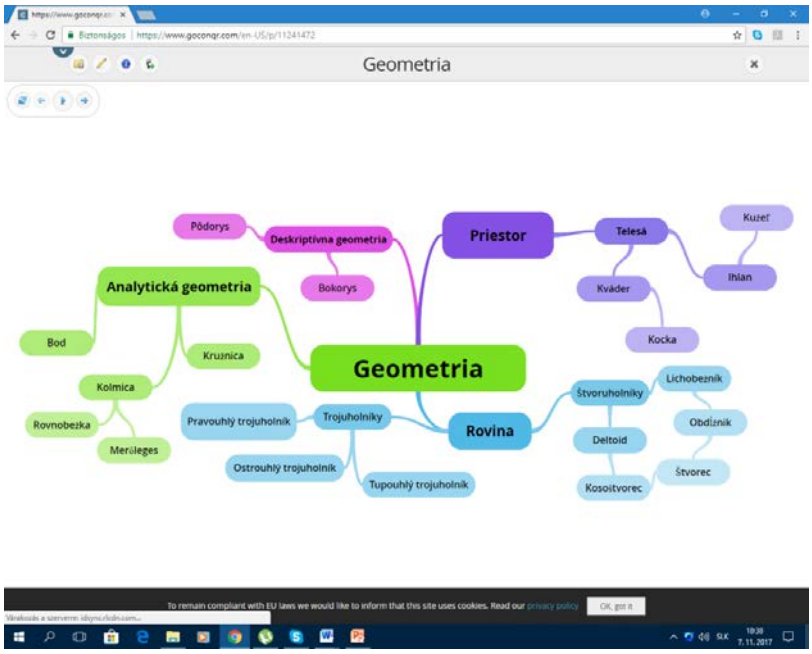


Obr. 4 – Kartičky (Flaschcards)

Prednú aj zadnú stranu kartičiek môžeme upraviť zvlášť – výplň pozadia, vzor pozadia, písmo, farba písma, rozloženie. (Obr. 4)

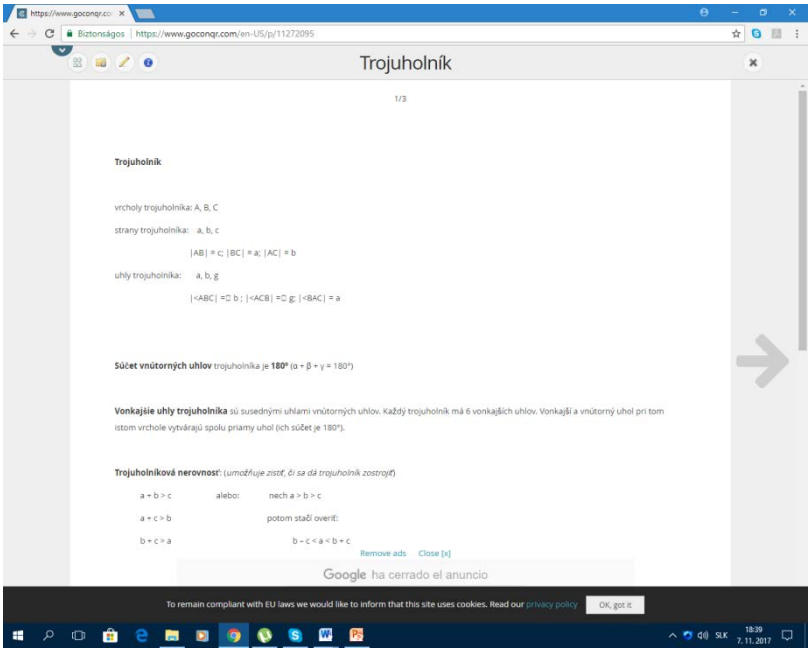
Kliknutím na funkciu Myšlienková mapa (Mind Map) máme možnosť na vytváranie a editovanie myšlienkovej mapy. Chytením a pohybom znaku + vieme vytvoriť nové

pojmy/bublinky. Ku každému pojmu môžeme pripnúť ďalšie nástroje alebo krátke poznámky. (Obr. 5)



Obr. 5 – Myšlienková mapa (Mind Map)

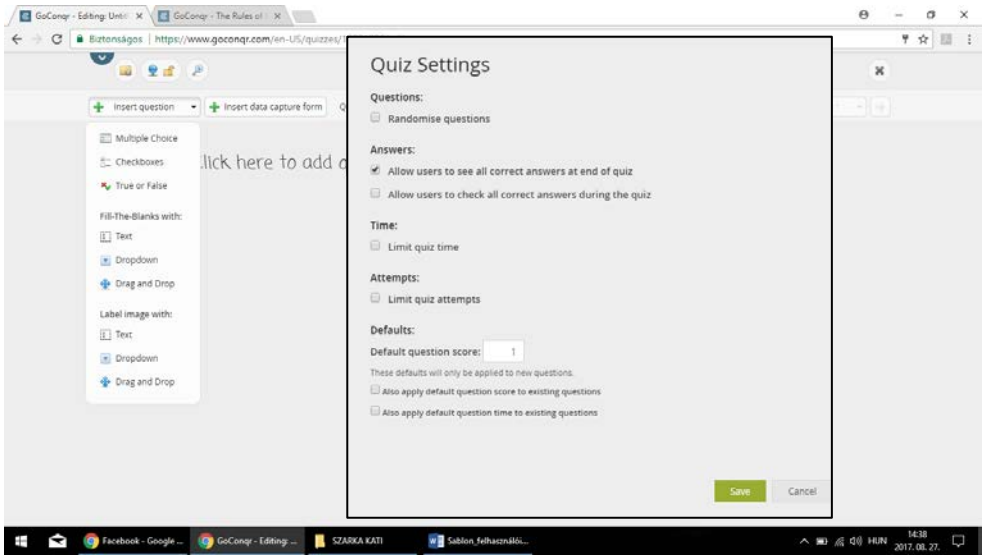
Kliknutím na funkciu Poznámky (Note) máme možnosť na vytváranie a editovanie poznámok. (Obr. 6)



Obr. 6 – Poznámky (Note)

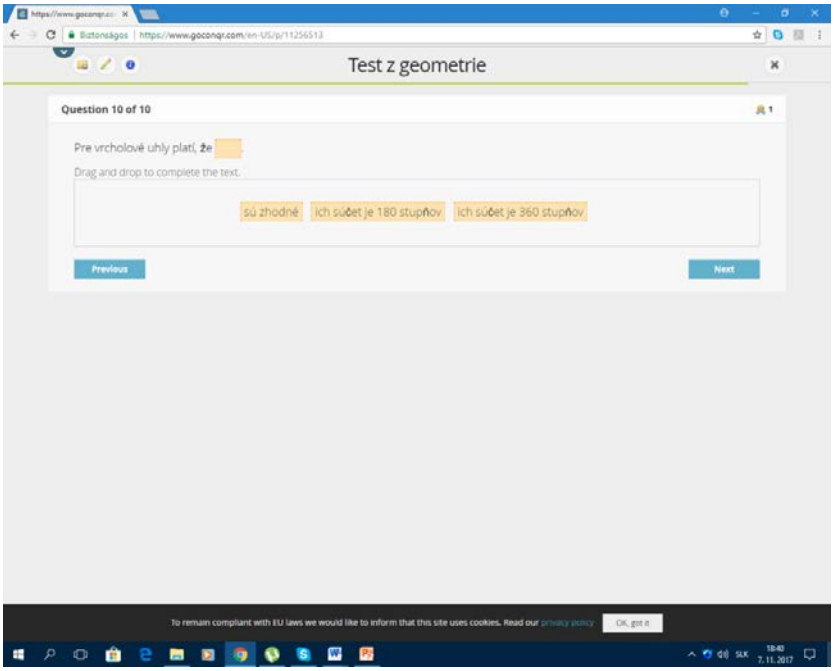
Kliknutím na funkciu Kvíz (Quiz) máme možnosť na vytváranie a editovanie kvízov. (Obr. 7)

Kliknutím na položku Vložiť otázku (Insert Question) sa objaví rozbaľovacie menu, kde môžeme vybrať typ otázky kliknutím na daný typ.



Obr. 7 – Kvíz (Quiz)

Kliknutím na tlačidlo Nastavenia kvízu (Quiz Settings) môžeme spravovať otázky v rozbaľovacom menu - náhodné poradie otázok, zobrazovanie správnych odpovedí, časový limit, počet pokusov, bodovanie.



Obr. 8 – Kvíz (Quiz)

Jednou z veľkých predností hry Goconqr sú možnosti kvízu. Pri obvyklých voľbách pri vytváraní testov s jedným alebo viacerými možnosťami výberu odpovedí, začiarkovacími políčkami alebo úlohami typu správne-nesprávne, je možné vytvoriť otázky typy vyplnenie prázdnych políčok (Fill-The-Blanks) alebo nápis na obrázku (Label image with), pričom posledné dva s textom (Text) alebo s rozbaľovacím menu (Dropdown) a chyť a posuň (Drag and Drop) (Obr. 8). Ďalšou silnou stránkou rozhrania aplikácie je, že tu môžu byť odpovede aj obrázky, to znamená, že môžeme priradiť obrázky k vyhláseniu a pojmu, a z tých potom si vybrať správne.

Materiály vytvorené v Goconqr sú nielen odkazovateľné, ale pomocou embed funkcie môžu byť vložené do webových stránok, napríklad do Google site. Aplikácia ponúka tiež zdieľanie materiálov a aktivít na rôznych sociálnych sieťach. Ďalším prínosom aplikácie je, že sa dá používať aj na smartfónoch (Android + Chrome), aktivity a materiály fungujú dobre, takže okrem domáceho použitia môžu byť vhodné aj vyučovacích hodinách.

Záver

Technologický pokrok môže výrazne prispieť k zlepšeniu a rozšíreniu používania webových aplikácií a internetového učenia, pretože IKT zariadenia sa stávajú ľahšími, lacnejšími, s lepšou analýzou obrazovky, dlhšou životnosťou batérie a rýchlejšou rýchlosťou siete. Aplikovaním moderných technológií a webových aplikácií môžeme priblížiť pedagogicko - didaktické záujmy budúcich učiteľov k záujmom mladej generácie ako aj nájsť spoločnú platformu nového učebného prostredia prostredníctvom web-based aplikácií.

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou projektu KEGA 002UJS-4/2016 „*Web-Based aplikácie v transdisciplinárnom vzdelávaní budúcich učiteľov*“.

Literatura:

[1] Bain, A., & Weston, M. E.: *The learning edge: What technology can do to educate all children*, Teacher College Press, New York, 2012

[2] Baskin, C., & Williams, M.: *ICT integration in schools: Where are we now and what comes next?*, Australasian Journal of Educational Technology, 2006.

[3] Goos, M. & Bennison, A.: *Surveying the technology landscape: Teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms*, Mathematics Education Research Journal, 2008.

[4] Graham, C. R.: *Theoretical considerations for understanding technological pedagogical content knowledge (TPACK)*, Computers & Education, 2011.

[5] Handal, B., Campbell, C., Cavanagh, M., Petocz, P. & Kelly, N.: *Technological pedagogical content knowledge of secondary mathematics teachers*, Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 2013.

[6] Hayes, D.: *ICT and learning: Lessons from Australian classrooms,* Computers & Education, 2007.

[7] Joubert, M.: *Using digital technologies in mathematics teaching: developing an understanding of the landscape using three "grand challenge" themes,* Educational Studies in Mathematics, 2013.

[8] Kiger, D., Herro, D., & Prunty, D.: *Examining the influence of a mobile learning intervention on third grade math achievement,* Journal of Research on Technology in Education, 2012.

[9] Lee, H. & Hollebrands, K.: *Preparing to teach mathematics with technology: An integrated approach to developing technological pedagogical content knowledge,* Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 2008.

[10] Lim, C. P.: *A theoretical framework for the study of ICT in schools: a proposal*. British Journal of Educational Technology, 2002.

[11] Mishra, P. & Koehler, M.: *Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge,* Teachers College Record, 2006.

[12] Ozgun-Koca, S.A.' Meagher,M. & Edwards, M.T.: *Preservice teachers' emerging TPACK in a technology-rich methods class,* The Mathematics Educator, 2010.

[13] Smeets, E.: *Does ICT contribute to powerful learning environments in primary education?*, Computers & Education, 2005.

[14] Szarka, K., Juhász, Gy.: *Webové aplikácie v príprave budúcich učiteľov*. Edukácia. Roč. 2, č. 2 (2017), s. 233-238. ISSN 1339-8725.

[15] Szarka, K., Brestenská, B., Tóth-Bakos, A.: *On-line fejlesztő értékelés a tanárképzés gyakorlatában*. In: Book of selected papers / [11th International Scientific Conference [and] 6th International Methodological Conference [and] 4th ICT in Education Conference, Subotica, University of Novi Sad, 2017, P. 1047-1059. ISBN 978-86-87095-76-2.

[16] Trend, R., Davis, N. & Loveless, A.: *Information and Communications Technology,* Letts Educational, London, 1999.

[17] Twining, P.: *Conceptualising Computer Use in Education: Introducing the Computer Practice Framework (CPF),* British Educational Research Journal, 2002.

[18] Zanchi, C., Presser, A. L., & Vahey, P.: *Next generation preschool math demo: tablet games for preschool classrooms*, In Proceedings of the 12th International Conference on Interaction Design and Children, 2013.

Autori

Mgr. Ladislav Jaruska, PhD.
Univerzita J. Selyeho
Bratislavská cesta 3322, 945 01 Komárno,
jaruskal@selyeuni.sk

Mgr. Anita Tóth-Bakos, PhD.
Univerzita J. Selyeho
Bratislavská cesta 3322, 945 01 Komárno,
tothbakosa@selyeuni.sk

Od logaritmického pravítka k počítači, aneb vývoj výpočetní techniky 20. století.

Bc. Jaroslav Jícha

Přírodovědecká fakulta, ústav matematiky a biomatematiky, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Abstrakt: Na středních školách se stále více setkáváme s naprostou závislostí studentů na kalkulačkách. Studenti tento přístroj již berou jako samozřejmost, a proto je jim dobré připomenout, že dříve se kalkulačky k výpočtům používat nemohly. Ukážeme jim funkci logaritmického pravítka ve srovnání s moderní technologií. A tím i rozšíříme jejich porozumění počítání s logaritmy.

Klíčová slova: logaritmické pravítko, Microsoft Excel, kalkulačka, vývoj, vodorovný vrh, výpočetní technika

From the slide rule to computer, or the development of computing technology in the 20th century

Abstract: In high schools we are confronted with still higher dependence on calculators. Students take this device as a standard and it is therefore good to remind them that the calculators were invented in the last century. We show them the function of a slide rule compared to modern technology. And so we extend their understanding of logarithm.

Keywords: slide rule, Microsoft Excel, calculator, development, horizontal litter, computing technology

1 Úvod

Výpočetní technika prošla s nástupem počítačů dramatickou evolucí. Dnešní děti si pod termínem výpočetní technika představí počítač či chytrý telefon. To ovšem není vše, co se

skrývá pod tímto termínem. Například i velice populární kalkulačka má plné právo na toto označení. Můžeme jít ještě dál a zařadit sem mechanický nástroj, jakým je logaritmické pravítko, což je předchůdce kalkulačky naprosto nezávislý na elektrické energii. Jednoduše řečeno pod termínem výpočetní technika se skrývají všechny nástroje, které se používají k výpočtům. Dnešní studenti jsou zaměřeni na moderními počítače a jejich široké využití, proto je vhodné rozšířit jim rozhled. I jedna vyučovací hodina dokáže zanechat znatelnou stopu. Například kdyby se v matematice po probrání logaritmů zařadila hodina, kde bychom se blíže seznámili s využitím logaritmů v podobě logaritmického pravítka a zároveň se i přiblížily některé funkce kalkulačky. Kalkulačku vlastní každý student. A ten, který ne, ten ji má alespoň v telefonu. Problémem je, že když dojde na složitější operace, než je násobení a dělení, tak si s ní málokterý umí poradit. Dokonce i na střední škole, nikoliv jenom škole základní. Zde se však nebudeme zabývat jednotlivými funkcemi kalkulačky, k tomu lze využít množství volně šiřitelných materiálů. Budeme se zabývat porovnáním funkcí a efektivnosti logaritmického pravítka, kalkulačky a počítače, kde využijeme tabulkový editor, jako je Microsoft Excel.

2 Historický vývoj

2.1 Logaritmické pravítko

Logaritmické pravítko začíná vznikat roku 1620 pod rukami Edmunda Guntera. V té době mělo jen jednu logaritmickou škálu a šlo použít pouze k násobení a dělení. Někdy lze tento nástroj nalézt pod jménem Gunterovo pravítko. Dvě tato pravítka začal používat William Oughtred a jejich spojením vznikla nám bližší verze logaritmického pravítka. Oughtred používal toto pravítko ke svým výpočtům již roku 1620, ale ve veřejnou známost vešlo až roku 1632 v díle Circles of Proportion. V tomto díle byla zveřejněna kruhová verze logaritmického pravítka, kde byly stupnice zapsány v soustředných kružnicích. Dnes známe spíše pravítko s posuvným prostředkem, kde jsou stupnice vodorovné. Těchto pravítek existuje více verzí, a ty zvládají různé matematické operace. Standardní verze dokáže provádět operace dělení, násobení, druhou a třetí mocninu, nebo pracovat s goniometrickými funkcemi. Na stupnicích jsou zvýrazněny některé významné konstanty, jakou je například číslo pí. S dalšími rozšířeními zvládá všechny matematické operace, které nám poskytne klasická kalkulačka. Velkou nevýhodou je však přesnost. Logaritmické pravítko zvládá výpočty s přesností na dvě až tři platné číslice, což je u některých měření nedostačující. Poté je zde problém s náročností pro uživatele. Ten musí dobře ovládat logaritmický počet, anebo si zapamatovat manuál. Právě z tohoto důvodu se logaritmické pravítko netěšilo takové popularitě mezi širokou veřejností, jako kalkulačky. [1][2]

2.2 Kalkulačka

První odklon od používání logaritmického pravítka nastal roku 1968 po vydání vědecké kalkulačky Hewlett-Packard HP-9100A. Používání kalkulaček začalo převládat, jelikož byly jednoduché na použití a při jejich používání nedocházelo k chybám jako u logaritmického pravítka, kde se například muselo uchovávat v paměti umístění desetinné

čárky, což bylo u delších výpočtů náročné. Na druhou stranu kalkulačka byla pro mnohé nepřijatelná, jelikož neukazovala některé mezi výpočty a operace nutné k dosažení požadovaného výsledku. Další velkou nevýhodou v té době byla závislost na elektřině, což přišlo mnohým jako zbytečná komplikace. Nakonec ovšem kalkulačky zcela převládly a to hlavně díky větší preciznosti výpočtů. Pro snadnou obsluhu pak získala i oblibu u široké veřejnosti, kde byla ovšem zpočátku problematická pořizovací cena. [3]

2.3 Microsoft Excel

Microsoft Excel je tabulkový editor, který umožňuje zpracovávat i větší množství dat. Poprvé se objevil na trhu roku 1982 a to v podobě, v které by ho dnes málokdo nepoznal. Až roku 1987 vyšla verze pro operační systém Windows. Oproti standardním funkcím, které nalezneme na kalkulačce, se zde daly vkládat vlastní funkce a operovat s velkými soubory dat. Tyto aspekty byly zprvu oceněny hlavně ekonomy, ale dnes je například hojně využíván i při fyzikálních měřeních. [4]

3 Příprava hodiny

Udělat lehký přehled historie je pro studenty přínosné, ať už se jedná o hodiny matematiky anebo informačních technologií. Bohužel nemůžeme říci, že taková přednáška zaujme většinu studentů. Dokonce bych se nebál tvrdit opak. Proto je studenty nutné do hodiny aktivně zapojit. Vhodné je zadat studentům příklad a nechat je tuto úlohu řešit pomocí výpočetní techniky zmíněné výše. K tomu je třeba se předem dobře připravit, neboť na rozdíl od počítače či kalkulačky si logaritmické pravítko v aktovce nosí málokterý student. Shánět dostatečný počet pravítek pro celou třídu by bylo značně problematické, i kdyby šlo o práci ve dvojicích. Naštěstí logaritmické pravítko se dá vytvořit i z papíru [8]. Postup není složitý a je to dobrý projekt pro domácí práci. Samotné výpočty je nezbytné provádět v pořadí logaritmické pravítko, kalkulačka a nakonec Microsoft Excel. Pokud bychom postupovali jinak, tak by to studenty svádělo k podvádění. Aby práce byla zajímavější, může se uspořádat soutěž a ocenit například studenty, kteří provedli nejrychlejší výpočty.

4 Praktická část

4.1 Příklad s postupem řešení

Vodorovný vrh v homogenním magnetickém poli.
Stojíme na mostě a vrháme kámen do řeky. Most je vysoký 50 m. Jak daleko kámen dopadne, vrhneme-li jej vodorovně rychlostí 5 m/s? Jaká je výška nad hladinou 2 s po vržení? Počítáme s gravitačním zrychlením 9,81 m/s2. Odpor vzduchu zanedbáváme.
[x_0= 15,97 m; y = 30,4m]

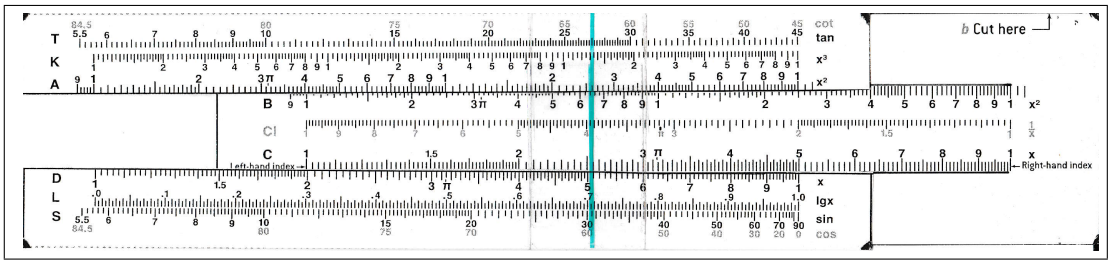
Řešení:
Vzdálenost dopadu:
$x_0 = v \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$
Výška nad hladinou:
$y = h - \frac{1}{2} g t^2$

4.1.1 Řešení pomocí logaritmického pravítka

Vzdálenost dopadu:

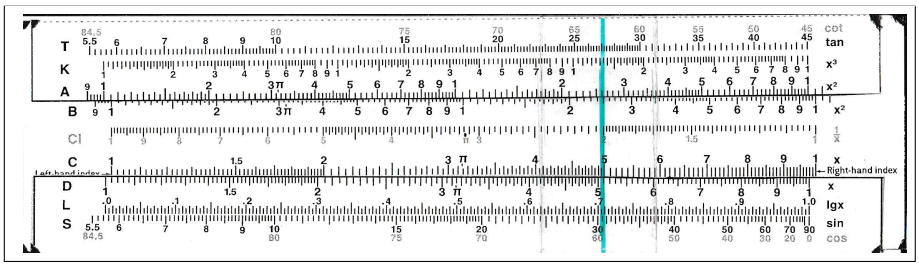
1. **Vynásobíme výšku dvěma:**
   Stupnice jsou logaritmické, proto zde platí $2+5 = 2 \cdot 5$ což plyne z věty o logaritmech $\ln 2 + \ln 5 = \ln(2 \cdot 5)$. Logaritmické pravítko povoluje jen počty do desíti. Z toho důvodu počítáme $2 \cdot 5$ nikoliv $2 \cdot 50$ a pamatujeme si, že jsme dělili deseti. Na logaritmickém pravítku nalezneme několik stupnic popsaných pomocí velkých písmen: A, B, C, D, L, S, T, K. Tyto písmena nám pomohou k orientaci při výpočtu viz (Obr. 1) Stupnici C posuneme tak, aby jednička ukazovala na dvojku stupnice D. Poté číslo pět ze stupnice C ukazuje výsledek na stupnici D. Jinými slovy, ke dvojce na stupnici D přičteme pět pomocí stupnice C. Nemůžeme přičíst pětku bez pomoci stupnice C, jelikož rozestupy mezi jednotlivými čísly na stupnici nejsou stejně velké. Z toho důvodu je zde $2 + 5 = 2 \cdot 5$ a ne jak u stupnice klasické, kde je $2 + 5 = 7$.

Obrázek 1: Logaritmické pravítko



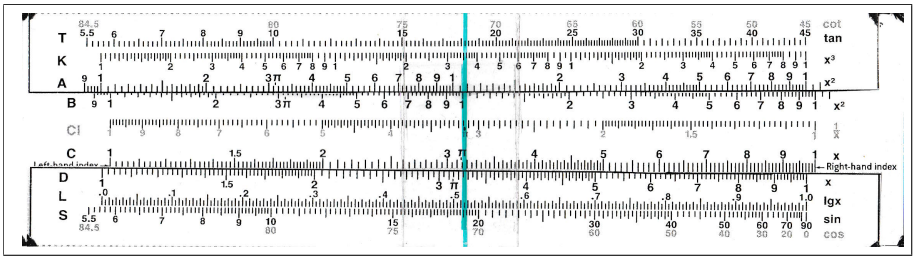
2. **Vydělíme výsledek číslem 9.8:**
   Stupnice jsou logaritmické, proto zde platí $10 - 9.8 = \frac{10}{9.8}$ což plyne z věty o logaritmech $\ln 10 - \ln 9.8 = \ln(\frac{10}{9.8})$. Logaritmické pravítko povoluje jen počty do desíti. Z toho důvodu počítáme $\frac{10}{9.8}$ nikoliv $\frac{100}{9.8}$ a pamatujeme si, že jsme dělili deseti. Stupnici C posuneme tak, aby číslo 9.8 ukazovalo na desítku stupnice D. Poté číslo jedna ze stupnice C, ukazuje výsledek na stupnic D (Obr. 2). Jinými slovy, od desítky na stupnici D odečteme 9.8 pomocí stupnice C.

Obrázek 2: Logaritmické pravítko



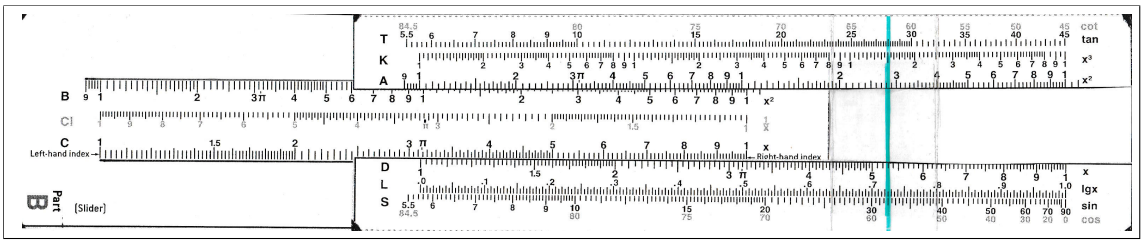
3. **Výsledek odmocníme:**
Na stupnici B si zafixujeme posuvným ukazatelem náš předešlý výsledek 10.2. Na ose C přečteme nový výsledek $\sqrt{10.2} = 3.2$ (Obr. 3).

Obrázek 3: Logaritmické pravítko



4. **Výsledek vynásobíme pěti:**
Postupujeme obdobně jako v kroku jedna. Chceme spočítat $3.2 \cdot 5$, to se dá zapsat jako $\ln 3.2 + \ln 5 = \ln(3.2 \cdot 5)$. Bohužel zde je výsledek větší jak deset, proto musíme napřed dělit deseti. Dostáváme tak rovnici $\ln 3.2 + \ln 5 - \ln 10 = \ln(\frac{3.2 \cdot 5}{10})$. Toto by nám příliš nepomohlo v tom se vejít na stupnici. Proto rovnici vynásobíme číslem -1. $\ln 10 - \ln 3.2 - \ln 5 = -\ln(\frac{10}{3.2 \cdot 5}) = \ln(\frac{3.2 \cdot 5}{10})$. Stupnici C posuneme tak, aby desítka ukazovala na číslo 3.2 na stupnice D. Tímto jsme provedli operaci $\ln 10 - \ln 3.2$. Poté číslo pět ze stupnice C, ukazuje výsledek na stupnic D (Obr. 4). Nezapomeneme, že výsledek je nutné zpětně vynásobit deseti.

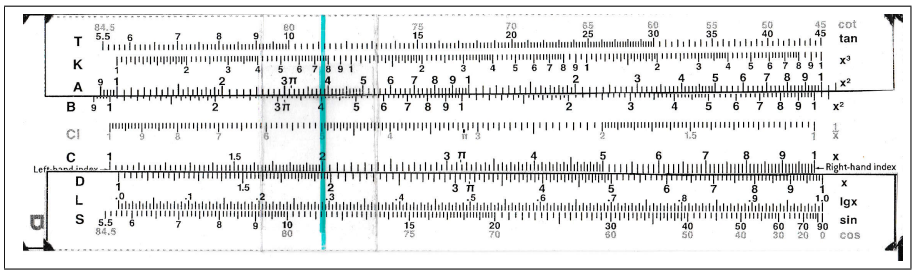
Obrázek 4: Logaritmické pravítko



Výška nad hladinou:

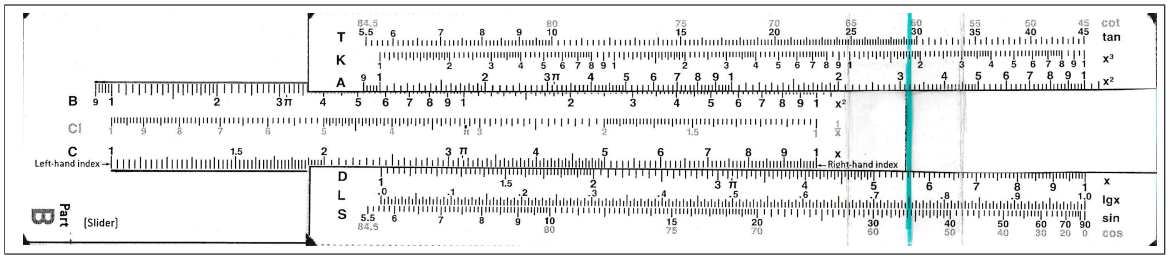
1. **Vypočteme druhou mocninu času:**
   Na stupnici C si zafixujeme posuvným ukazatelem hodnotu času 2 s. Na ose B přečteme nový výsledek $2^2 = 4$ (Obr. 5).

Obrázek 5: Logaritmické pravítko



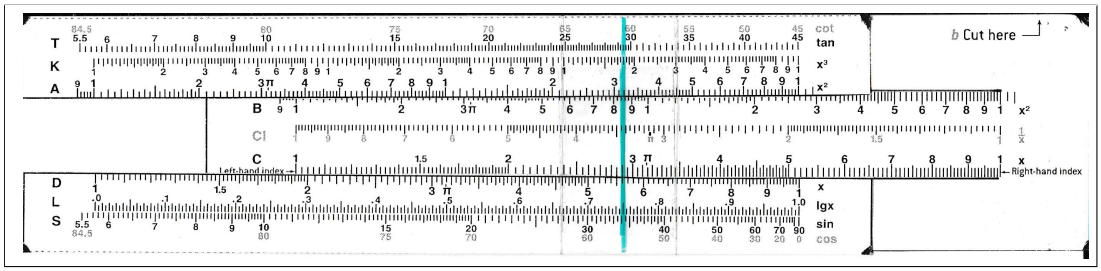
2. **Vynásobíme výsledek číslem 9.8:**
   Chceme spočítat $4 \cdot 9.8$, to se dá zapsat jako $\ln 4 + \ln 9.8 = \ln(4 \cdot 9.8)$. Bohužel zde je výsledek větší jak deset, proto musíme napřed dělit deseti. Dostáváme tak rovnici $\ln 4 + \ln 9.8 - \ln 10 = \ln(\frac{4 \cdot 9.8}{10})$. Toto by nám příliš nepomohlo v tom se vejít na stupnici. Proto rovnici vynásobíme číslem -1. $\ln 10 - \ln 4 - \ln 9.8 = -\ln(\frac{10}{4 \cdot 9.8}) = \ln(\frac{4 \cdot 9.8}{10})$. Stupnici C posuneme tak, aby desítka ukazovala na číslo 4 na stupnici D. Tímto jsme provedli operaci $\ln 10 - \ln 4$. Poté číslo 9.8 ze stupnice C ukazuje výsledek na stupnici D (Obr. 6). Nezapomeneme, že výsledek je nutné zpětně vynásobit deseti.

Obrázek 6: Logaritmické pravítko



3. **Vydělíme předešlý výsledek dvojkou:**
   Zde platí $3.9 - 2 = \frac{3.9}{2}$, což plyne z věty o logaritmech $\ln 3.9 - \ln 2 = \ln(\frac{3.9}{2})$. Stupnici C posuneme tak, aby číslo 2 ukazovalo na 3.9 stupnice D. Poté číslo jedna ze stupnice C, ukazuje nový výsledek na stupnic D (Obr. 7). Jinými slovy, od 3.9 na stupnici D odečteme 2 pomocí stupnice C.

Obrázek 7: Logaritmické pravítko



4. **Odečteme náš výsledek od 50:**
   Odčítat a sčítat logaritmické pravítko neumí.

4.1.2 Řešení pomocí kalkulačky

Vzdálenost dopadu:

1. Zadáme do kalkulačky:
   $x_0 = 5 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{9.81}} = 15.96$

2. Výška nad hladinou:
   $y = 50 - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot 2^2 = 30.38$

4.1.3 Řešení pomocí Microsoft Excelu

1. Zadáme do buněk konstanty g, h, v dle obrázku níže. Je nutné zachovat umístění hodnot, kvůli smysluplnosti následujících příkazů.

2. Vypočteme vzdálenost dopadu:
   =$D$5*ODMOCNINA(2*$C$5/$B$5)

3. Můžeme samostatně vypočíst čas dopadu:
   =ODMOCNINA(2*$C$5/$B$5)

4. Vytvoříme tabulku časů:
   Zapíšeme pod sebe hodnoty 0 a 0,2. A následně roztáhneme až na hodnotu 3.

5. Do prvního políčka pro výšku nad hladinou y zapíšeme vzorec a následně roztáhneme pro zbylé časy:
   =$C$5-0,5*$B$5*B8^2

6. Stejně jako v bodě 5 postupujeme se vzdáleností:
   =$D$5*B8

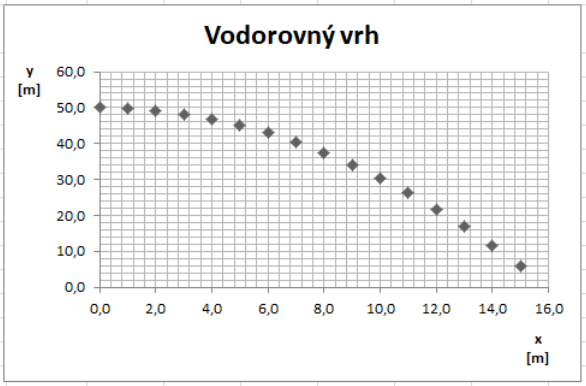
7. Rychlejší studenti mohou vykreslit graf

Obrázek 8: Ukázka Excelu

g [m*s^{-2}]	h [m]	v [m*s^{-1}]
9,81	50	5

t_0 [s]	x_0 [m]
3,19	15,96

t [s]	y [m]	x [m]
0,0	50,0	0,0
0,2	49,8	1,0
0,4	49,2	2,0
0,6	48,2	3,0
0,8	46,9	4,0
1,0	45,1	5,0
1,2	42,9	6,0
1,4	40,4	7,0
1,6	37,4	8,0
1,8	34,1	9,0
2,0	30,4	10,0
2,2	26,3	11,0
2,4	21,7	12,0
2,6	16,8	13,0
2,8	11,5	14,0
3,0	5,9	15,0



4.2 Příklady bez postupu řešení

Volný pád

Volně padající kámen má v určitém bodě své dráhy okamžitou rychlost 10 ms^{-1} a v jiném, níže položeném bodě rychlost 50 ms^{-1}. Za jaký čas doletí kámen z prvního bodu do druhého a jak daleko jsou oba body od sebe vzdálené?

[t= 4 s; s = 120 m]

Řešení:

Čas letu mezi body:

$t = \frac{\Delta v}{g}$

Vzdálenost mezi body:

$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

Zákon zachování hybnosti

Nákladní železniční vůz má hmotnost 10 000 Kg a pohybuje se rychlostí 1 m·s^{-1}. Zezadu do něj narazí druhý nákladní železniční vůz, který váží 15 000 Kg a před srážkou se pohyboval rychlostí 1.5 m·s^{-1}. Po srážce se oba vozy spojí. Jakou rychlostí se vozy pohybují po srážce?

[v=1.3 ms^{-1}]

Řešení:

Rychlost spojených vozů:

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = mv$

$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

Smykové tření
Jaký je součinitel smykového tření saní o hmotnosti 50 kg, pokud k udržení saní v rovnoměrném pohybu třeba překonat sílu tření F= 25 N.
[f=0.05]

Řešení:
Součinitel smykového tření:
$F = fF_N$
$F_N = mg$
$f = \frac{F}{mg}$

5 Závěr

Je jasné, že studenti shledají logaritmické pravítko prakticky nepoužitelné. Dovést je ke zdárnému výsledku není snadné, i když pro matematika je užití dosti intuitivní. Po spočtení výše řešeného příkladu by měli mít představu o tom, jak se s jednotlivými zařízeními pracuje a měli by si uvědomit jejich výhody a nevýhody. Naším hlavním cílem bylo, aby si student mohl vlastnoručně vyzkoušet, jak se počítalo dříve a tím pádem lépe ocenil moderní podobu výpočetní techniky. Zároveň by si měl uvědomit kolik velkých objevů a složitých rovnic vzniklo v době, kdy tato technika nebyla k dispozici.

Poděkování
Děkuji ústavu matematiky a biomatematiky Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích za umožnění práce na článku v rámci projektu STEM na předmětu Didaktika matematiky.

Literatura:

[1] Cajori F.: A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments, Engineering news publishing Company, 1909.

[2] Peter M. Hopp: Slide Rules: Their History, Models, And Makers, Astragal Press, 1999.

[3] Leibson, Steven: "The HP 9100 Project: An Exothermic Reaction",2010

[4] Power, D. J.: "A Brief History of Spreadsheets", DSSResources.COM, World Wide, version 3.6, 08/30/2004. Photo added September 24, 2002.

[5] Návod k použití logaritmického pravítka LOGAREX modul 125 mm, systém DARMSTADT typ 4542-27203; KOH-I-NOOR, Tužkárna L. & C. Hardtmuth, n.p., České Budějovice.

[6] Lank V., Vondra M.: Fyzika v kostce, Fragment, 1996.

[7] Odvárko O.: Matematika pro gymnázia Funkce, Prometheus, 2000.

[8] Šablona pro tvorbu pravítka: www.scientificamerican.com

Bc. Jaroslav Jícha
Přírodovědecká fakulta, Jihočeská univerzita.
Branišovská 1645/31A, 370 05 České Budějovice
e-mail: jarda.ji@seznam.cz

PROJEKTOVÝ DEN S FINANČNÍ GRAMOTNOSTÍ

Jana Kaňková

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta

Abstrakt: Tento příspěvek mapuje a vyhodnocuje výuku finanční gramotnosti nabízenou pro předmět matematika na základní škole. Zaměřuje se na pořádání projektového dne jako jednu z aktivizujících metod. Hlavním cílem článku je nabídnout čtenáři potřebné informace k realizaci projektového dne, zapojení hry Finanční svoboda do výuky a posoudit její efektivitu.

Klíčová slova: Finanční gramotnost, projektový den.

Project Day with Financial Literacy

Abstract: This article describes and evalutes financial literacy in mathematics teaching at elementary school. It focus on organizing the project day as one of the activating methods. The main goal of the article is to oprovide the reader necessary information to implement the project day and involve the game Financial freedom into teaching

Key words: Financial literacy, project teaching.

Úvod

Článek je reakcí na vyhlášku ministerstva financí zveřejněné 20. 7. 2017 revidovaný Standard finanční gramotnosti, který stanovuje cílovou úroveň finanční gramotnosti pro žáky základních a středních škol. Oproti standardům finanční gramotnosti z roku 2007 došlo k úpravě a posílení těchto témat: bezhotovostní placení, ochrana osobních údajů, kritické posouzení nabídky služeb a zboží, sestavení rozpočtu a porovnání majetku a závazků, úročení, porovnání finančních

produktů, krátkodobé i dlouhodobé plánování a rizika dosažení cílů, zabezpečení na stáří, vznik a rizika půjček, důsledky nesplácení a řešení zadlužení a předlužení. Je samozřejmé, že revidovaný standard finanční gramotnosti bude implementován do rámcových vzdělávacích programů (dále RVP) při jejich nejbližší revizi a článek nabízí jednu z možností, jak finanční gramotnost uvést do RVP.

Standard finanční gramotnosti

Ministerstvo financí zveřejnilo aktuální Standard finanční gramotnosti (2017), který stanovuje cílovou úroveň finanční gramotnosti pro žáky základních a středních škol následovně:

A. Nakupování a placení

1. Nakupování

a. vysvětlí stanovení ceny podle nákladů, poptávky a konkurence
b. na příkladu vysvětlí, jak reklamovat zboží či službu, a na koho se obrátit v případě stížnosti či sporu
c. popíše vliv inflace na hodnotu peněz
d. rozpozná nekalé obchodní praktiky

2. Bezhotovostní placení

a. popíše výhody a rizika bezhotovostního placení a vysvětlí, jak bezpečně platit
b. vysvětlí odlišnosti a omezení debetní a kreditní karty
c. popíše možnosti kontroly pohybu a stavu prostředků na účtu

B. Hospodaření domácnosti

1. Rozpočet

a. sestaví rozpočet jednotlivce i domácnosti
b. odliší čistý a hrubý příjem
c. odliší pravidelné, nepravidelné a jednorázové příjmy
d. odliší pevné, kontrolovatelné a jednorázové výdaje
e. zváží nezbytnost výdajů

2. Porovná majetek a závazky domácnosti v bilanci

3. Úvod do finančních služeb

a. charakterizuje jednotlivé finanční produkty a jejich využití
b. provádí výpočty jednoduchého úročení a popíše princip složeného úročení
c. charakterizuje úrok a poplatky a jejich vliv na cenu finančního produktu
d. porovná finanční produkty, zejména z hlediska rizika, výnosu a likvidity

4. Plánování

a. stanoví své krátkodobé a dlouhodobé finanční cíle a rozhodne o způsobu dosažení těchto cílů
b. určí rizika ohrožující dosažení finančních cílů a navrhne způsob jejich zmírnění

Problematika zavedení finanční gramotnosti do RVP

Problémem mnoha základních i středních škol je rozštěpení výuky finanční gramotnosti do mnoha předmětů – matematiky, českého jazyka, rodinné či občanské výchovy, ale i nových předmětů jako je člověk a společnost, člověk a svět práce, člověk a jeho svět. Což klade poměrně vysoké nároky na kooperaci mezi učiteli, rozdělení témat finanční gramotnosti do jednotlivých předmětů a motivaci pro učitele. Možným řešením pro školu je vytvořit samostatný předmět finanční gramotnost, popřípadě spojený se čtenářskou gramotností. Problémem v tomto případě je, že předmět vznikne na úkor hodinové dotace jiného předmětu, většinou matematiky, a velmi často bude finanční gramotnost vyučovat právě učitel matematiky. V tomto případě pak výuka bude inklinovat k matematice a početním operacím. Možnost, jak se zmíněným obtížím vyhnout, a přitom žáky motivovat k rozvoji jejich finanční gramotnosti, spatřuji ve využití moderních technologií a uspořádání projektového dne s finanční gramotností.

Při vymezení pojmu projektového vyučování se setkáváme s velkou různorodostí. Některé definice vysvětlují projektové vyučování jako metodu. Jednou z takovýchto definic projektu je definice od Maňáka a Švece (2003), kde je projekt chápán jako „*komplexní praktická úloha (problém, téma) spojená se životní realitou, kterou je nutno řešit teoretickou i praktickou činností, která vede k vytvoření adekvátního produktu*“ autoři pokračují ve vysvětlení projektové výuky jako metody, kde „*se účastníci projektu angažovaně začleňují do životní praxe a za své aktivity též přebírají určitou odpovědnost [...] projekty sdružují přirozenou cestou ke spolupráci několik vyučovacích předmětů, neboť jejich cílem je řešit situaci ze životní reality*“. S projektovým vyučováním jako metodou (projektovou metodou) se ztotožňuje i Kratochvílová (2006), která označuje projektovou metodu za obtížnou.

Rozhodneme-li se uspořádat projektový den od začátku do konce sami, čeká nás mnoho práce a času. Jak uvádí Zormanová (2012) Při vymýšlení a sestavování projektu se držíme čtyř následujících fází.

1. *Stanovení záměru projektu.*
2. *Plánování.*
3. *Realizace projektu.*
4. *Zhodnocení práce na projektu.*

Nespornou nevýhodou projektového vyučování je vysoká časová náročnost, kladená jak na řešení projektu, tak na jeho přípravu pro učitele. Další nevýhodou je i finanční stránka projektu, samotné vyhodnocení projektu učitelem a případné výstupy z projektu. Při projektovém vyučování může také scházet upevnění získaných poznatků opakováním. (Zormanová, 2012; Volná, 2014)

Den s finanční gramotnosti s podporou ICT

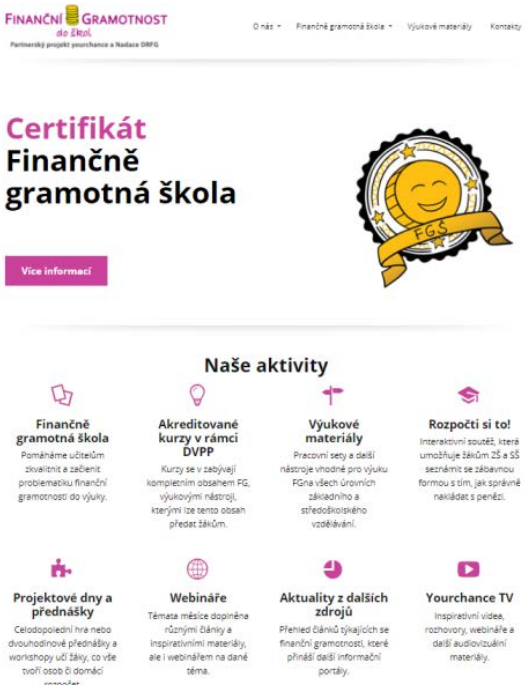
Jednoduchým, efektivním a nekomerčním řešením je uspořádat den s finanční gramotnosti s pomocí agentury. Projektový den je uspořádán v několika na sebe navazujících lekcí přizpůsobených cílové skupině a jejím požadavkům, probíhajícím bez nároku na honorář. Jsou

při nich využiti interaktivní pomůcky a školení lektoři, kteří vám poskytnou metodickou pomoc při zavádění principů finanční gramotnosti do škol.

Vyberu několik projektů, které podporují a zatraktivňují výuku finanční gramotnosti na ZŠ. Poskytují prakticky využitelné materiály a pomůcky podporující interaktivní přístup a umožňují sdílení zkušeností odborníků z praxe a finanční prostředky na jejich realizaci jsou nulové nebo minimální.

I. FINANČNÍ GRAMOTNOST DO ŠKOL

Jedná se o partnerský projekt yourchance a Nadace DRFG. Dostupné na webové stránce www.fgdoskol.cz, kde také online naleznete výukové materiály, jedná se hlavně o videa, animace, filmy a webináře. Učitelům základních škol nabízí vzdělávací program probíhající formou webinářů (on-line). Účastníci si osvojí znalosti potřebné ke kvalifikované výuce finanční gramotnosti (dále jen FG) v rámci ŠVP. Získají odkazy na odbornou literaturu a jiné pomůcky pro výuku FG. Po úspěšném absolvování kurzu účastníci získají certifikát. Tento projekt dále realizuje sdílení pedagogické praxe formou kulatých stolů, jejichž tématem je vzdělávání v oblasti finanční gramotnosti a podnikavosti na školách.



Obrázek 1 Úvodní webová stránka projektu FG do škol

II. ROZUMÍME PENĚZŮM

Program Rozumíme penězům realizuje občanské sdružení AISIS, donedávna s finanční podporou od MONETA Money bank. Na webových stránkách www.rozumimepenezum.cz si můžete vybrat seminář dle vašich požadavků, který je zaměřen na vzdělávání pedagogů a následně proběhne realizace projektového dnu na vaší škole školenými lektory, zaměřují se na

osmý a devátý ročník. Po absolvování školení a projektového dne, obdržíte velmi kvalitně zpracované materiály pro výuku finanční gramotnosti, které jsou jako jediné zpoplatněny.

Tento program dále nabízí zaregistrování vaší školy jako klubové. Pak můžete využít i nabídky letních škol pro děti, zpravidla třídenní akce pořádaná v červnu, kde dětem agentura zprostředkuje teambuildingové aktivity, besedy s odborníky z banky, práci s fotoaparáty, kamery i GPSky apod.

Obrázek 2 Úvodní webová stránka projektu Rozumíme penězům

III. HRA FINANČNÍ SVOBODA

Vynikají prostředek pro zpestření a motivování studentů na rozšíření obzorů ve světě finanční gramotnosti. Na webu www.financnisvoboda.cz se zaregistrujete a dva vybraní pedagogové absolvují dvoudenní školení zaměřené na pravidla a práci s touto deskovou hrou. Školení lektoři pak implementují hru přímo ve třídách pomocí dvou projektových dnů, škola navíc získá čtyři deskové hry Finanční svoboda a další metodické materiály, opět zcela zdarma. Velmi pozitivní na této hře je, že pokud vaše děti nadchne, můžete se zúčastnit pořádaných mistroství.

Obrázek 3 Desková hra Finanční svoboda

Pokud váháte, je-li tato hra vhodná pro zařazení do vaší výuky, doporučuji si se žáky vyzkoušet její demo verzi FinGRPlay dostupnou online: https://www.fingrplay.cz/cs/home.

Obrázek 4 Úvodní stránka online hry FinGRPlay

Po přihlášení, které je bezplatné, můžete zahájit hru. Rozkliknete odkaz „hra s výukou“ a s podporou komentářů a vysvětlivek začínáte hrát. Hra je velmi jednoduchá, a pokud se vám náhodou nepovede, můžete začít od začátku a poučit se ze svých chyb.

Závěr

Tento článek zmapoval velmi nepatrnou část z nabídky možných směrů výuky finanční gramotnosti, nejen se zapojením moderních technologií. V rámci realizace dne s finanční

gramotností nabízí žákům větší prohloubení jejich znalostí ze světa financí. Žáci se formou hry, a s pomocí moderních technologií, učí spolupráci se spolužáky, hospodaření s domácím rozpočtem a řešení běžných finančních problémů.

Žák při projektovém dni využívá znalostí a dovedností v práci s informačními technologiemi, zejména pro shromáždění potřebných informací, ale i pro hru samotnou. Po absolvování výše zmíněných možností pro výuku finanční gramotnosti se svými žáky, jsem dopěla k závěru, že v rámci projektového dne si žáci nejen osvojí mnohem snáze požadované znalosti z vybrané problematiky, ale zároveň získávají další cenné zkušenosti, jako je koordinace práce ve skupině, komunikace a řešení problémů.

.

Literatura:

[1] KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Teorie a praxe projektové výuky*. Brno: Masarykova univerzita, 2006. ISBN 80-210-4142-0.

[2] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

[3] Ministerstvo financí. *Standard finanční gramotnosti.* Dostupné z: http://www.mfcr.cz/cs/aktualne/aktuality/2017/standard-financni-gramotnosti-29163

[4] ZORMANOVÁ, Lucie. *Výukové metody v pedagogice: tradiční a inovativní metody, transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky, klasifikace výukových metod*. Praha: Grada, 2012. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-4100-0.

Mgr. Jana Kaňková
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: kankova@pf.jcu.cz

PARAMETRICKÉ KRIVKY AKO NÁSTROJ PRE OVLÁDANIE JEDNODUCHÉHO ROBOTA

Alexej Kolcun

Katedra informatiky a počítačů, PřF, Ostravská univerzita

Abstrakt: V príspevku demonštrujeme ovládanie robota SPHERO nástrojami pre parametrické modelovanie kriviek. Na jednoduchom príklade ukážeme závislosť kvality výslednej trajektórie na zvolenej hladkosti použitých kriviek. Téma môže byť motiváciou medzipredmetových vzťahov matematiky, fyziky a informatiky.

Klíčová slova: parametrické modelovanie kriviek, parametrická a geometrická hladkosť krivky, robot.

Parametric curves as a simple robot control tool

Abstract: In the paper, we demonstrate the SPHERO robot control with parametric curve modelling tools. In a simple example, we show the dependence of the quality of the resulting trajectory on the selected smoothness of the curves used. The theme may be the motivation of the interdimensional relationships of mathematics, physics and informatics.

Key words: parametric curve modelling, parametric and geometric smoothness, robot.

Úvod

Z vlastnej skúsenosti viem, že pohyblivé (či už skutočne, alebo aspoň na obrazovke) učebné pomôcky sú pre školou povinnú mládež (aspoň pre jej časť) zaujímavé a priťahujú jej pozornosť. V súčasnej dobe sú široko dostupné mechanické programovateľné hračky, ktoré sa

v podstate dajú použiť ako jednoduché roboty. Som presvedčený, že vhodné včlenenie takýchto pomôcok do učebného procesu, keď žiak môže nie len pasívne sledovať ich pohyb, ale aj ho aktívne riadiť, podporí záujem žiakov o predmety spojené s matematikou, fyzikou a informatikou, čo je v súčasnej dobe spoločensky doslova nutné.

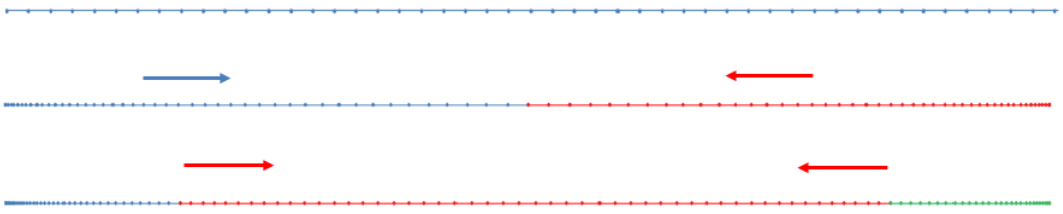
V príspevku analyzujeme príklad posuvného pohybu jednoduchého programovateľného zariadenia po lineárne lomenej čiare, tvoriacej obvod štvorca. Taká trajektória je z jednej strany veľmi jednoduchá na popis, pritom dáva reálny aplikačný zmysel. Z druhej strany, už tu sa dá demonštrovať nutnosť rozmýšľať nielen *algoritmicky*, tj. aké prostriedky zvoliť k rozpohybovaniu robota, ale aj *fyzikálne*, tj. ako súvisia sily s pohybom, a *matematicky*, tj. ako toto formálne zapísať.

SPHERO

Nižšie uvedené experimenty sú demonštrované pomocou mobilného programovateľného zariadenia – robota SPHERO. V súčasnej dobe má táto programovateľná hračka veľký okruh priaznivcov. Je to guľa s priemerom cca 5 cm, ktorá je schopná vyvinúť rýchlosť až 2m/s. Ovláda sa mobilným telefónom alebo tabletom. Komunikáciu zaisťuje Bluetooth ver. 4 a vyššia, dosah komunikácie až 30 m. Okrem ovládania pohybu, toto zariadenie dovoľuje snímať širokú škálu jeho kinematických charakteristík. Detailné technické parametre možno získať napr. v [2]. *Pre nás je podstatné, že riadenie robota je založené na zadaní vektora požadovanej rýchlosti v danom čase.*

Tri scenáre pohybu

Trajektóriu obvodu štvorca budeme v prvom priblížení chápať ako štyri nezávislé úsečky *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. Postupnou analýzou dospejeme k nutnosti vzájomnej previazanosti týchto čiastkových dráh. Obr. 1 demonštruje tri rôzne scenáre priamočiareho pohybu na úsečke, ktoré sú popísané nižšie. Rýchlosť v danej oblasti je vyjadrená delením úsečky (je priamo úmerná dĺžke dielikov na úsečke). Pôsobiaca sila je znázornená šípkou.



Obr. 1 Tri scenáre priamočiareho pohybu.

Scenár 1 – rovnomerný priamočiary pohyb

S formalizáciou tohto pohybu sa žiaci stretávajú vo forme parametrického vyjadrenia priamky

$$P(t) = A + t\vec{v} = A + t(B - A), \qquad (1)$$

kde vektor $B - A$ je konštantná rýchlosť pohybu – Obr.1 (hore). Nevhodnosť takto zvoleného riadenia pohybu na úsečke *AB* je zrejmá: robot v počiatočnom momente stojí v bode *A*, tj. jeho rýchlosť je nulová a zmeniť rýchlosť skokom prakticky nemožno. Naviac, v bode *B* tento model predpokladá, že sa smer rýchlosti zmení skokom o 90°, čo je taktiež technicky nezvládnuteľné.

Pokus o riadenie robota takým spôsobom vedie k trajektórii z Obr. 3a). Vidíme, že reálny výsledok je veľmi vzdialený nášmu očakávaniu. Robot zotrvačnosťou pokračuje v pôvodnom smere i v mieste, kde očakávame otočenie o 90°. A výsledná trajektória je skôr podobná kružnici ako hranici štvorca.
Preto je zmysluplné riadiť pohyb s meniacou sa rýchlosťou.

Scenár 2 – pohyb s nulovou rýchlosťou v hraničných bodoch úsečky

Najjednoduchšie možné riešenie je modelovať rýchlosť na úsečke ako po častiach lineárnu funkciu času

$$v(t) = \begin{cases} at & 0 \le t < 0{,}5 \\ (1-a)t & 0{,}5 \le t \le 1 \end{cases}, \qquad (2)$$

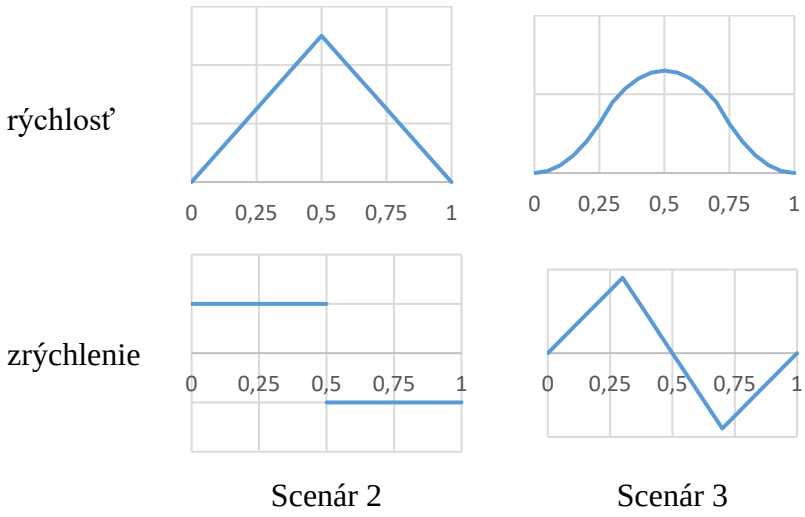
s vhodne zvolenou konštantou *a*. Čiže ide o pohyb so zrýchlením, ktoré je po častiach konštantné.

Vzhľadom na Druhý Newtonov zákon bude teleso na úsečke *AB* v prvej polovici dráhy tlačené silou $\overrightarrow{F_1}$ ktorá je úmerná zrýchleniu a je orientovaná v smere pohybu. V druhej polovici dráhy je naopak, brzdené touto konštantou silou, tj. pôsobí sila $-\overrightarrow{F_1}$, Obr. 1 (uprostred), Obr. 2. Výsledná trajektória je na Obr. 3b). Riešenie je podstatne lepšie ako v predošlom prípade, no vo vrcholoch štvorca vznikajú výrazné artefakty: vo vrchole *B* našej trajektórie ešte pôsobí vyššie spomínaná brzdiaca sila a zároveň začína podľa scenára pôsobiť sila $\overrightarrow{F_2}$ v smere úsečky *BC*. Práve v dôsledku takto časovo nespojitej zmeny pôsobiacej sily vzniká pozorovaný nežiaduci jav.

Scenár 3 – pohyb s nulovou silou v hraničných bodoch úsečky

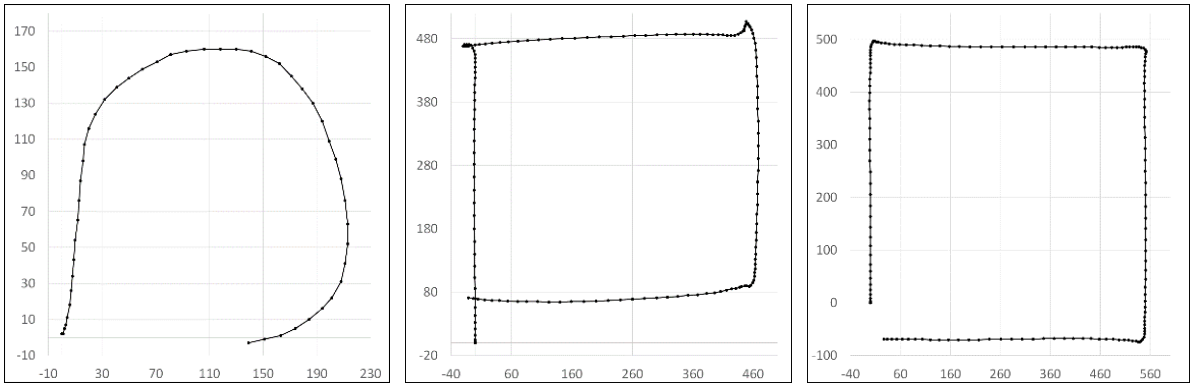
Opäť sa budeme snažiť vytvoriť čo najjednoduchší scenár. Keďže vo vyššie popísanom prípade problém vznikol v dôsledku nespojitosti sily, zvolíme najjednoduchší možný, tj. po častiach lineárny priebeh zmeny zrýchlenia, resp. pôsobiacej sily – Obr.1 (dole). Na prvom – modrom úseku pôsobiaca sila lineárne rastie od nuly. Na druhom – červenom úseku sa sila lineárne mení z „hnacej“ na „brzdiacu“. Na treťom (zelenom) úseku „brzdiaca“ sila lineárne klesá k nule.

Priebeh pôsobiacich rýchlostí a síl pre druhý a tretí scenár ukazuje Obr. 2.



Obr. 2 Priebeh rýchlosti a zrýchlenia pre scenáre 2 a 3, pre priamočiary pohyb.

Explicitné vyjadrenie pre rýchlosť a zrýchlenie neuvádzam. Záujemcovia ich nájdu napr. v [1]. Vzhľadom na to, že riadenie robota je založené na definovaní rýchlosti, študentov, oboznámených so základmi diferenciálneho a integrálneho počtu je možno motivovať práve na príklade vyššie uvedených scenárov: *pre zadané vyjadrenie zrýchlenia nájdite explicitné vyjadrenie rýchlosti*.



Obr. 3 Výsledná trajektória analyzovaných scenárov. a) Scenár 1, b) Scenár 2, c) Scenár 3.

Záver

Z výsledkov na Obr. 3 vidíme, že prvoplánové „informatické“ riešenie riadenia jednoduchého robota SPHERO vedie k veľmi neuspokojivému výsledku. Ukázali sme, že jednoduchá kinematická analýza výrazne pomôže zlepšiť výsledné „informatické“ riešenie. Zmienili sme taktiež motivačný príklad potrebnosti diferenciálneho a integrálneho počtu.

Poďakovanie

Tento článok vznikol v rámci inštitucionálnej podpory rozvoja Katedry informatiky a počítačů, PřF Ostravskej univerzity.

Literatura:

[1] Kolcun, A, Raunigr, P.: Plánování pohybu robota pomocí nástrojů nUrBS, in: (Velichová, D., Lávička, M., Tomiczková S. eds) *Proceedings of Slovak – Czech conference on Geometry and Graphics 2017*, SCHK, Bratislava 2017, pp. 103-110.

[2] Sphero Docs. *Sphero* [online]. 2017 [cit. 2017-11-03] Dostupné z: http://sdk.sphero.com/

Alexej Kolcun
Katedra informatiky a počítačů, PřF, Ostravská univerzita
ul. 30 dubna 22, 701 03 Ostrava
e-mail: alexej.kolcun@osu.cz

SKETCHOMETRY – DYNAMICKÁ GEOMETRIE PRO DOTYKOVÁ ZAŘÍZENÍ

Marie Košinová, Roman Hašek

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Abstrakt: Článek je věnován dynamické geometrické aplikaci Sketchometry a jejímu využití ve výuce matematiky. Tato aplikace byla vytvořena záměrně tak, aby ji bylo snadné ovládat na dotykových zařízeních, a to především díky unikátnímu ovládání pomocí gest. V článku je prostřednictvím konkrétních úloh představeno prostředí tohoto programu a je naznačeno, jak ho lze využít pro podporu výuky matematiky.

Klíčová slova: dynamická geometrie, dotyková zařízení, Sketchometry.

Sketchometry – dynamic geometry for touch devices

Abstract: The paper deals with the dynamic geometry software Sketchometry and its utilization in the teaching of mathematics. This application was deliberately developed for the use on touch devices, which is manifested mainly by a unique system of the gesture control. Through the particular examples the environment of this application is presented together with several ideas of its use in mathematics.

Key words: dynamic geometry, touch devices, Sketchometry.

Úvod

Článek je věnován zdarma dostupnému programu dynamické geometrie Sketchometry (sketchometry.org), který je vyvíjen týmem odborníků z Univerzity Bayreuth v Německu. Prostřednictvím řešení dvou konkrétních úloh je krátce představeno prostředí tohoto programu, které je kompletně lokalizováno do češtiny, a jsou naznačeny možnosti jeho využití ve výuce.

Proč se zabýváme tímto programem, když ve školách téměř po celém světě prokazuje své nesporné kvality dynamický matematický program GeoGebra (geogebra.org), rovněž volně dostupný? Protože tyto programy si nijak zvlášť nekonkurují, ale spíše se doplňují. Program GeoGebra se díky svým vzájemně dynamicky propojeným prostředím a webové podpoře stává komplexním a nutno dodat, že velice efektivním, nástrojem pro studium i výuku matematiky, zatímco program Sketchometry hraje roli sofistikovaného náčrtníku, který je vždy pohotově

k dispozici na našich dotykových zařízeních. Je totiž mezi programy dynamické geometrie unikátní tím, že je cíleně vyvíjen pro použití právě na těchto zařízeních. Geometrické konstrukce se v něm realizují pomocí systému gest, tahů prstem po dotykové ploše. Tento systém je poměrně propracovaný a přitom intuitivní, což program dle našeho názoru předurčuje pro použití v situacích, kdy je ve výuce potřeba s žáky rychle načrtnout a analyzovat dynamický geometrický obrázek bez nutnosti vysvětlovat postup konstrukce s použitím příslušných nástrojů a funkcí programu.

Využití Sketchometry v takovýchto chvílích nahrává i skutečnost, že ve školách je žákům k dispozici stále více tabletů [3, 6], interaktivních tabulí i vlastních dotykových mobilních telefonů. Nemluvě o rozšíření dotykových zařízení v domácnostech, o kterém svědčí některé studie, prokazující nárůst prodejů zařízení s dotykovou obrazovkou (mobilní telefony, tablety, zařízení 2 v 1) na úkor klasických počítačů a notebooků [2]. Ve spojitosti s rostoucím počtem tabletů a interaktivních tabulí ve školách je nutné přemýšlet, jak tato dotyková zařízení co nejefektivněji využívat během vyučovacích hodin. Rádi bychom článkem ukázali, že Sketchometry nabízí možnost takovéhoto využití. Jak už bylo uvedeno, Sketchometry, primárně určená pro výuku matematiky, byla vytvořena záměrně za účelem využívání na dotykových zařízeních. Až poté byla upravena tak, aby ji bylo možné používat i na počítači. Systém gest pro kreslení geometrických konstrukcí, který autoři vyvinuli je naprosto unikátní a je pro tento program charakteristický. Přehled všech gest je dostupný na stránce sketchometry.org. Autoři článku se přesvědčili, že provádění konstrukcí pomocí těchto gest je intuitivní a k získání uživatelské jistoty ovládání programu stačí poměrně krátký čas. Další z výhod aplikace je bezplatná dostupnost její instalace pro nejrozšířenější operační systémy Android, iOS a Windows. Sketchometry je dostupná ve více než patnácti jazycích, od roku 2016 též v češtině.

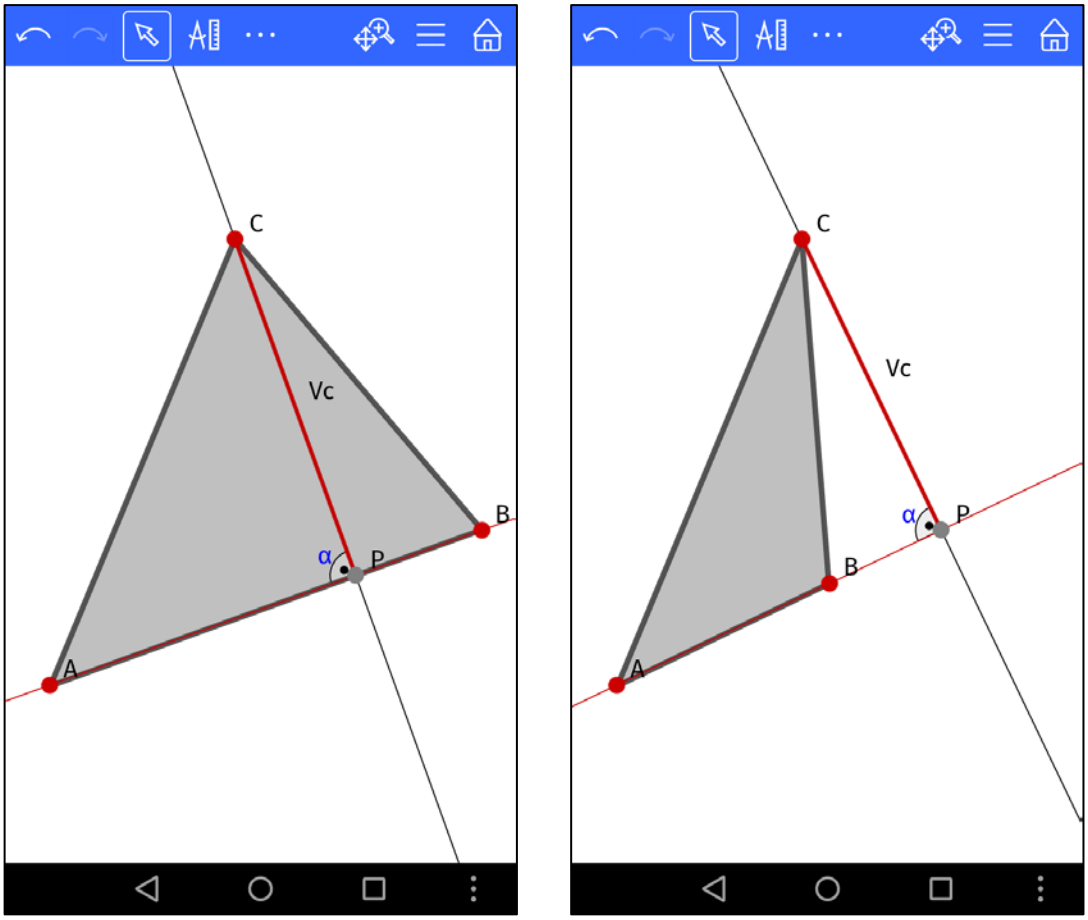
Řešení úloh v programu Sketchometry

Instalační soubory spolu s dokumentací a instruktážními videi v angličtině nebo v němčině najde zájemce na stránce sketchometry.org. V českém jazyce je jako úvodní příručka programu Sketchometry dostupná práce [5], která poskytuje zevrubný popis celé aplikace, přehled všech gest a pět podrobně řešených ukázkových úloh. Kromě seznámení s prostředím programu a s jeho ovládáním je významná část práce věnována jednotlivým gestům. U každého z nich je podrobně popsán tah, jakým je gesto realizováno. Postupy konstrukcí ukázkových úloh jsou popsány tak, aby je mohl čtenář krok za krokem realizovat a tak se naučil program ovládat.

Těžiště trojúhelníku

Vezměme si na ukázku jeden konkrétní příklad. V sedmém ročníku základní školy se žáci více věnují konstrukčním úlohám a diskusi jejich řešitelnosti. Prakticky se tak setkávají s pojmy, které již znají, ale jejichž skutečnou roli ještě nemají dostatečně osvojenou. Příkladem může být pojem výška. Je celkem obvyklým jevem, že žáci nijak nerozlišují vlastnosti výšky od v jejich očích jí blízké těžnice. Vědí, že těžnice, uvažovaná jako úsečka spojující vrchol se středem protilehlé strany, leží uvnitř trojúhelníku. Stejnou vlastnost pak přisuzují i výšce. Tento poznatek mnohdy odvozují z obrázku, v němž samozřejmě s dobrými úmysly zobrazí „ideální“ ostroúhlý trojúhelník. V tomto případě je na místě využít právě dynamickou konstrukci. V prostředí aplikace Sketchometry vytvoříme nejprve „bezproblémový“ ostroúhlý trojúhelník odpovídající většině žákovských náčrtků, potom však společně pomocí přemisťování jeho vrcholů v prostředí dynamické geometrie převedeme tento ideální trojúhelník na trojúhelník

tupoúhlý, viz Obr. 1. Během dynamických změn obrázku si žáci samozřejmě všímají i změn průběhu výšek trojúhelníku. Po této počáteční expozici protipříkladem pak využijeme dynamické prostředí programu k soustředěnému zkoumání daného jevu a k jeho závěrečnému shrnutí.



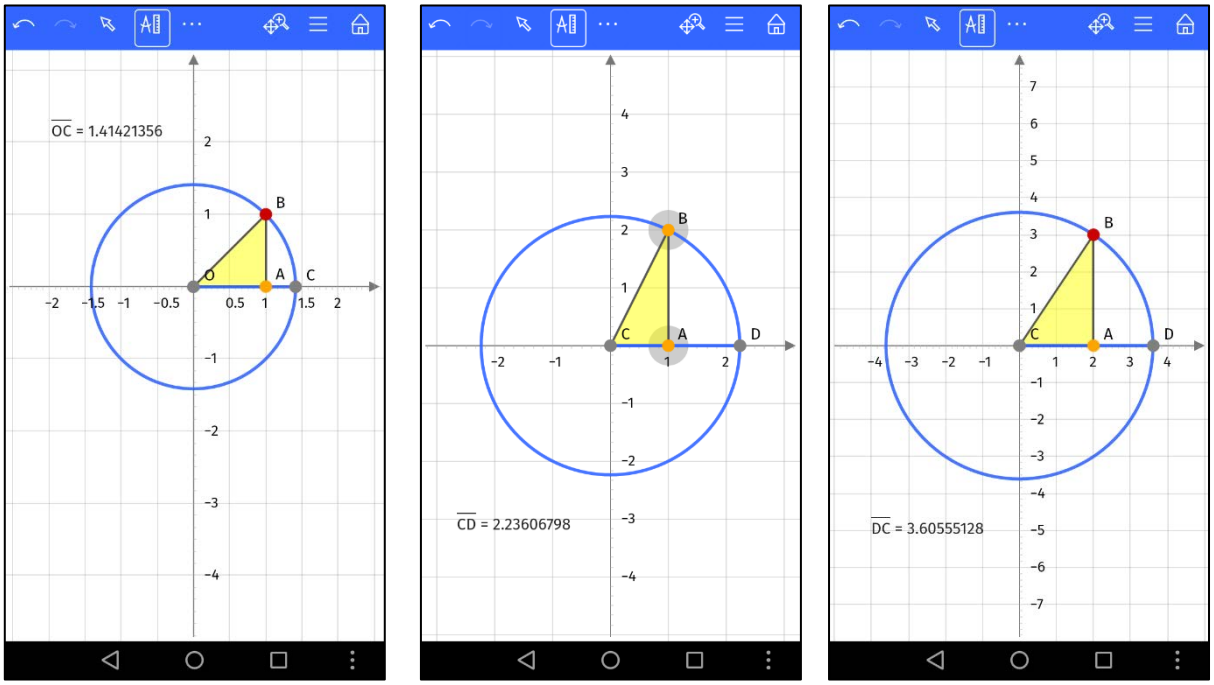
Obr. 1: Trojúhelník v prostředí dynamické geometrie Sketchometry; výška uvnitř trojúhelníku (vlevo) vs. výška vně trojúhelníku (vpravo)

Existuje řada podobných úloh, kdy rychlé a ničím nekomplikované použití programu dynamické geometrie během výuky napomůže žákům ve snazším a správném pochopení příslušného geometrického jevu. Snadná dostupnost programu pak může vést i k tomu, že si žáci sami úlohu promyslí a pomocí dynamických pohybů odhalí podstatu jejího řešení i podmínky její řešitelnosti.

Druhá odmocnina přirozeného čísla

Úkolem v dalším příkladu je sestrojit úsečku délky $\sqrt{k}$, kde $k \in Z^+$. Začneme s iracionálním číslem $\sqrt{2}$ a s využitím znalosti Pythagorovy věty hledáme snadno sestrojitelný pravoúhlý trojúhelník, jehož jedna strana má tuto délku. Tak dojdeme k rovnoramennému pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami 1. Jak naznačují náhledy nákresny Sketchometry na Obr. 2, využijeme toto prostředí k následným konstrukcím úseček délek $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$ apod. Geometrická

konstrukce úseček daných délek může být doplněna jejich přibližnými, numericky vypočítanými, hodnotami.



Obr. 2: Konstrukce úsečky délky $\sqrt{k}$; $k \in Z^+$

Závěr

Z představených příkladům je zřejmé, že program Sketchometry má potenciál pro efektivní využití ve výuce. Tato skutečnost již byla prokázána v praxi, jak nasvědčují poznatky z gymnázia Bayreuth dokumentované v [4].

Literatura:

[1] Tablet PCs set to outgrow notebooks as new growth catalyst [online]. *iTers IT Eco Map & News Navigator* Copyright © 2012 iTers News All [cit. 28. 11. 2017]. Dostupné z http://itersnews.com/?p=7594

[2] Velké změny! Prodej počítačů po pěti letech znovu roste a na špici je nový lídr [online]. *Connect!* [cit. 28. 11. 2017]. Dostupné z https://connect.zive.cz/bleskovky/velke-zmeny-prodej-pocitacu-po-peti-letech-znovu-roste-a-na-spici-je-novy-lidr/sc-321-a-187149/default.aspx

[3] MŠMT chystá projekt digitalizace škol, MŠMT ČR. MŠMT ČR [online]. Copyright ©2013 [cit. 1. 12. 2017]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/ministerstvo/novinar/msmt-chysta-projekt-digitalizace-skol

[4] Mathematik mit dem Finger - Markgräfin-Wilhelmine-Gymnasium Bayreuth. Homepage - Markgräfin-Wilhelmine-Gymnasium Bayreuth [online]. Copyright © 2013 MWG [cit.

1. 12. 2017]. Dostupné z: http://www.mwg-bayreuth.de/Aktuelles_aus_den_Fachbereichen/items/Fingermathe.html

[5] Padrtová (Košinová), M. *Program Sketchometry ve výuce matematiky*. Bakalářská práce. Katedra matematiky PF JU v Českých Budějovicích, 2016. Dostupné z http://home.pf.jcu.cz/~upvm/2017/index.php/program-konference/

[6] Tablety do škol [online]. *RVP Metodický portál* [cit. 1. 12. 2017]. Dostupné z https://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=11627

Marie Košinová
Jihočeská univerzita v Č. B.
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: m4kosinova@seznam.cz

Roman Hašek
Jihočeská univerzita v Č. B.
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: hasek@pf.jcu.cz

AUTOMATED REASONING TOOLS IN GEOGEBRA: A NEW APPROACH FOR EXPERIMENTS IN PLANAR GEOMETRY

Zoltán Kovács

Private Pädagogische Hochschule der Diözese Linz

Abstract: Computing numerical checks of certain relations between geometric objects in a planar construction is a well known feature of dynamic geometry systems. GeoGebra's newest improvements offer symbolic checks of equality, parallelism, perpendicularity, collinearity, concurrency or concyclicity. Also dragging of locus curves, defined explicitly or implicitly (or as an envelope curve) is a new feature in GeoGebra to visually check conjectures in planar geometry. By combining plotting and proving we can focus on some new possibilities to teach Euclidean geometry in the classrooms.

Key words: Dynamic geometry, automated deduction in geometry, Gröbner bases, mathematics education, locus, envelope.

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/Kovacs.pdf

POUŽITÍ LOGARITMU PŘI VÝPOČTU PH

Bc. Michaela Kovaříková

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Přírodovědecká fakulta,
Ústav matematiky a biomatematiky

Abstrakt: Článek propojuje vybrané poznatky z chemie s odpovídajícími matematickými znalostmi na středoškolské úrovni. Připomeneme pojmy logaritmická funkce, kyselina, zásada, kyselost a zásaditost rozotku a vysvětlíme důvody pro zavedení stupnice pH. Dále zmíníme problematiku zjištění koncentrace H^+/OH^- iontů v roztoku, vysvětlíme využití logaritmické funkce při výpočtech pH, pOH, a obdobné použití této funkce na poli chemie. Závěrem zmíníme případy měření pH v běžném životě, uvedeme sérii řešených příkladů výpočtu pH, a navrhneme praktický pokus.

Klíčová slova: logaritmická funkce, kyseliny, zásady, pH stupnice, výpočet pH

Use of logarithm for calculation of pH

Abstract: The article connects selected knowledge from chemistry with mathematical knowledge at level of high school. In the introduction we recall the terms logarithmic function, acid, base, acidity and alkalinity of the solution and explain the reasons for introducing the pH scale. Next, we mention the problem with the determination of the concentration of H^+/ OH^- ions in solution, explain the use of the logarithmic function in pH and pOH calculations and mention similar use of this function pn a field of chemistry. Finally, we mention cases of pH measurement in everyday life, present a series of solved examples of pH calculations and propose a practical experiment. The text is in Czech language.

Keywords: logarithmic function, acids, bases, pH scale, pH calculation

Úvod

Častým problémem ve výuce přírodovědných a technicky zaměřených předmětů je tendence studentů memorovat jednotlivé poznatky bez širších souvislostí. Studenti pak takto nabyté znalosti používají jen s těžkostmi, převážně nejsou schopni jejich aplikace na jiné než modelové příklady, a také dochází k jejich rychlejšímu zapomínání. Na tuto skutěčnost snad nejvíce narážejí vyučující matematiky, která ze své podstaty vyžaduje znalost předešlého učiva k uchopení toho navazujícího.

V dnešním vzdělávání je proto často kladen důraz na mezipředmětové propojování učiva a uvádění praktického využití právě osvojovaných znalostí. Toto se v mnohých případech osvědčilo nejen jako výrazný motivační prostředek, ale také právě jako způsob, jak studentům umožnit snadnější zapamatování a pochopení učiva v souvislostech.

V článku je připraven podklad pro vyučovací hodinu propojující výuku matematiky a chemie. Konkrétně použití logaritmické funkce při výpočtu pH a pro zaznamenávání některých dalších chemických veličin. Řazení následujícího textu je současně i návrhem, jak by bylo vhodné vyučovací hodinu koncipovat s ohledem na to, aby mohli studenti snadněji navázat nové myšlenky na již získané poznatky. Zároveň je podklad psán s ohledem na učitele, jejichž aprobací není matematika či chemie, a popisuje problematiku od základů. Je tedy možné použít text také jako podklad pro žákovský referát/projekt.

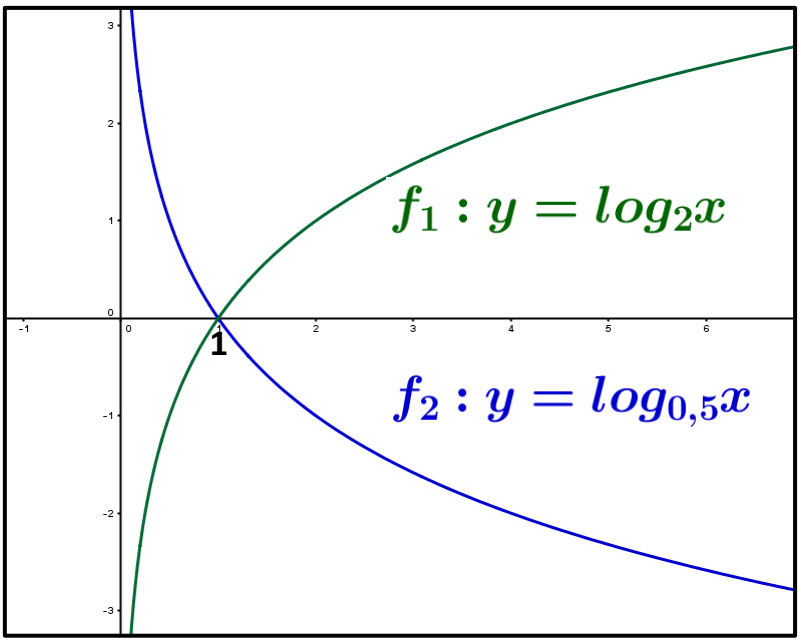
Nejprve je vhodné zaměřit se na připomenutí potřebných znalostí o logaritmu a významu hodnoty pH. Dalším krokem je již samotné vysvětlení důvodu pro využívání záporného logaritmu při výpočtu pH/pOH z koncentrace H^+/OH^- iontů. Jelikož si studenti často logaritmickou funkci představí spíše jako jakousi magickou krabičku, která „vykouzlí hezká čísla“, je vhodné celé zdůvodnění podložit graficky. Na závěr studentům ukážeme další využití logaritmu v chemii opírající se o stejný princip, situace z běžného života, ve kterých se studenti mohou setkat s měřením Ph, a uzná-li vyučující za vhodné, procvičíme počítání s logaritmem a změříme pH některých běžných tekutin.

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce o základu a je funkce, která je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, kde a je libovolné kladné číslo různé od jedné. Tato funkce se značí $\log_a x$ a čte se jako logaritmus x o základu a. Definiční obor exponenciální funkce $f: y = a^x$ je množina všech reálných čísel a její obor hodnot interval $(0; +\infty)$. Z toho plyne, že definiční obor logaritmické funkce f^{-1} je $(0; +\infty)$.

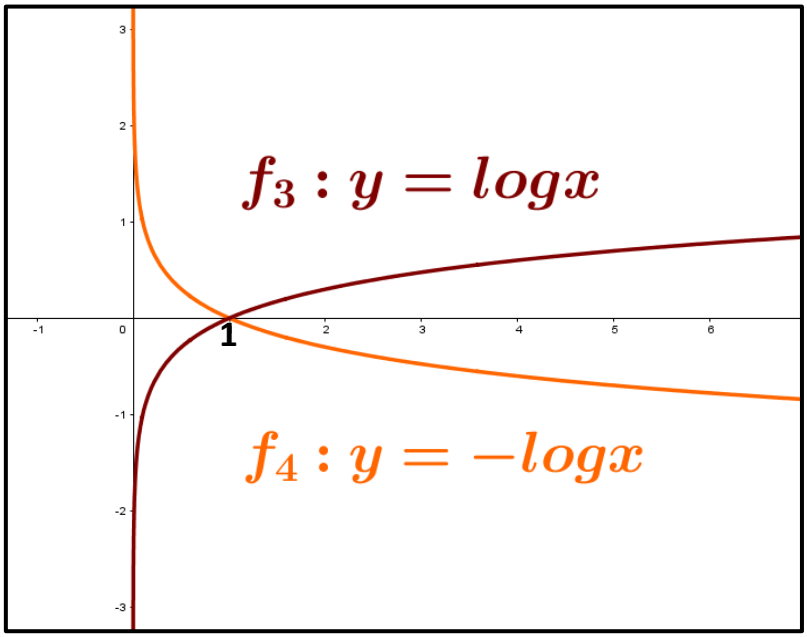
Stejně jako pro exponenciální funkci i u logaritmické je monotonie funkce závislá na velikosti základu a. Pokud platí, že $a > 1$ pak je funkce rostoucí, a pokud $0 < a < 1$ funkce je klesající. V obou případech se jedná o prostou funkci. Na Obrázku 1 je zobrazena rostoucí logaritmická funkce $f_1: y = \log_2 x$ a klesající funkce $f_2: y = \log_{0,5} x$. Logaritmická funkce není omezená ani shora, ani zdola, nemá maximum a minimum a funkční hodnota v bodě 1 je rovna 0. [1]

Všimněme si, že na intervalu $(0;\ 1)$ je funkce f_1 (f_2) výrazně strmnější než na intervalu $(1;\ +\infty)$, a tedy zde hodnoty výrazně rychleji rostou (klesají).



Obr. 1: Vyobrazení rostoucí logaritmické funkce f_1 a klesající logaritmické funkce f_2.

Nejčastěji využívaným logaritmem je dekadický logaritmus. Dekadický logaritmus je logaritmus o základu deset a můžeme využívat zkráceného zápisu $\log_{10} x = \log x$. Z definice plyne, že dekadická logaritmická funkce je funkcí rostoucí. Po vynásobení této funkce mínus jedničkou získáme funkci klesající. Viz Obrázek 2.



Obr. 2: Vyobrazení kladného dekadického ligaritmu y_3 a záporného dekadického logaritmu y_4.

Kyseliny a zásady

Nejčastěji užívaná definice kyselin a zásad vychází z Brønstedovy teorie. Podle této teorie je kyselina definována jako látka schopná předávat proton jiné látce a zásada jako látka schopná přijímat proton od jiné látky. Jinými slovy je kyselina donorem protonu a zásada jeho akceptorem. Proton v chemických rovnicích často zapisujeme jako H^+, tedy vodík zbavený jediného jeho elektronu. Jelikož však naprostá většina reakcí probíhá ve vodném roztoku a H^+ je vysoce reaktivní, dochází k téměř okamžitému navázání tohoto vodíkového kationtu na molekulu vody. Mnohdy je proto proton zapisován také jako H_3O^+.

Z předešlé definice je vidět, že látka se může zachovat jako kyselina jen v přítomnosti zásady, která by přijala odštěpený proton. Přesto však i čistá látka v tekutém stavu odštěpuje protony. Bez přítomnosti látky, která by tyto protony přijala nedojde k žádné reakci, jen k znovu navázání protonů, ale koncentrace H^+ iontů určuje potenciál čisté látky stát se kyselinou. Tento jev neustále probíhá například také v čisté vodě. Jednotlivé molekuly vody do sebe ustavičně narážejí, a proto se stane, že se některé z nich rozpadnou. V prostředí se ale vyskytuje více rozpadlých molekul, a tak dojde k tomu, že se částice opět spojí do molekuly vody. Tento jev se nazývá disociace vody a lze jej zapsat následující rovnicí:

$$H_2O \leftrightarrow H^+ + OH^- \qquad \text{nebo také} \qquad H_2O + H_2O \leftrightarrow H_3O^+ + OH^-$$

V každé čisté látce či roztoku dojde k ustanovení rovnováhy, kde jsou zastoupeny neutrální (celé) molekuly, záporné a kladné ionty (disociované molekuly) a jejich koncentrace se nemění. [2]

Výpočet koncentrace kyselých/zásaditých iontů

Víme již tedy, že kyselost roztoku záleží na koncentraci H^+/OH^- iontů. Samotné zjištění této koncentrace je pro určení pH klíčové, ale nemusí být vždy jednoduché.

V případě, kdy se ve vodném roztoku vyskytuje slabá kyselina nebo zásada (např.: kyselina mravenčí, hydroxid hlinitý), nebude docházet k úplné disociaci. To znamená, že koncentrace H^+/OH^- iontů nebude přímo úměrná koncentraci kyseliny/zásady. Pro zjištění koncentrace H^+/OH^- iontů v takovém roztoku je potřeba počítat s disociační konstantou konkrétních kyselin/zásad, které jsou uvedeny v chemických tabulkách (disociační konstanty kyselin – K_a; disociační konstanty zásad – K_b, viz Další využití logaritmu v chemii).

Zjištění koncentrace H^+/OH^- iontů se také komplikuje, pokud se nejedná o vodný roztok kyseliny nebo zásady. Máme-li totiž roztok složený z kyselin a zásad (popřípadě dalších látek), disociované ionty budou reagovat za vzniku solí, a pro výpočet rovnovážných koncentrací budeme muset využít znalosti všech reakčních dějů probíhajících v takovém roztoku.

Tyto dva případy výpočtu jsou o něco komplikovanější a jejich zvládnutí není podmínkou k pochopení důvodu a způsobu zavedení pH stupnice, proto se jimi nebudeme blíže zabývat.

Vyskytuje-li se však ve vodném roztoku silná kyselina/zásada obsahující ve své molekule jediný atom vodíku/jedinou hydroxidovou skupinu, dojde k úplné disociaci, a do roztoku se uvolní všechny ionty. Koncentrace H^+/OH^- iontů bude tedy rovna koncentraci kyseliny/zásady. (Silnou jednosytnou kyselinou je například $HMnO_4$ kyselina manganistá a silnou jednosytnou zásadou NaOH hydroxid sodný.)

Pokud se ve vodném roztoku vyskytuje silná vícesytná kyselina či zásada, tedy kyselina obsahující více než jeden vodík (např.: H_2SO_4 kyselina sírová) nebo zásada s alespoň dvěmi funkčními skupinami OH (např.: $Ca(OH)_2$ hydroxid vápenatý), dojde opět k úplné disociaci. Pro výpočet koncentrace H^+/OH^- iontů je však potřeba vynásobit koncentraci vstupující kyseliny/hydroxidu počtem vodíků či hydroxidových skupin, které obsahuje.

Stupnice pH

Koncentrace H^+/OH^- iontů v roztocích se mění v širokém rozmezí přibližně od 10 do 10^{-15} mol/l. [2]

Představme si tedy, že porovnáváme kyselost tří roztoků, kde koncentrace H^+ inotů prvního roztoku je $c_1 = 3{,}1*10^{-2}$ mol/l = 0,031 mol/l, druhého $c_2 = 6{,}2*10^{-4}$ mol/l = 0,00062 mol/l, a třetího $c_3 = 1{,}8*10^{-5}$ mol/l = 0,000018 mol/l. Je vidět, že takové srovnání je nepraktické, na první pohled není vidět, o kolik je který roztok kyselejší než ty ostatní, a chybí nám celkové „zařazení na škálu“, pro určení zda se jedná o spíše kyselé nebo zásadité roztoky.

Pro přehlednější určení kyselosti roztoku byla v chemii zavedena stupnice pH, která je znázorněna na Obrázku 3. Pro přepočítání koncentrace H^+ iontů na hodnotu pH slouží následující vztah:

$$pH = -\log[\mathrm{H}^+]$$

kde hranatá závorka $[H^+]$ znamená, že počítáme s koncentrací H^+ iontů.

Podle hodnoty pH dělíme roztoky na:

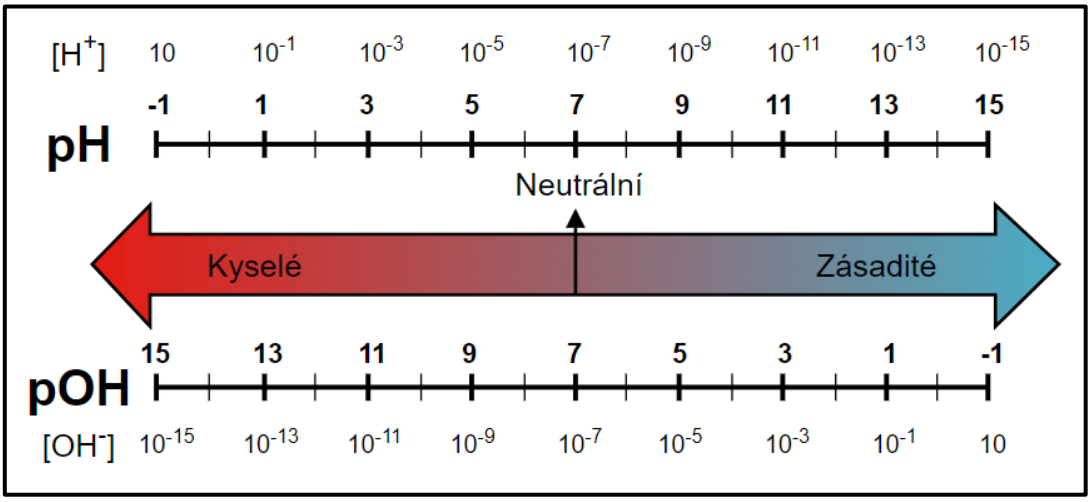
- neutrální pH = 7 → $[H^+] = [OH^-]$
- kyselé pH < 7 → $[H^+] > [OH^-]$
- zásadité pH > 7 → $[H^+] < [OH^-]$

Existuje také stupnice pOH, která se využívá pro výpočet pH, a to v tom případě, pokud neznáme koncentraci H^+ iontů, ale místo toho známe koncentraci OH^- iontů. V takovém případě nejdříve využijeme vztahu:

$$pOH = -\log[\mathrm{OH}^-]$$

kde hranatá závorka $[OH^-]$ znamená, že počítáme s koncentrací OH^- iontů, a získaná hodnota je hodnota na stupnici pOH. Stupnice pOH je také znázorněna na Obrázku 3, na kterém je dobře vidět, že stupnice pH a pOH mají přesně opačný směr. Odečtení správné hodnoty pH, pokud známe pOH již není velký problém. Hodnota pH = 0 odpovídá hodnotě pOH = 14, proto při přechodu ze stupnice pH na pOH postupujeme takto:

$$p\mathrm{OH} = 14 - p\mathrm{H}$$



Obr. 3: Stupnice pH a pOH pro koncentrace H^+ a OH^- iontů v rozmezí od 10 do 10^{-15} mol/l.

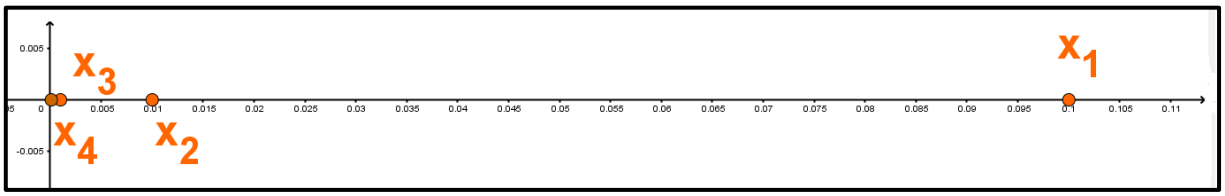
Poznámka:

Často se udává, že stupnice pH nabývá jen hodnot od 0 do 14. Jedním z důvodů je, že koncentrace H^+ iontů dosahuje mezních hodnot 10 mol/l a 10^{-15} mol/l jen v extrémních případech, které nemají široké využití.

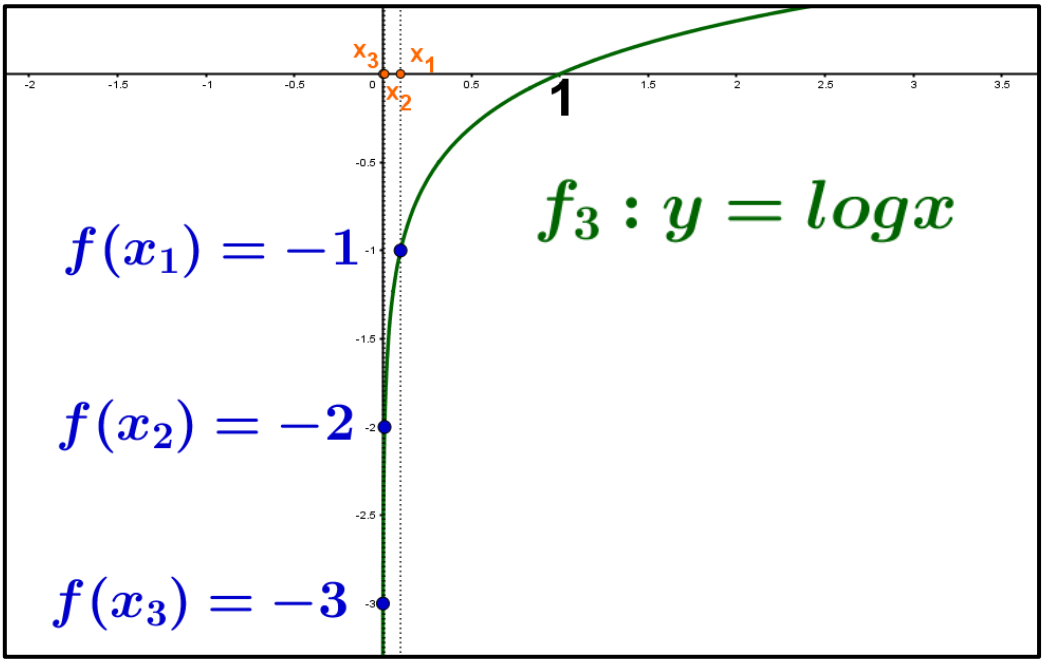
Využití logaritmu pro sestavení stupnice pH

Nyní se podíváme na důvody, proč byl k sestavení stupnice pH použit právě záporný dekadický logaritmus.

Při pohledu na graf funkce f_3: $y = log\ x$, na Obrázku 2, je patrné, že hodnoty této funkce velice strmě rostou na intervalu (0; 1). Právě na tomto intervalu nás hodnoty zajímají, jelikož víme, že koncentrace H^+ iontů se převážně pohybují v tomto rozmezí. Čím nižší je hodnota na ose X, tím strmější bude křivka grafu dané funkce v okolí této hodnoty. Budeme tedy postupně vybírat hodnoty $x_1 = 10^{-1}$, $x_2 = 10^{-2}$, $x_3 = 10^{-3}$ a $x_4 = 10^{-4}$. Na Obrázku 4 můžeme vidět, že čím menší hodnoty volíme, tím menší vzdálenosti jsou mezi nimi. Jak už ale víme, čím menší hodnotu x dosadíme do funkce $y = log\ x$, tím strměji budou klesat hodnoty y. Na Obrázku 5 jsou znázorněny vypočítané hodnoty funkce f_3 pro $x_1 = 10^{-1}$, $x_2 = 10^{-2}$ a $x_3 = 10^{-3}$, které jsou $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = -2$ a $f(x_3) = -3$.

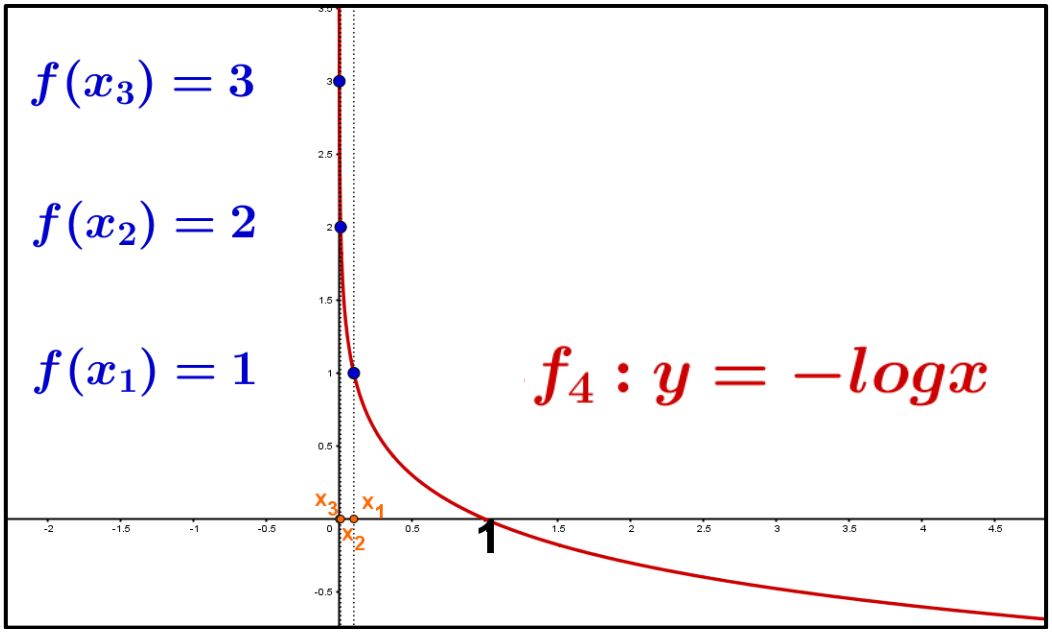


Obr. 4: Rozložení bodů x_1, x_2, x_3 a x_4 na ose X.



Obr. 5: Hodnoty funkce $y = log\ x$ pro pro $x_1 = 10^{-1}$, $x_2 = 10^{-2}$ a $x_3 = 10^{-3}$.

Z původních hodnot x_1, x_2 a x_3, jsme pomocí logaritmické funkce získali „hezčí čísla“. Tato čísla mají navíc tu výhodu, že vzdálenosti mezi nimi jsou konstantní, a tak by mohla dát za vznik lineární stupnici. Pro tvorbu stupnice by ale bylo lepší použít kladná čísla. Proto byl pro tvorbu stupnice pH použit záporný logaritmus, jehož hodnoty jsou na intervalu (0; 1) kladné. Tato skutečnost je znázorněna na Obrázku 6.



Obr. 6: Hodnoty funkce $y = -log\ x$ pro pro $x_1 = 10^{-1}$, $x_2 = 10^{-2}$ a $x_3 = 10^{-3}$.

Při výpočtu pH budeme vždy dosazovat hodnoty v rozmezí od 10 do 10^{-15} mol/l. Spočítáme-li si hodnotu záporného dekadického logaritmu pro každý řád z tohoto intervalu (každé přidané desetinné místo), získáme hodnoty zaznamenané v Tabulce 1. Grafickým zpracováním Tabulky 1 je Obrázek 3, zobrazující stupnici pH a pOH.

Tab. 1: Základní hodnoty záporného dekadického logaritmu na intervalu (10^{-15}; 10).

x_n	10	$1 = 10^0$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}
f(x) = -log x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Hlavní výhodou toho, že pro určení pH využíváme dekadický logaritmus, tedy logaritmus o základu 10, je snadnost počítání s tímto logaritmem. K výpočtu záporných dekadických logaritmů pro hodnoty x_n zadané v Tabulce 1 není potřeba ani kalkulačky a lze je spočítat z hlavy, protože se vždy řídí podle exponentu čísla 10 (počtu desetiných míst). V praxi nebudeme vždy počítat s takovýmito čísly, přesto je díky dekadickému logaritmu možno výsledek alespoň řádově odhadnout. V některých případech v laboratoři, kdy například potřebujeme vědět jen zda se jedná o kyselé či zásadité prostředí, tento odhad naprosto stačí. Toto si ověříme v následujícím příkladě:

$$z_1 = 2{,}15*10^{-4} \quad \rightarrow \quad g_1 = -\log(2{,}15*10^{-4}) = \underline{3{,}67}$$

$$z_2 = 8{,}95*10^{-4} \quad \rightarrow \quad g_2 = -\log(8{,}95*10^{-4}) = \underline{3{,}05}$$

Obě čísla z_1 a z_2 mají stejný řád 10^{-4} (stejný počet desetinných míst), tento fakt již stačí k určení toho, že se bude jednat o kyselé pH. Dále je vidět, že z_1 je bližší číslu $1*10^{-4}$, pro které by pH vyšlo 4, a z_2 je blíže k číslu $1*10^{-3}$, pro které se pH rovná 3. Můžeme tak ještě zpřesnit náš odhad hodnoty pH.

Další využití logaritmu v chemii

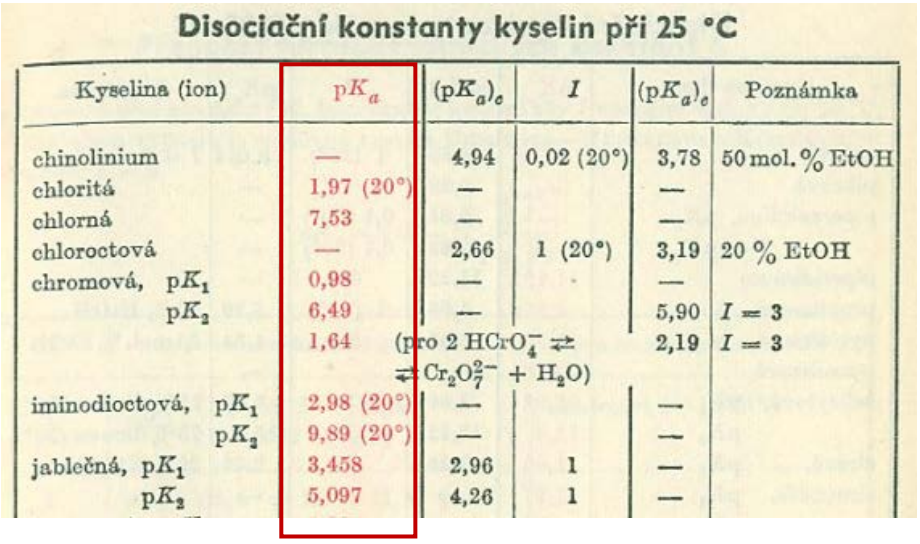
V chemii je často potřeba zapsat nízké hodnoty. Využívá se proto také záporný dekadický logaritmus, kterým lze tyto hodnoty zapsat snadněji a bez ztráty na přesnosti. V chemický tabulkách můžete nalézt například tyto konstatnty:

- disociační konstanty kyselin K_a
- disociační konstanty zásad K_b
- součin rozpustnosti anorganických látek K_s
- konstanty stability komplexů K_1-K_6

Hodnota těchto konstant se však udává jako pK, a lze je získat ze vztahu

$$pK = -\log K\ .$$

Disociační konstanty kyselin a zásad K_a a K_b slouží k výpočtům koncentrací kyselých či zásaditých iontů u slabých kyselin a zásad. Určují nám, jaké množství iontů disociuje, a tedy ovlivní pH roztoku. Příklad konkrétních konstant pK_a je na Obrázku 7. Na Obrázku 7 je udána hodnota pK_a pro kyselinu chlornou 7,53. Po přepočtu na původní hodnotu získáme $K_a=2{,}951209227*10^{-8}$ a jasně tedy vidíme, že zápis pomocí pK_a je kratší, a bude se s ním lépe počítat.

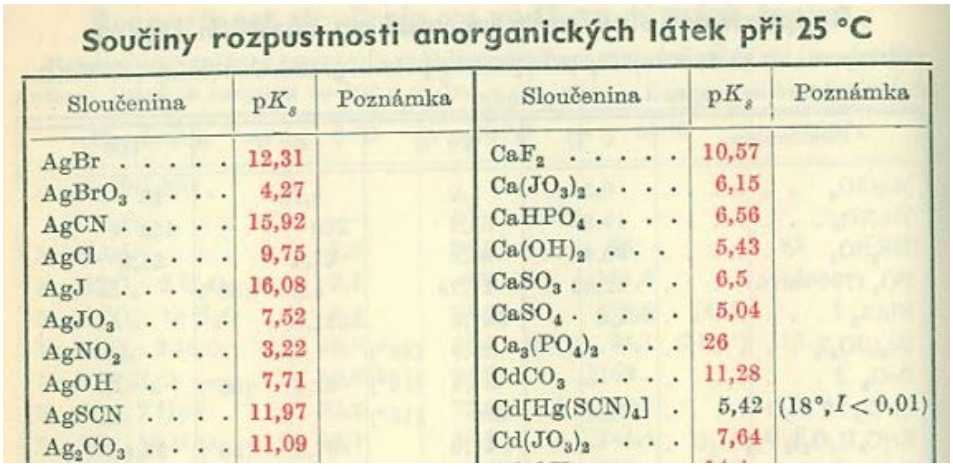


Disociační konstanty kyselin při 25 °C

Kyselina (ion)	pK_a	$(pK_a)_c$	I	$(pK_a)_c$	Poznámka
chinolinium	—	4,94	0,02 (20°)	3,78	50 mol. % EtOH
chloritá	1,97 (20°)	—		—	
chlorná	7,53	—		—	
chloroctová	—	2,66	1 (20°)	3,19	20 % EtOH
chromová, pK_1	0,98	—		—	
pK_2	6,49	—		5,90	$I = 3$
	1,64	(pro $2\,HCrO_4^- \rightleftarrows Cr_2O_7^{2-} + H_2O$)		2,19	$I = 3$
iminodioctová, pK_1	2,98 (20°)	—		—	
pK_2	9,89 (20°)	—		—	
jablečná, pK_1	3,458	2,96	1	—	
pK_2	5,097	4,26	1	—	

Obr. 7: Tabulka disociačních konstant kyselin. [3]

Konstanta součinu rozpustnosti anorganických látek K_s udává množství látky, které je možné za standardních podmínek rozpustit v daném rozpouštědle. Obrázek 8 znázorňuje některé konkrétní sloučeniny a záporné dekatické logaritmy jejich konstant rozpustnosti.



Součiny rozpustnosti anorganických látek při 25 °C

Sloučenina	pK_s	Poznámka	Sloučenina	pK_s	Poznámka
$AgBr$	12,31		CaF_2	10,57	
$AgBrO_3$	4,27		$Ca(JO_3)_2$	6,15	
$AgCN$	15,92		$CaHPO_4$	6,56	
$AgCl$	9,75		$Ca(OH)_2$	5,43	
AgJ	16,08		$CaSO_3$	6,5	
$AgJO_3$	7,52		$CaSO_4$	5,04	
$AgNO_2$	3,22		$Ca_3(PO_4)_2$	26	
$AgOH$	7,71		$CdCO_3$	11,28	
$AgSCN$	11,97		$Cd[Hg(SCN)_4]$	5,42	(18°, $I < 0{,}01$)
Ag_2CO_3	11,09		$Cd(JO_3)_2$	7,64	

Obr. 8: Tabulka součinu rozpustnosti anorganických látek. [3]

Konstanty stability komplexů K_1-K_6 určují pevnost komplexů, a tedy jejich rezistenci vůči rozpadu na jednotlivé části: centrální atom a ligandy. Koeficienty 1-6 slouží k rozlišení komplexů, které se od sebe liší počten navázaných ligandů.

Měření pH v běžném životě

S měřením hodnoty pH se můžeme běžně setkat i mimo chemickou laboratoř. Kyselost či zásaditost je potřeba určovat v:

- akvárium:
  - výraznější výkyvy pH by způsobily nerovnováhu plynů rozpuštěných ve vodě, což by mohlo způsobit až uhynutí živočichů a rostlin
- bazén:
  - příliš kyselé pH vody dráždí oči a bělí barvy (stěny bazénu, plavky), při zásaditém pH se z vody uvolňuje chlór (který přidáváme jako dezinfekci) a bazén nepříjemně páchne
- organismus
  - překyselení organizmu způsobuje, že se tělo, ve snaze o vyrovnání pH, nadbytečně zbavuje zásaditých iontů, tělo má poté nedostatek například hořečnatých iontů Mg^{2+}, které jsou nezbytné pro fungování svalů, nedostatek se může projevovat formou častých svalových křečí
  - lze zjistit monitorováním pH moči, během dne se však pH moči přirozeně mění, a proto je potřeba vícenásobného měření

Řešené příklady

Jak již bylo zmíněno, nejnáročnější částí při výpočtu pH bývá zjištění koncentrace disociovaných H^+ iontů. Tato problematika je příliš rozsáhlá, a proto se vyskytuje v nenáročné formě jen u posledního příkladu č. 4. Příklady jsou zaměřeny na vyzkoušení si práce s logarimickou funkcí a k němu inverzní exponenciální funkcí.

U každého příkladu určete, zda se jedná o kyselý, zásaditý či neutrální roztok.

Příklad č. 1:

Jaké je pH roztoku, jehož koncentrace kyselých iontů se rovná $4{,}6*10^{-11}$ mol/l? (Zaokrouhlete na jedno desetinné místo.)

Řešení: $pH = -log[H^+] = -log[4{,}6 * 10^{-11}] = 10{,}3$

zásaditý roztok

Příklad č. 2:

Koncentrace H^+ iontů ve vodném roztoku je 10^{-2} mol/dm^3. Vypočítejte pH roztoku a koncentraci iontů OH^-.

Řešení:

$$pH = -log[H^+] = -log[10^{-2}] = 2$$

$$pOH = 14 - pH = 14 - 2 = 12$$

$$pOH = -log[OH^-]$$

$$\Rightarrow [OH^-] = 10^{-12} = 1 * 10^{-12}\ mol/l$$

kyselý roztok

Příklad č. 3:

Určete koncentraci H^+ a OH^- iontů v roztoku o pH = 8,6. (Zaokrouhlete na tři desetinná místa.)

Řešení:

$$pH = 8{,}6 = -log[H^+]$$

$$\Rightarrow [H^+] = 10^{-8{,}6} = 2{,}512 * 10^{-9}\ mol/l$$

$$pOH = 14 - pH = 14 - 8{,}6 = 5{,}4$$

$$\Rightarrow [OH^-] = 10^{-5{,}4} = 3{,}981 * 10^{-6}\ mol/l$$

zásaditý roztok

Příklad č. 4:

Byl odměřen 1 ml roztoku HNO_3 o koncentraci 1 mol/l a zředěn v odměrné baňce na 1000 ml. Jaké je pH výsledného roztoku? (Víme, že HNO_3 je silná kyselina.)

Řešení:

V 1 ml roztoku o koncentraci 1 mol/l se nachází 1/1000 mol = 10^{-3} mol kyseliny.

Koncentrace výsledného roztoku je c = 10^{-3} mol/l.

Koncentrace silné kyseliny se rovná koncentraci kyselých iontů

$$\Rightarrow [H^+] = 1 * 10^{-3}\ mol/l$$

$$pH = -log[H^+] = -log[10^{-3}] = 3$$

kyselý roztok

Praktický pokus

Zadání:

Odhadněte, jaké bude pH těchto běžně dostupných tekutin: voda z vodovodu, převařená voda, mýdlová voda, ocet, mléko, citrónová šťáva, Coca-Cola. Použijte lakmusový papírek pro změření hodnoty pH u každé z nich a hodnoty si zaznamenejte. Slovně okomentujte výsledky.

Výsledky:

- Kyselé pH:
  - citrónová šťáva – slabá kyselina
  - ocet – silnější kyselina (záleží na koncentraci)
  - Coca-Cola – podobné pH jako ocet
- Zásadité pH:
  - mléko – slabá zásada
  - mýdlová voda – silnější zásada (záleží na zředěnosti)
- Neutrální pH:
  - voda z kohoutku
  - převařená voda

Komentář:

Cirónová šťáva obsahuje kyselinu citrónovou, která se řadí mezi slabé kyseliny.

Ocet je známou kuchyňskou kyselinou, překvapující může být, že oblíbená limonáda Coca-Cola má velice podobné pH. Je to jeden z důvodů proč musí obsahovat velké množství sladidel, jinak by nám nechutnala. Povlak a zvláštní pocit na zubech po vypití Coca-Coly je způsoben naleptáním zubní skloviny.

Mléko obsahuje laktózu, také známou jako mléčný cukr. Cukry obsahují OH skupiny a jsou to převážně zásadité látky.

V mýdle se nacházejí zásadité ionty, které jsou jedním z důvodů, proč pomocí mýdla smyjeme i mastné nečistoty.

Čistá voda má neutrální pH, přechod varem nemá na tuto vlastnost vliv.

Závěr

Článek propojuje znalosti o zásadách a kyselinách s matematickým učivem o logaritmických funkcích a jejich inverzních-exponenciálních funkcích. Látka je rozšířena o další poznatky v širším kontextu, navrhuje praktická cvičení na vyzkoušení si práce s logaritmem, a zmiňuje příklady z běžného života, které vyžadují měření pH.

Poděkování

Děkuji Ústavu matematiky a biomatematiky při Jihočeské univerzitě, díky kterému jsem se mohla zůčastnit práce na didaktickém projektu vyučování STEM, v rámci kterého vznikal tento článek.

Literatura:

[1] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia – Funkce*. Prometheus Praha, 1994.

[2] Vacík, J., Barthová, J., Pacák, J., Strauch, B., Svobodová, M., Zemánek, F.: *Přehled středoškolské chemie*.SPN – pedagogické nakladatelství, a. s., 1995.

[3] Sýkora, V., Zátka, V.: *Příruční tabulky pro chemiky*. SNTL – nakladatelství technické literatury, 1967.

Grafické podklady zpracovány v programu GeoGebra (www.geogebra.org) a Smart Draw (www.smartdraw.com).

Bc. Michaela Kovaříková
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a biomatematiky
Branišovská 31
370 05 České Budějovice
e-mail: michaela.kovarikova@centrum.cz

PROGRAMOVÁNÍ VÝPOČTŮ ŠKOLSKÉ MATEMATIKY

Jitka Laitochová, David Nocar

Katedra Matematiky PdF UP Olomouc

Abstrakt: Výzkum Analýza vzdělávacích potřeb učitelů matematiky Olomouckého kraje provedený Katedrou matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého ukázal, že mezi nejžádanější témata patří právě „Využívání ICT ve výuce matematiky“. V článku se seznámíme s nabídkou předmětů zaměřených na využívání ICT v rámci oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání a navazujícího oboru Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy, zvláště s předmětem nazvaným Algoritmizace a programování výpočtů.

Klíčová slova: Školská matematika, informační a komunikační technologie, algoritmizace, programování.

Programming calculations of school mathematics

Abstract: The research Analysis of Educational Needs of Mathematics Teachers of the Olomouc Region, conducted by members of the Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University, showed that the topic “Use of ICT in teaching mathematics” is highly requested. In the article we will get acquainted with the present offer of courses focused on ICT and computer assisted courses for Mathematics Teaching students, especially with the subject Algorithmization and programming of calculations.

Key words: School mathematics, information and communication technologies, algorithmization, programming.

Úvod

Žijeme v době používání informačních a komunikačních technologií. Téma „Využívání ICT ve výuce matematiky“, jak ukázal dále popsaný výzkum Analýza vzdělávacích potřeb učitelů matematiky Olomouckého kraje v regionu střední Moravy, patří mezi nejžádanější. Můžeme říct, že současná nabídka Katedry matematiky Pedagogické fakulty UP v Olomouci pro budoucí učitele 2. stupně odpovídá zájmu učitelů a potřebám doby. Seznámíme se s nabídkou počítačem podporovaných předmětů a předmětů zaměřených na ICT, blíže pak s předmětem Algoritmizace a programování výpočtů, jehož cílem je seznámit studenty s algoritmickým myšlením, které je nezbytné jak pro tvorbu fungujícího programového vybavení, tak pro pochopení obecných principů již hotových profesionálních produktů [1].

Výzkumné šetření

Budeme se zabývat částí výsledků širšího výzkumného šetření Analýza vzdělávacích potřeb učitelů matematiky Olomouckého kraje v regionu střední Moravy, které Katedra matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci realizovala ve školním roce 2015/2016 na základních školách [2]. Cílem tohoto šetření bylo identifikovat vzdělávací potřeby učitelů matematiky Olomouckého kraje s důrazem na aktuální společenskovědní témata současné doby. Výzkum byl zaměřen na možný rozvoj pedagogicko-psychologických a diagnostických kompetencí učitelů, odborně didaktických kompetencí učitelů a rozvoj kompetencí učitelů v oblasti informačních a komunikačních technologií. Do rozvoje odborně didaktických kompetencí bylo zahrnuto řešení nestandardních úloh v matematických soutěžích, samostatná tvorba matematické úlohy, projektové vyučování, outdoorová výuka matematiky a integrace obsahového a jazykového vzdělávání. Šetření proběhlo jednak pro potřeby rozšíření nabídky předmětů v rámci dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků, jednak jako reflexe současné skladby matematické komponenty studijní nabídky realizované v prezenční i kombinované formě Katedrou matematiky Pedagogické fakulty UP v rámci pregraduální přípravy budoucích učitelů ZŠ.

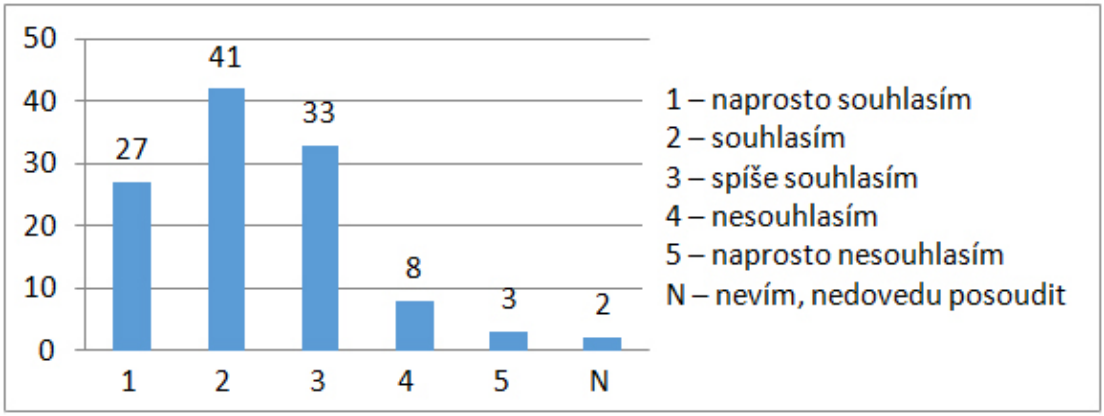
Učitelé ze škol v Olomouckém kraji byli osloveni buď elektronicky (nízká návratnost dotazníků), nebo osobně členy realizačního týmu (vysoká návratnost dotazníků). Vzorek šetření zahrnuje 114 respondentů. Analýzy a grafické výstupy byly zpracovány v programech Microsoft Excel a Statistica.

Dotazníkové položky byly rozděleny do dvou částí. V první části byly zjišťovány potřebné informace o osobě respondenta - pohlaví, věk, délka učitelské praxe, způsob a preferovaná forma dalšího vzdělávání. V druhé části bylo obsaženo 37 dotazníkových položek, formulovaných jako tvrzení, kdy respondent mohl pomocí pětistupňové škály označit míru svého souhlasu s uvedeným tvrzením, kde hodnota 1 označovala naprostý souhlas, hodnota 5 naopak naprostý nesouhlas. Respondenti měli taktéž možnost zvolit „nevím, nedovedu odpovědět“. Poslední, volitelná, položka byla formulovaná jako volná odpověď, coby doplnění dotazníku o položku s vysokou důležitostí pro respondenta, která však v dotazníku nebyla zahrnuta. Tuto možnost žádný z respondentů nevyužil.

V oblasti využívání ICT ve výuce matematiky učitelé volili při odpovědi na otázku, které problematice by se chtěli ve vlastním profesním vzdělávání věnovat, z 5-ti položek, které jsou níže uvedeny už sestupně seřazené podle jejich zájmu:

1. práce s ICT - interaktivní tabule
2. práce s ICT - matematický software, internetové zdroje, tvorba vlastních interaktivních a dynamických materiálů
3. práce s ICT - prezentační software
4. využití e-learningových prostředí ve výuce matematiky na základní škole
5. tvorba e-learningových studijních materiálů

Položka, která nás vzhledem k obsahu článku zajímá nejvíce, je druhá nejžádanější položka pro profesní vzdělávání, a je to „práce s ICT - matematický software, internetové zdroje, tvorba vlastních interaktivních a dynamických materiálů“. Zaujala téměř 60 % respondentů (naprostý souhlas 23,7 %, souhlas 36 %), viz obr. 1.



Obrázek 1. Práce s ICT - matematický software, internetové zdroje, tvorba vlastních interaktivních a dynamických materiálů

Nabídka předmětů – matematika s ICT

KM PdF UP v Olomouci nabízí studentům budoucím učitelům matematiky na 2. stupni ZŠ počítačem podporované předměty a předměty zaměřené na ICT.

V bakalářském studiu Matematika se zaměřením na vzdělávání si studenti mohou vybrat z následujících předmětů:

1. ***Základy informačních technologií,*** *1. ročník, ZS, volitelný*

Předmět je určen studentům 1. ročníku, kteří si potřebují doplnit základní znalosti a dovednosti v oblasti využívání informačních a komunikačních technologií.

Témata: Komponenty PC, periferní zařízení, princip fungování PC, digitální záznam dat, základní a další jednotky informace, historie a vývoj počítačů a operačních systémů, historie internetu.

2. ***Algoritmizace a programování výpočtů,*** *1. ročník, LS, povinně volitelný*

Cílem předmětu je seznámit studenty s algoritmickým myšlením, které je nezbytné jak pro tvorbu fungujícího programového vybavení, tak pro pochopení obecných principů již hotových profesionálních produktů.

3. ***Matematické aplikace výpočetní techniky 1,*** *1. ročník, LS, povinně volitelný*

Možnosti využití MS Office v matematice (MS Word: matematické texty – symboly, rovnice, editor rovnic, MathType; MS PowerPoint: prezentace s matematickými výrazy – symboly, rovnice, editor rovnic, MathType; animace k vizualizaci matematických pojmů). Základy práce v aplikaci MS Excel (Funkce a vzorce, práce s grafy, analýza dat a práce se seznamy, tabulkové kalkulátory v matematické analýze, algebře, aritmetice a kombinatorice.

4. ***Matematické aplikace výpočetní techniky 2,*** *2. ročník, ZS, povinně volitelný*

Základní typy matematických výukových prostředí (prostředí dynamické geometrie: Cabri, GeoGebra; tabulkové procesory: MS Excel, GeoGebra, Google Tabulky; mikrosvěty: Imagine Logo, Comenius Logo a počítačové algebraické systémy: Maple, Derive).

V navazujícím magisterském studiu Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ jsou studentům nabídnuty předměty:

1. ***Didaktické aplikace ICT 1,*** *1. ročník, ZS, povinně volitelný*

Po absolvování předmětu by studenti měli být schopni efektivně využívat nástroje MS Office (texty a prezentace s matematickým obsahem pro podporu výuky matematiky na ZŠ) a především MS Excel k řešení úloh ze školské matematiky a jako podpůrný nástroj při vlastním studiu a v pedagogické praxi.

2. ***Didaktické aplikace ICT 2,*** *2. ročník, ZS, povinně volitelný*

Předmět je zaměřen na řešení úloh ze školské matematiky v matematických výukových prostředích (prostředí dynamické geometrie, tabulkové procesory, mikrosvěty a počítačové algebraické systémy).

3. ***Didaktické aplikace ICT 3,*** *2. ročník, LS, volitelný*

Cílem tohoto předmětu je poukázat na možnosti zařazení multimédií do výuky matematiky a seznámit studenty s technologiemi vhodnými pro podporu edukačního procesu nejen ve výuce matematiky: mobilní zařízení (smartphone, tableb) ve spojení s bezdrátovým projektorem, výuka s tablety včetně Classroom Management Systémů, vizualizéry, Leap Motion či interaktivními učebnicemi pro výuku s interaktivní tabulí.

Algorimizace a programování výpočtů

Podívejme se nyní blíže na povinně-volitelný předmět Algoritmizace a programování výpočtů (školské matematiky) určený studentům bakalářského studia.

Studenti by měli porozumět základním principům vytváření algoritmů. To je testováno zadáváním úprav na programech, které jsou studentům poskytnuty ke studiu, případně

tvorbou programů nových, ale typově podobných těm, které jsou studentům dodány. Mají k dispozici řadu jednoduchých odladěných programů v jazyce *C*, případně v jazyce Python. Ve vzorových příkladech je vždy v úvodním komentáři programu zadán problém, který se má vyřešit, následuje řešení a na konci mohou být různé poznámky k tématu, ale hlavně jsou tam zadány úlohy k vlastnímu řešení. Jedná se často o modifikace daného algoritmu nebo o napsání nového programu, řešícího podobný problém.

Zaměřujeme se na tvorbu jednoduchých algoritmů, které souvisejí především se školskou matematikou. Studenti budou řešit řadu drobných problémů z oblasti školské matematiky a seznámí se přitom se základními principy výpočtů hodnot, s nimiž v matematice běžně pracují (odmocniny, e, π, sinus, kořeny rovnic a další). Věnujeme se například následujícím tématům: Výpis tabulky druhých a třetích odmocnin, tvorba programů pro tvorbu typových úloh (např. kvadratická rovnice – zadají se kořeny a do souboru se tiskne zadání i s řešením ve zvolené úpravě), úlohy o dělitelnosti, hledání pythagorejských trojic nebo hledání kořenů nelineárních rovnic metodou půlení intervalu apod. V tomto příspěvku se budeme blíže zabývat výpočtem obsahu kruhu.

Po absolvování předmětu by studenti měli být schopni:

1. Rozumět základním principům vytváření a implementace algoritmů. To se bude testovat zadáváním úprav na programech, které jsou studentům poskytnuty ke studiu, a tvorbou programů nových, ale typově podobných těm, které jsou poskytnuty studentům.
2. Algoritmizovat vybrané problémy související se školskou matematikou.
3. Implementovat jednoduchý výpočet ve vybraném programovacím jazyce (C nebo Python).

Předmět se zabývá těmito tématy: formální problém, algoritmus a program, počítač, paměť, proměnná, druhy akcí, které se vyskytují v algoritmech při zpracování úlohy na počítači, (tj. přiřazení, větvení algoritmu, cyklus), způsoby zápisu algoritmů, programovací jazyky a jejich typy. Hlavní náplní kurzu je pak implementace algoritmů v programovacím jazyce.

Ukazují se algoritmy nalezení největšího čísla z daných čísel, seřazení daných čísel podle velikosti apod. Dále se studenti seznamují s jednoduchými způsoby výpočtu hodnot vybraných elementárních funkcí (goniometrické funkce, odmocniny, logaritmy), známých konstant (π, e), kořenů rovnic, rozkladů přirozených čísel na prvočísla apod., [1].

V ukázkových příkladech je vždy zadán problém, který se má vyřešit, následuje jednoduchá komentovaná implementace a na konci jsou zadány úlohy k vlastnímu řešení. Jedná se často o modifikace daného algoritmu nebo o napsání nového programu, řešícího podobný problém. Následuje ukázka implementace pro výpočet obsahu kruhu.

Příklad: Vypočítejte obsah kruhu.

Řešení: Při implementaci byl použit programovací jazyk Python.

```
""" Počítáme obsah kruhu o zadaném poloměru r - obdélníkovou metodou
   (1. modifikace programu 7 ObsahKruhu.py)
"""
import math
def f(x,r):                  # definujeme si funkci - viz rovnice kružnice
 return math.sqrt(r*r - x*x)
fa = open("ObsahKruhu-r.txt", "a")
print("Počítáme obsah kruhu obdélníkovou metodou.")
r = float(input("Zadejte poloměr kruhu: "))
N = float(input("Zadejte počet dělicích intervalů: "))
Delta = r / N    # délka jednoho dělicího intervalu = délka intervalu <0,r>
děleno počtem dílků
S = 0.
for k in range(int(N)):
    S += Delta * f(Delta/2 + k*Delta, float(r) )
fa.write("Aproximace obsahu kruhu o poloměru {r} je při N = {0}
rovna\t{1}\n".format(r, int(N), 4*S))
fa.close()
"""
2. Modifikujte program:
obsah jednotkového kruhu aproximujte obsahem vepsaných pravidelných N-
úhelníků
3. Modifikujte program:
obsah jednotkového kruhu aproximujte obsahem opsaných pravidelných N-
úhelníků
4. Spojením modifikací 2 a 3 vytvořte nový program,
který bude počítat obsah jednotkového kruhu takto:
aproximujeme jej obsahem vepsaného a opsaného pravidelného N-úhelníka
N zvětšujeme, dokud nebude chyba menší než předem zadané malé číslo epsílon
(chyba = rozdíl obsahu opsaného a vepsaného N-úhleníka)
za výsledný obsah potom bereme aritmetický průměr obou obsahů
"""
```

Publikace byla vydána s podporou Univerzity Palackého v Olomouci, Specifická podpora výzkumu IGA_PdF_2017_007 *Netradiční prostředí pro rozvoj logického myšlení žáků*, IGA_PdF_2017_014 *ICT ve výuce matematiky na moravských základních školách (Česká republika) a školách provincie S'-čchuan (Čína)* a s podporou Grantového fondu děkana PdF 2017 s názvem *Pregraduální příprava učitelů matematiky jako model edukační reality.*

Literatura:

[1] Laitochová, J., Halas, Z.: *Algoritmy v C pro učitele matematiky*. [CD-ROM]. Olomouc: UP, 2012.

[2] Dofková, R. - Nocar, D. Analýza vzdělávacích potřeb a kompetencí učitelů 1. stupně ZŠ v Olomouckém kraji k implementaci a využívání ICT ve výuce matematiky. In *Primárne matematické vzdelávanie - teória, výskum a prax*. Banská Bystrica: Belianum, 2017. ISBN 978-80-557-1236-9.

Jitka Laitochová, David Nocar
Katedra matematiky PdF UP Olomouc
Žerotínovo nám. 5, 77140 Olomouc
e-mail: jitka.laitochova@upol.cz
david.nocar@upol.cz

TYPOGRAFIE PRO UČITELE MATEMATIKY

Vlasta Moravcová

Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta

Abstrakt: Cílem příspěvku je připomenout základy typografie, které by měl každý učitel znát. Pozornost je zaměřena na technické normy, základní typografická pravidla a užití matematického značení. Dále jsou zmíněny časté chyby v úpravě dokumentů a jejich vliv na čitelnost textu. Všechna témata jsou doplněna konkrétními ukázkami.

Klíčová slova: typografie, technické normy, písmo, formátování textu, matematické značení.

Typography for mathematics teachers

Abstract: The aim of this article is to present basics of typography which should be known by every teacher. The attention is paid to documents of standardization, fundamental typographic rules and usage of correct mathematics signage. There are also common mistakes and their impact to the readability discussed. All the topics are supplemented with particular examples.

Key words: typography, standardization documents, font, text formatting, mathematics signage.

Úvod

Typografie (z latinského *typus* – figura/tisk/znak, *grafó* – píši) je umělecko-technický obor zabývající se tiskovým písmem. Vedle umělecké tvorby písma zahrnuje grafickou úpravu tištěných textů, jíž je věnován tento příspěvek.

Historie tištěného písma sahá do středověku a je spojena s vynálezem knihtisku. Rozšíření knihtisku okolo roku 1448 zásluhou Johannese Gutenberga (asi 1400–1468) předcházely různé, méně efektivní tiskařské metody používané v Asii i v Evropě od 9. století. Dalším významným zlomem v technice sazby byl až vynález psacího stroje. První prototyp patentoval anglický vynálezce Henry Mill (asi 1683–1771) v roce 1714. Až v roce

1874 byla započata výroba a prodej dalšího modelu zvaného *Typewriter*, který byl v následujících letech postupně zdokonalován. Prvním krůčkem k počítačové sazbě byla fotosazba (tj. způsob tvorby předloh pro ofsetový tisk pomocí fotografie), které se začalo užívat v šedesátých letech 20. století.

Od osmdesátých let 20. století převládlo počítačové zpracování sazby. Pro přípravu textů nyní existuje celá řada profesionálních programů. K nejstarším z nich patří systém *TEX* (název tvoří první tři písmena řeckého slova $\tau\epsilon\chi\nu\iota\kappa\acute{\eta}$ – technika), který vytvořil americký informatik Donald Ervin Knuth (nar. 1938). První použitelná verze TEXu vznikla v roce 1979, v dalších letech pak byly sestaveny další, uživatelsky přívětivější formáty (*PlainTEX*, *LATEX*, *ConTeXt* aj.), viz [18]. Mimochodem, v LATEXu byl připraven i tento článek.

Zatímco TEX je vynikajícím nástrojem pro sazbu technicky zaměřených odborných textů, v běžné sazbě (knihy, periodika aj.) se neujal, neboť při pokročilejší úrovni užívání vyžaduje od uživatele programátorské schopnosti a nejedná se o WYSIWYG nástroj.[1] Prvním uživatelsky přátelštějším programem pro počítačovou sazbu byl *PageMaker*. V České republice pak mezi první užívaný software tohoto typu patřil program *Ventura Publisher*. Z mnoha programů využívaných pro profesionální sazbu v současné době jmenujme například *Adobe InDesign* nebo *Scribus*.

Pomocí počítače však v současnosti tvoří text téměř každý, byť ne odborník na počítačovou sazbu. Učitelé (nejen) matematiky připravují na počítačích písemné práce, pracovní listy, prezentace, hodnotící zprávy, dopisy rodičům atd. Úroveň těchto textů přispívá k podvědomému utváření *standardu* dobře vytvořeného dokumentu u našich žáků. Je proto vhodné, aby se ve škole setkávali s texty v odpovídající typografické kvalitě.

1 Zásady správné typografie

Obecně se uvádí, že typografie má zajistit snadnou orientaci v textu, dobrou čitelnost, jednotnost textu a jeho kladné estetické působení na čtenáře. První tři zásady jsou spolu úzce provázány, estetické působení je silně individuální a může vyvolávat spory, obecně však platí, že méně je více. Svou roli zde hraje také věk čtenáře, jinak je třeba upravit text pro žáka prvního stupně než pro středoškoláka. Výše uvedené zásady lze respektovat i při *laické* úpravě dokumentů za pomoci běžných kancelářských programů jako *Writer*, *Word* aj., je však třeba seznámit se se základními typografickými pravidly a přijmout je za běžný standard.

[1] WYSIWYG (*what you see is what you get*) nástroje umožňují uživateli provádět úpravy přímo v okně, kde je zobrazena finální podoba dokumentu, zatímco při sazbě systémem TEX editujeme text pomocí příkazů v jiném okně, spustíme překlad zdrojového kódu a poté se nám zobrazí soubor s výslednou podobou textu.

2 Relevantní zdroje

Pravidla sazby (včetně matematické) udávají *české technické normy* (dále jen ČSN[2]), které vydává *Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví* a jsou průběžně aktualizovány. Obecné úpravě písemností včetně základních pravidel pro zápis matematických výrazů je věnována *ČSN 01 6910* (poslední verze vyšla v roce 2014 [3], předchozí v roce 2007 [2]). Matematické znaky a značky jsou popsány v mezinárodní normě označené *ČSN ISO 80000-2* z roku 2012 [4]. Tato norma je jednou z dvanácti částí *ČSN ISO 80000 Veličiny a jednotky* (jednotlivé části vyšly v různých letech a prodávají se samostatně). Pořízení norem je však finančně poměrně nákladné a v knihovnách jsou dostupné jen omezeně a výhradně v prezenčním režimu se zákazem kopírování (včetně fotografování), pořizování jejich kopií je totiž v rozporu se zákonem č. 22/1997 Sb., § 5 (viz [7]). Je třeba dodat, že dle téhož zákona nejsou ČSN právně závazné, jejich závaznost však může plynout z jiného právního předpisu.[3]

Vedle norem jsou relevantním zdrojem informací o typografických pravidlech například *Pravidla českého pravopisu* [1], *Akademická příručka českého jazyka* [16] a zejména lze díky snadné dostupnosti doporučit informace *Ústavu pro jazyk český Akademie věd České republiky* (dále jen ÚJČ) přehledně zpracované online v *Internetové jazykové příručce* [6]. Z těchto zdrojů lze vytěžit pravidla pro psaní pomlčky a spojovníku, interpunkce, zkratek, výpustky, přímé řeči aj. Rovněž zde nalezneme pokyny pro správné dělení slov při řádkovém zlomu. Norma pro úpravu písemností z roku 2007 se v některých případech s pokyny ÚJČ rozcházela, norma z roku 2014 již však byla připravena ve spolupráci s ÚJČ a typografická pravidla jsou nyní v obou zdrojích v souladu.

Pro rychlou orientaci v základních pravidlech sazby nebo vyhledání popisu konkrétního problému dobře poslouží četné typografické příručky i různé příspěvky zabývající se vybranými problematickými jevy zveřejněné na internetu. Jejich výhodou je, že zpravidla obsahují více konkrétních příkladů správné i nesprávné sazby. Z těch tištěných zmiňme stručnou a zároveň přehlednou publikaci [8]. O něco rozsáhlejší je kniha [12], která oproti předchozí obsahuje také kapitolu věnovanou sazbě matematického textu. Ukázky a komentáře ke správné grafické úpravě dokumentů nalezneme také v příručkách zabývajících se ovládáním profesionálních programů pro sazbu textu. Důraz na úpravu matematického textu je popsán zejména v publikacích věnovaných již zmíněnému systému TEX, respektive jeho nadstavbám. Pro inspiraci jmenujme například práci *LATEX pro začátečníky* [19], z níž lze čerpat četné rady týkající se vhodné úpravy textu, aniž by bylo nutné systém LATEX znát.

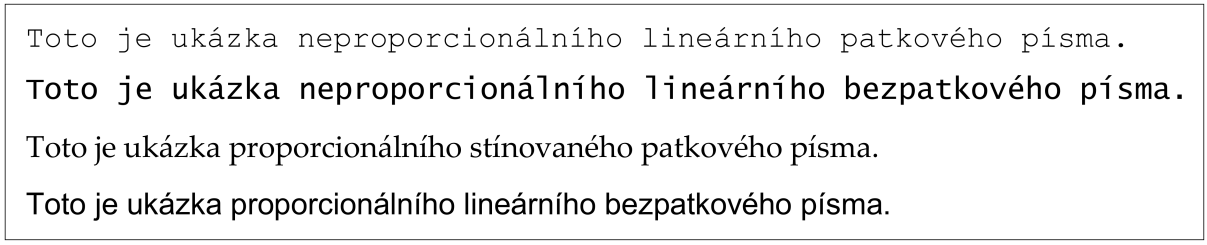
[2] Zkratka ČSN původně označovala *československé státní normy*, od roku 1991 *československé normy* nebo též *československé technické normy* (o historii národní normalizace viz [5]). Neoficiálně bývá vykládána i jako *česká soustava norem*. Každá česká norma je označena zkratkou ČSN a šestimístným třídicím číslem. V České republice jsou používány také převzaté evropské normy, které jsou označeny původním označením, před nímž se opět uvádí zkratka ČSN.

[3] Toto se týká spíše norem o technických požadavcích na výrobky, právní předpis týkající se typografických pravidel písemností nám není znám.

3 Volba vhodného písma

Při psaní textu na počítači máme standardně na výběr z několika druhů písem (*fontů*), například *Times New Roman*, *Arial*, *Calibri*, *Verdana*, *Droid Sans*, *Cabin* atd. Tato písma lze dichotomně třídit ze tří základních hledisek: patková – bezpatková, stínovaná – nestínovaná, proporcionální – neproporcionální.[4]

Patkové (též *serifové*) písmo má tzv. *patky* (*serify*), což jsou příčná zakončení tahů písma. *Bezpatkové* písmo (též *sans-serif*) patky nemá. *Stínované* písmo připomíná písmo psané perem či štětcem tak, že změnou tlaku je změněna i tloušťka čáry. *Nestínované* (též *lineární*) písmo je tvořeno stejně nebo téměř stejně silnými tahy. *Proporcionální* písmo se vyznačuje různou šířkou jednotlivých znaků a mezer, zatímco všechny znaky *neproporcionálního* písma mají stejnou šířku a na každém řádku je pak díky tomu stejný počet znaků (obrázek 1).



Obrázek 1: Ukázky různých druhů písem.

Neproporcionální písmo sázely psací stroje. Nyní je užíváno zejména ve formulářích a pro psaní zdrojových kódů programů. Neproporcionální písma jsou zpravidla nestínovaná. Používají se patková (např. *Courier*, *CMU Typewriter*, *Free Mono*) i bezpatková (*DejaVu Sans Mono*, *Lucida Console*).

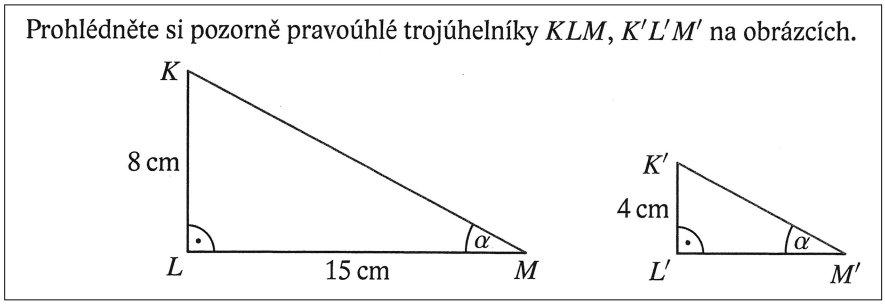
Pro delší texty je vhodné volit proporcionální patkové stínované písmo a to z několika důvodů. Proporcionalita písma zajišťuje dobrý estetický dojem a přispívá ke kompaktnosti textu i jednotlivých slov. Patky a stíny napomáhají rychlejšímu čtení, neboť patky „vedou oko po řádku“ a stíny „zdůrazňují tvary“ písmen, čili již letmým pohledem jsme schopni vnímat, o jaké písmeno se jedná. Příkladem takových písem jsou *Times New Roman*, *Palatino* nebo *Computer Modern*.

V prezentacích, informačních letácích vyvěšovaných na nástěnku a v dalších kratších textech, v nichž předpokládáme, že je čtenář bude číst z větší dálky, volíme naopak co nejjednodušší písmo, tedy bezpatkové nestínované. Z výše uvedených důvodů je lepší opět použít písmo proporcionální. Typickým zástupcem takového písma je *Arial* nebo *Helvetica*.

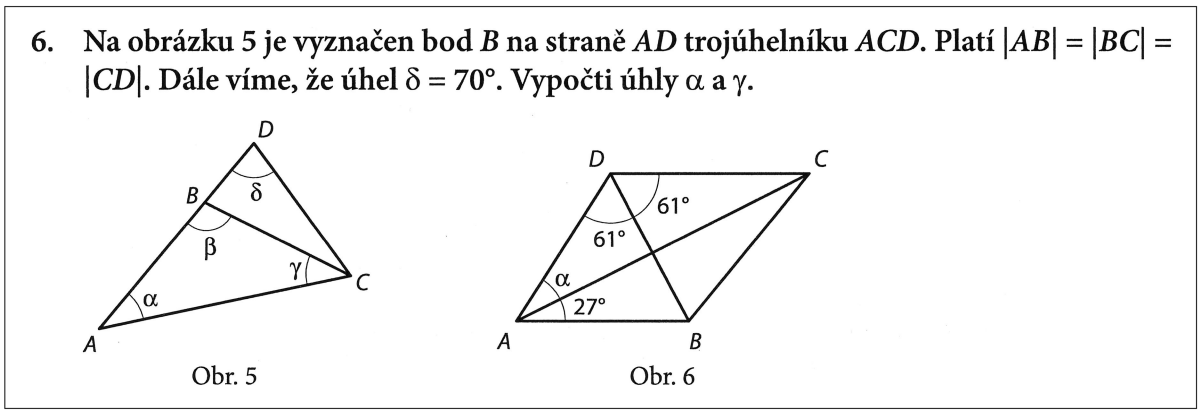
Je diskutabilní, zda v písemných pracích z matematiky použít patkové či bezpatkové písmo (rozhodně však proporcionální a ideálně stínované). V případě bezpatkového je výhodou jeho jednoduchost (vyniká třeba v číselných výrazech), patkové je zase vhodnější

[4]Mimoto existují další písma, která nemá smysl takto třídit (*kaligrafická*, *lomená* nebo *zdobená*). Pro svou horší čitelnost se používají jen příležitostně, například na plakátech, pozvánkách, blahopřáních, v umělecké tvorbě apod.

pro delší slovní zadání a pro zápis proměnných. Ať už zvolíme jakoukoli variantu, zásadou je písmo v dokumentu pokud možno nestřídat. Z estetických důvodů doporučujeme totéž pravidlo dodržet (obrázek 2) i při popisu geometrických obrázků (často dochází k tomu, že v textu jsou objekty popsány patkovým písmem a v obrázku bezpatkovým, což může působit rušivě, viz obrázek 3).



Obrázek 2: Použití stejného písma v textu i v obrázku (převzato z [15], str. 67).



Obrázek 3: Použití různého písma v textu a v obrázku (převzato z [10], str. 76).

4 Základní pravidla formátování textu

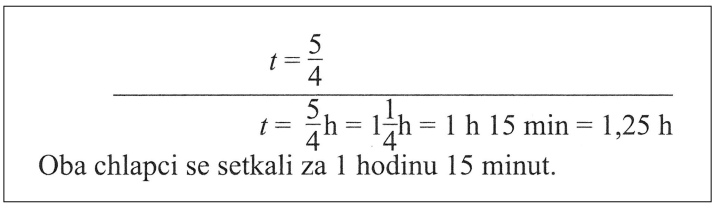
Počítačová sazba umožňuje uživateli snadno a rychle naformátovat text do přehledné a čtenářsky přívětivé podoby. Je však třeba si uvědomit, že tato podoba nevzniká sama automaticky, ale že vyžaduje od uživatele určité úsilí. Kromě užití nevhodného písma patří mezi nejčastější chyby špatně zvolené řádkování nebo zarovnání textu, nesprávný řádkový zlom a nevhodné zvýraznění.

4.1 Řádkování

K základním úpravám patří nastavení správného *řádkování*, tj. poměru vzdálenosti mezi účařími[5] dvou po sobě následujících řádků a výchozí výšky řádku odvozené od velikosti

[5] *Účaří* (též *základní dotažnice*) je pomyslná linka, na níž jsou posazena jednotlivá písmena.

písma. Standardně totiž bývá nastaveno jednoduché řádkování (poměr 1, též udávaný v procentech jako 100 %). To je však vhodné pouze pro jazyky bez diakritických znamének (háčků, čárek atd.), například angličtinu. Pro dokumenty v češtině je doporučeno nastavit vždy řádkování větší, ideálně 1,2 (respektive 120 %). V matematickém textu obsahujícím výrazy (obzvláště lomené) doporučujeme v zájmu přehlednosti volit řádkování ještě větší, jinak hrozí, že čtenáři budou řádky splývat (jako na obrázku 4) a snadno se třeba při opisování zadání přehlédne.



Obrázek 4: Nevhodně zvolené (příliš malé) řádkování (převzato z [17], str. 100).

4.2 Zarovnání textu

Běžné programy pro úpravu textových dokumentů nám obvykle nabízí čtyři možnosti zarovnání textu: *vlevo*, *na střed*, *vpravo* a *do bloku*. V běžných textech je vhodné zarovnání vlevo nebo do bloku (viz [3], str. 36). Pro delší texty je esteticky vhodnější zarovnání do bloku (všechny řádky jsou stejně dlouhé). Potom však hrozí, že mezislovní mezery budou na některých řádcích zřetelně větší, což snižuje plynulost čtení. Abychom tomuto problému předešli, je potřeba povolit dělení slov. Zároveň musíme hlídat, že program dělí slova správně (dělení českých slov je naznačeno v [6], dělení slov v dalších jazycích lze většinou také najít na internetu – v různých on-line slovnících). Zadání matematických úloh, která bývají poměrně krátká, může být vhodnější sázet vlevo (též se říká *na levý praporek*). Nemusíme se pak zabývat zalomením řádku uprostřed matematického výrazu (viz dále podkapitola 6.1). Zarovnání vlevo je vhodné také v prezentacích, kde je na každém řádku jen několik slov.

Se zarovnáním souvisí i odsazení textu od okraje. Zpravidla bývá odsazen první řádek nového odstavce (vyjma prvního řádku prvního odstavce). Druhou možností optického členění textu na odstavce je vložení svislé mezery (eventuálně prázdného řádku) mezi jednotlivé odstavce. Nedoporučuje se však tyto dva postupy kombinovat ([3], str. 31). Dále se používá odsazení (či předsazení) u výčtů, v tomto příspěvku například viz seznam literatury. Typicky se setkáme s výčty v matematice ve sbírkách úloh či v písemných pracích. Platí pak jednoduché pravidlo – text stejné úrovně musí být zarovnán (odsazen) jednotně.

4.3 Řádkový zlom

Další otázkou je správné zalomení řádků. Není vždy vhodné ponechat řádkový zlom tak, jak jej navrhl počítač. Typografickým pravidlům (dle [3]) odporuje, aby na konci řádku

byla jednopísmenná předložka (*k*, *s*, *v*, *z*, *o*, *u*) nebo spojka (*a*, *i*).[6]

Řádky se také nezalamují mezi ciframi víceciferného čísla, mezi číslem a znakem pro procento, mezi číslem a jednotkou a v mnoha dalších situacích (viz [3], str. 38). Tato pravidla pramení z toho, že informace, která by zůstala na konci řádku, je úzce spjata s informací, která by se ocitla na začátku nového řádku. Tyto dvě části je však třeba číst jako celek, což je obtížné, když budou daleko od sebe. Nevhodně zalomený řádek tedy opět snižuje plynulost čtení. Ze stejného důvodu nedoporučujeme zalamovat řádek v matematických textech v místě mezery mezi objektem a jeho označením (např. *bod P*, *kružnice k*, *funkce f* apod.). Dodejme, že v programech existuje možnost vložit *nezalomitelnou* mezeru, v kancelářských aplikacích se obvykle jedná o mezeru pevné šířky. V některých situacích se používá úzká mezera, viz dále.

4.4 Zvýraznění částí textu

K odlišení písma v rukopisu slouží zpravidla barevné zvýraznění či podtržení. Stejnou možnost nabízel i psací stroj, kde bylo možné ještě tzv. prostrkávání písma. V programech pro formátování textu máme obrovské množství způsobů, jak vybraná slova zvýraznit. Pomineme různé možnosti barevného zvýraznění, které při černobílém tisku může být kontraproduktivní, a změnu velikosti písma (vhodné zejména pro nadpisy a podnadpisy) a zaměříme se na tři nejběžnější metody (obrázek 5): prostrkávání, podtržení a změnu řezu písma (tučné písmo, kurzíva, eventuálně tučná kurzíva).

T o t o j e p r o s t r k á v a n é p í s m o .

Toto je podtržené písmo.

Toto je tučné písmo.

Toto je kurzíva.

Toto je tučná kurzíva.

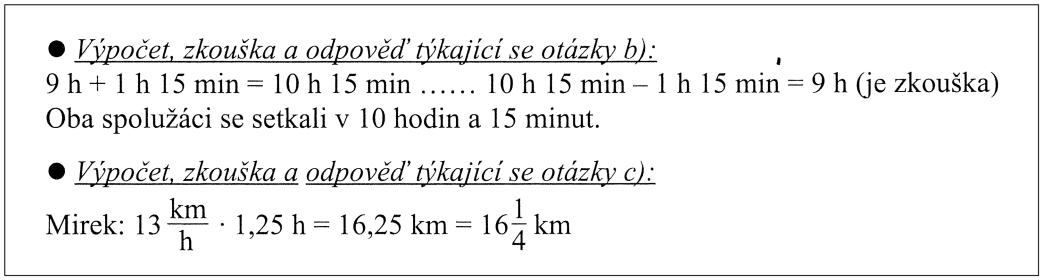
Obrázek 5: Ukázka různých typů zvýraznění písma.

Prostrkávání (též *prokládání*) se vyskytuje ojediněle, většinou v odborných textech, a obecně se nedoporučuje (viz [3], str. 30). Když už jej použijeme, pak zásadně pomocí speciálního nástroje a nikoliv vkládáním mezer mezi jednotlivá písmena, abychom neznemožnili vyhledání vyznačených slov v elektronickém textu a vyvarovali se řádkového zlomu uvnitř slova.

Velmi oblíbené a rozšířené *podtržení* se také nedoporučuje (viz [3], str. 30), neboť jeho prioritní význam je v současné době hypertextový odkaz. Navíc podtržení textu psaného

[6] Předchozí ČSN z roku 2007 [2] umístění spojky (*a*, *i*) a slabičné předložky (*o*, *u*) na konci řádku připouštěla, mezi typografy platila zásada, že spojka *a* se na konci řádku v případě potřeby toleruje, spojka *i* nikoliv.

patkovým písmem velmi snižuje čitelnost (podtržení téměř splývá s patkami) a nezávisle na volbě fontu přeškrtává spodní dotahy některých písmen (*f*, *g*, *j*, *p*, *q*, *y*), což opět komplikuje čtení (obrázek 6).



Obrázek 6: Nevhodné zvýraznění textu podtržením (převzato z [17], str. 101).

Obecně doporučovanými způsoby zvýraznění je *změna řezu písma* na *tučné* nebo *kurzívu* (též *italiku*), viz ([3], str. 28). V případě použití kurzívy je však třeba mít na paměti, že dlouhý text (stačí více než jeden řádek) psaný kurzívou je obtížně čitelný a navíc primárním významem kurzívy je citace (kurzíva je užívána jako alternativa k uvozovkám). Její použití v jiných případech je tedy třeba pečlivě zvážit.

U zvýrazňování platí stejně jako u dalších formátování základní a zásadní pravidlo jednotnosti v rámci dokumentu.

5 Nejčastější všeobecné chyby

Některé jevy odporující typografickým zásadám se vyskytují s větší frekvencí než jiné, patrně kvůli neinformovanosti uživatelů. Pokud se texty s nesprávnou sazbou vyskytují i ve věrohodných zdrojích jako například v učebnicích, médiích apod., věříme v jejich správnost, nechtěně si vštěpujeme chyby a šíříme je dále. V této kapitole připomeneme vybraná pravidla sazby, která se, podle našich zkušeností, porušují nejčastěji.

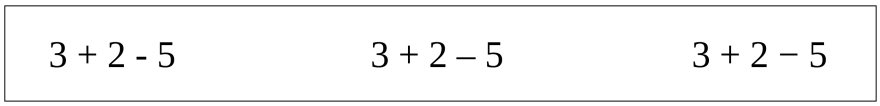
5.1 Spojovník, pomlčka, minus

Výklad rozdílu mezi spojovníkem a pomlčkou je evergreenem typografických příruček. Zde si připomeneme jen nejpodstatnější zásady a zmíníme navíc správný zápis znaku minus, který bývá často chybně zaměňován s pomlčkou či spojovníkem.

Spojovník je z uvedených znaků nejkratší a jako jediný jej nalezneme na klávesnici. Používá se k naznačení významově těsného spojení (*česko-anglický slovník*, *ping-pong*), k připojení spojky *li* ke slovesu (*chceme-li*, *vidíme-li*), v různých kódech (např. kódy ISBN) nebo v místních názvech (*Frýdek-Místek*, *Praha-Karlín*). V matematice se spojovník používá ve výrazech typu *n*-boký (čteme *enboký*), *n*-tý (čteme *entý*) atd. Řádkovému zlomu v místě spojovníku se snažíme vyhnout, když už tato situace nastane, spojovník napíšeme na konec řádku a znovu na začátek dalšího řádku. V programech bývá k dispozici nástroj *pevný spojovník*, který funguje obdobně jako pevná mezera. O spojovníku a jeho správném použití více viz [6] a ([3], str. 15).

Pomlčka může mít různou délku. V češtině se běžně užívá *krátká* (též *půlčtverčíková*, unicode[7] U+2013), která má v daném fontu přibližně šířku písmene *n*. Na klávesnici ji nenajdeme, ale zpravidla lze použít předpřipravenou klávesovou zkratku, možnosti automatických oprav, vyhledat ji jako znak mezi symboly apod. Krátká pomlčka má nejčastěji jednu z následujících dvou funkcí. Buď odděluje části textu (*žáci naší školy – bez ohledu na ročník – jsou velmi nadaní*), potom se okolo ní píší mezery, nebo naznačuje rozsah a píše se bez mezer (*1914–1918*, *pondělí–středa*, *9.–11. 11. 2017*). Pomlčka oddělující části textu nesmí být na začátku řádku, ale může stát na konci řádku. Pomlčka představující rozsah nesmí být na konci ani na začátku řádku a pokud by k tomu mělo dojít, nahradíme ji slovním vyjádřením. Další specifické případy užití jsou uvedeny v [6] a ([3], str. 15–16). Ojediněle se můžeme setkat i s *dlouhou* (též *čtverčíkovou*) pomlčkou o délce písmene *m*. Ta se používá spíše v beletrii, více rozšířená je v angličtině.

V matematice užívaný znak *minus* na první pohled připomíná krátkou pomlčku. Rozdíl mezi znakem minus a pomlčkou je patrný při pohledu na obrázek 7. Správně vysázený znak *minus* (unicode U+2212) je stejně dlouhý a ve stejné výšce jako vodorovná čára ve znaku *plus*. Ani minus na klávesnici nenajdeme. Norma povoluje nahrazení znaku minus pomlčkou v textech administrativní povahy, ale v zápisu matematických výrazů tato záměna není vhodná ([3], str. 21).



Obrázek 7: Zleva výraz se spojovníkem, s pomlčkou, se správným znakem minus.

5.2 Datum

V zápisu data panuje též mnoho mýtů. Opakovaně se setkáváme zejména s nejasnostmi v psaní mezer. Mezi veřejností totiž dochází k záměně dvou přípustných způsobů, jejichž nevhodnou kombinací vzniká zápis odporující typografickým pravidlům. Pokud chceme datum vyjádřit čísly, použijeme vzestupný zápis (tj. den, měsíc, rok) s tečkami a mezerami (*8. 12. 2017*). V textech administrativní povahy (formuláře aj.) se užívá zápis bez mezer, avšak potom jsou číslice určující den a měsíc vždy dvouciferné (*08.12.2017*).

V digitálním světě je používán také sestupný zápis (rok, měsíc, den), který umožňuje efektivní třídění a následné vyhledávání. V tomto případě se jednotlivá čísla oddělí spojovníky (*2017-12-08*).

V souvislém textu je doporučeno užít kombinaci číselně-slovního vyjádření, v němž jsou před i za slovem vyjadřujícím měsíc vysázeny mezery (*dnes je 8. prosince 2017*), viz ([3], str. 25–26).

5.3 Mezera – ano, či ne

Výše jsme již uvedli několik případů, kdy psát a kdy naopak nepsat mezeru okolo spojovníku, pomlčky a v datu. Další případy týkající se psaní mezer v matematice jsou

[7] *Unicode* je mezinárodní norma, která specifikuje jednoznačný číselný kód každého znaku.

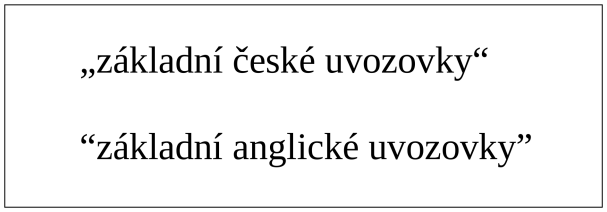
popsány v kapitole 6 tohoto příspěvku. Zde uvedeme několik dalších, nematematických situací, v nichž se často chybuje.

Mezera nepatří před *interpunkční znaménko* (tj. tečku, čárku, dvojtečku, středník, vykřičník a otazník), tyto znaky se připojují bezprostředně k předcházejícímu slovu a mezera následuje až po nich. Podobně funguje i *výpustka* (tři tečky), o ní více viz [6] a ([3], str. 18). Výjimkou jsou webové nebo e-mailové adresy (bez mezery za tečkou) nebo dvojtečka v matematických zápisech ve významu dělení a poměru (viz podkapitola 6.1).

Mezery nepíšeme ani okolo lomítka, které je použito ve významu dělení či alternativy (*1/2*, *km/h*, *pan/paní*, *on/off*). Mezery okolo lomítka se naopak píší, pokud je alespoň jeden z oddělovaných výrazů víceslovný nebo třeba v poezii, kde lomítka oddělují jednotlivé verše (viz [3], str. 17–18).

5.4 Uvozovky

Problematický se jeví také zápis uvozovek. Jako základní české uvozovky se používají uvozovky dvojité, přičemž počáteční znak je umístěn dole a připomíná svým tvarem číslici 99 (unicode U+201E), zatímco koncový znak se píše nahoru a připomíná číslici 66 (unicode U+201C), obrázek 8. Symbol pro uvozovky na klávesnici nenalezneme. V textových editorech se pro jejich psaní obvykle používá klávesa se symbolem pro palce (`"`) v kombinaci s automatickou opravou vkládající uvozovky zvoleného jazyka.



Obrázek 8: Správné znaky pro české a anglické uvozovky.

5.5 Psaní čísel

Čísla jsou často součástí i nematematických textů. Desetinné části čísel se od jednotek oddělují čárkou, okolo níž se nepíší mezery.[8] Ve více jak trojciferných číslech oddělujeme cifry po trojicích směrem vlevo a vpravo od desetinné čárky, trojice se oddělují úzkou nezalomitelnou mezerou (unicode U+202F), viz obrázek 9. Výjimkou jsou letopočty a čísla popisná, v nichž žádné mezery nepíšeme. Speciální číselné kódy (telefonní čísla, čísla účtů, ISBN kódy aj.) se nečlení nebo se jejich členění řídí specifickými pravidly. (viz [3], str. 24).[9]

[8] V matematickém prostředí v systému LaTeX je za čárkou automaticky vysázena mezera, neboť čárka se používá také jako oddělovač v seznamech. Při sazbě desetinných čísel je proto třeba čárku napsat do složených závorek (např. 1,25 vysázíme jako 1{,}25).

[9] Výjimka je povolena také pro čtyřciferná čísla v textu, kde není nutné první cifru oddělovat mezerou, pokud toto provedeme v celém dokumentu jednotně.

23 178 459,002 1 3 275 81,200 354 16

Obrázek 9: Ukázky správných zápisů čísel s oddělováním cifer po trojicích.

6 Problémy matematické sazby

Z hlediska sazby lze matematiku chápat jako samostatný jazyk, který má svá specifika. Správná sazba matematického textu je obzvláště důležitá, aby nemohlo dojít k jeho dezinterpretaci. Dodržení typografických pravidel v zápisech matematických výrazů navíc zvyšuje jejich přehlednost, a tak umožňuje rychlou orientaci ve složitých textech obsahujících značné množství symbolů.

6.1 Znaky matematických operací a rovnítko

Znaky pro operace sčítání a dělení – *plus* a *dvojtečku* – nalezneme na klávesnici. Znak *minus* jsme vyložili v podkapitole 5.1. Pro násobení se používá znak tečky, která má být umístěna ve stejné výšce jako minus.[10] Dle ČSN je možné použít i znak $\times$, který má být též ve stejné výšce jako minus a jeho náhrada písmenem *iks* je povolena pouze v korespondenci (viz [3], str. 21). Tento znak však v aritmetice základní školy spíše nedoporučujeme. Pokud si jej žáci příliš zafixují, používají jej i později ve výrazech s proměnnou. Nejčastější označení proměnné je však x a může tak snadno dojít k záměně proměnné a znaku pro násobení. Navíc ve středoškolské matematice je znak $\times$ používán pro vektorový součin. Znak $\div$, který známe z kalkulaček jako znak operace dělení, ČSN nedoporučuje.

Špatný nebo nevhodný zápis	**Správný zápis**
$-\ 5{+}10$	$-5+10$
$2+x\div 3$	$2+x:3$
$2+x/3$	$2+\dfrac{x}{3}$
$18\,.\,2$	$18\cdot 2$ (eventuálně 18×2)

Tabulka 1

Okolo znaků operací ($+$, $-$, $\pm$, $\cdot$, $:$) a relací ($=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\doteq$, $\simeq$, $\dots$) píšeme mezery. Výjimkou je znak plus nebo minus použitý jako unární operátor, potom mezi tento znak a číslo mezera nepatří (viz tabulka 1). Mezeru píšeme také okolo dvojtečky naznačující poměr (například v měřítku mapy), výjimkou je pouze zápis skóre, v němž se mezera

[10] Předchozí norma ([2], str. 12) v korespondenci připouštěla užití klasické tečky umístěné na řádku.

nesází (například: *zápas skončil s výsledkem 5:6*), viz ([3], str. 22). Příklady nesprávných a správných zápisů znaků a mezer uvádíme v tabulce 1.

Operaci dělení lze zapsat samozřejmě také pomocí zlomku. V textu s malým výskytem zlomků lze využít lomítka (typické například v kuchařských receptech), v zápisech delších matematických výrazů však preferujeme užití vodorovné zlomkové čáry (viz tabulka výše). Při zápisu rozdílu zlomků je třeba dbát více než jindy na vysázení dostatečně velké mezery okolo znaku minus, aby tento znak opticky nesplýval se zlomkovými čárami jako na obrázku 10.

$$\frac{3}{x} - \frac{3}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

Obrázek 10: Nevhodně malé mezery okolo znaku minus i rovnítka (převzato z [9], str. 53).

V ideálním případě se snažíme vyhnout řádkovému zlomu uprostřed matematického výrazu. Když už je tento zlom nezbytný, provedeme jej primárně v místě znaku rovnítka, popřípadě i v místě znaku matematické operace, přičemž dle normy ([4], str. 8) tento znak nezdvojujeme. Tento pokyn je zdůvodněn tím, že by mohlo dojít k nejasnostem při zdvojení znaku minus. Dříve však bylo obvyklé znak (obvykle rovnítko) napsat na konec prvního řádku i na začátek druhého řádku (viz [12], str. 88) a i norma [3] tuto možnost stále připouští.

6.2 Rozdíl množin

Množinové operace (sjednocení, průnik, rozdíl) mají své specifické znaky. Se sjednocením ($\cup$) a průnikem ($\cap$) problém nebývá, avšak znak pro rozdíl množin ($\setminus$) bývá chybně nahrazován znakem minus (obrázek 11). Správný znak má unicode U+2216 a je velmi podobný[11] znaku *backslash* (U+005C), který najdeme na klávesnici.

$$M = A - B \qquad\qquad M = A \setminus B$$

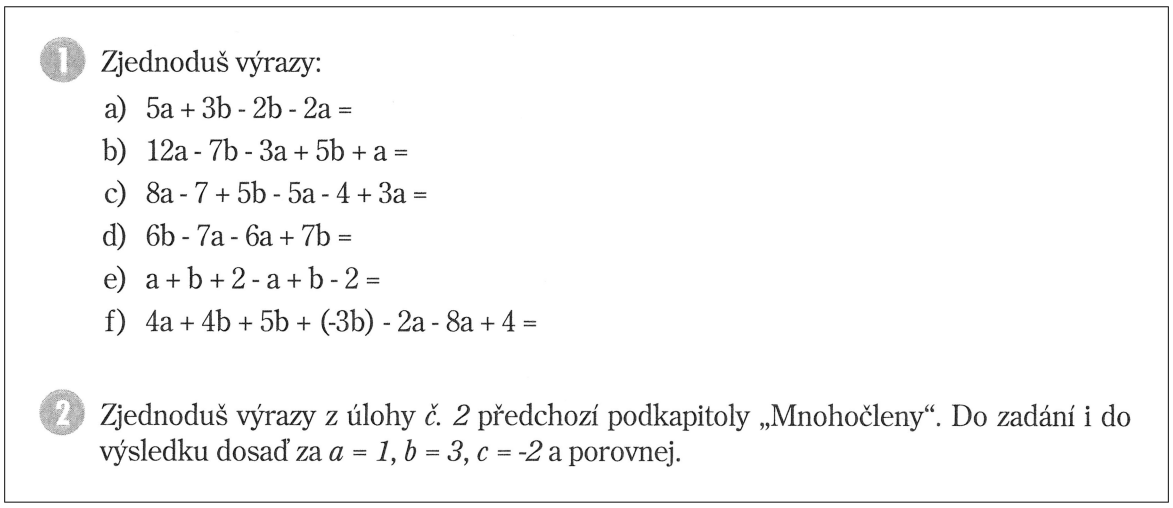
Obrázek 11: Rozdíl množin pomocí znaku minus (vlevo) a správně (vpravo).

6.3 Užití kurzívy

V matematických textech píšeme proměnné a označení matematických objektů v zájmu rychlejší orientace v textu kurzívou (například: rovnice s neznámou x, funkce f). Ukázkou nevhodné sazby je obrázek 12. Obvykle píšeme kurzívou také názvy geometrických objektů (například: bod A, přímka p, trojúhelník KLM), ačkoliv v normě [4] jsou tyto případy uvedeny normálním řezem písma.

[11] V některých fontech mezi těmito znaky dokonce není opticky žádný rozdíl.

Naopak kurzívou nikdy nesázíme jednotky veličin, čísla (ani v indexech proměnných) a konstanty označené písmeny. Přesto se v učebnicích opakovaně setkáváme s kurzívou, tedy špatně, zapsanými konstantami π (obrázek 13), e nebo s komplexní jednotkou i (obrázek 14). Dále kurzívou nepíšeme závorky a další symboly (například faktoriál) ani matematické funkce (sin, cos, ln, sgn aj.) nebo zkratku pro limitu (lim), derivaci (d) aj. (viz [4]).

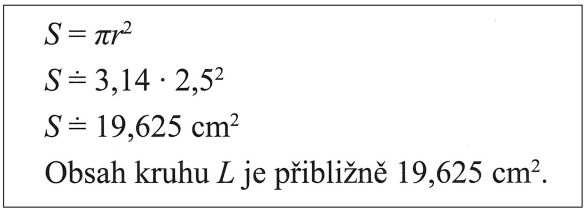


1 Zjednoduš výrazy:

a) 5a + 3b - 2b - 2a =
b) 12a - 7b - 3a + 5b + a =
c) 8a - 7 + 5b - 5a - 4 + 3a =
d) 6b - 7a - 6a + 7b =
e) a + b + 2 - a + b - 2 =
f) 4a + 4b + 5b + (-3b) - 2a - 8a + 4 =

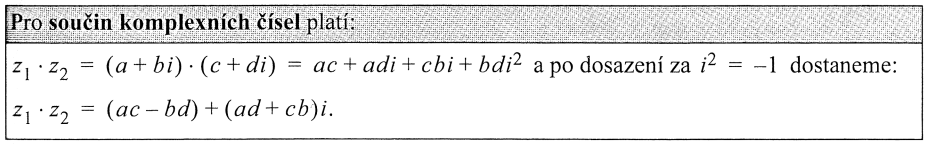
2 Zjednoduš výrazy z úlohy *č. 2* předchozí podkapitoly „Mnohočleny". Do zadání i do výsledku dosaď za *a = 1, b = 3, c = -2* a porovnej.

Obrázek 12: Nevhodný zápis proměnných normálním řezem (úloha 1), resp. čísel kurzívou (úloha 2), navíc znak minus je nahrazen spojovníkem (převzato z [14], str. 25).



$S = \pi r^2$
$S \doteq 3{,}14 \cdot 2{,}5^2$
$S \doteq 19{,}625\ \text{cm}^2$
Obsah kruhu L je přibližně $19{,}625\ \text{cm}^2$.

Obrázek 13: Nesprávná sazba konstanty π kurzívou (převzato z [11], str. 42).



Pro součin komplexních čísel platí:

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2$ a po dosazení za $i^2 = -1$ dostaneme:

$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i.$

Obrázek 14: Nesprávná sazba komplexní jednotky i kurzívou (převzato z [13], str. 131).

6.4 Další pravidla pro psaní mezer

Několik pravidel pro psaní mezer jsme již uvedli v podkapitolách 5.3 a 6.1. V matematické sazbě se však vyskytují další situace, v nichž se často chybuje.

Především úzkou nezalomitelnou mezeru píšeme mezi funkci a její argument ($\ln x$, $\sin 3x$) a také mezi číslo a jednotku ($20\,\mathrm{cm}^2$, 15 325,7 min). Výjimkou je vyjádření přídavného jména pomocí čísla a jednotky, zde mezeru nepíšeme (viz tabulka 2).

V zápisech n-tic, ať už je píšeme do složených, hranatých nebo kulatých závorek, platí stejná pravidla jako při psaní výčtů do závorek v běžném textu, tj. mezi závorkami a textem mezera není a za každou položkou výčtu napíšeme čárku a mezeru. Čárku je možné nahradit středníkem nebo svislou čárou (hovorově nazývanou *svislítko*). Pokud se v zápise vyskytují i čísla desetinná, je užití jiného znaku než čárky nutné.

Výslovnost	**Zkrácený zápis**
tříprocentní	3%
tři procenta	3 %
trojboký	3boký
enboký	n-boký
pětkrát	5krát
ikskrát	x-krát
pětinásobný	5násobný
kátý	k-tý
pěticentimetrový	5cm (lze i 5centimetrový)
pět centimetrů	5 cm

Tabulka 2

Ve slovních úlohách často chceme zkráceně zapsat výrazy jako tříprocentní, pětiboký apod. Příklady správného zápisu uvádíme v tabulce 2.

1.37 Upravte výrazy:

a) $6st + (-5st) - (-7st) + st$

b) $7z^2 - 14z^2 - 8z^2 + 2z^2$

c) $5t^2 - (-2t) + (-7t^2) + 7t - (t^2) + 4t$

d) $12x^3 + 7x^2 - 4x^3 + x^3 - 5x^2$

Obrázek 15: Zbytečná kombinace patkového (zadání úlohy a čísla) a bezpatkového (proměnné) písma (převzato z [9], str. 15).

6.5 Použití jiného druhu písma

Zatímco k všeobecným typografickým pokynům patří nepoužívat v dokumentu zbytečně více druhů písem, v matematické sazbě je obvyklé použití různých písem pro různé objekty. I zde je však na místě střídmost, například volba jiného písma pro čísla a proměnné je zcela zbytečná a působí rušivě jako na obrázku 15 (pro tento případ je zcela dostačující

odlišení pouze řezem písma). Jiné druhy písma jsou však běžně používány například k označení vektorů nebo základních číselných oborů (přirozená, celá, reálná čísla atd.).[12]

6.6 Závorky

V matematice rozlišujeme závorky *kulaté* (), *hranaté* [], *složené* {} a *lomené* $\langle\rangle$. Na základní škole se v zájmu lepší přehlednosti žáci zpravidla učí, že pro naznačení přednosti operací se vnitřní závorka píše kulatá, vnější hranatá a případně další vnější složená. Dle ČSN si však vystačíme pouze s kulatými závorkami, které lze do sebe v libovolném počtu vnořovat. Na tento systém zápisu, používaný také třeba v programovacích kódech, doporučujeme z didaktických důvodů přejít až ve vyšších ročnících, kdy už mají žáci úpravy výrazů se závorkami trochu zažité.

Lomené závorky používáme pro uzavřené intervaly, avšak mezinárodní norma pro tento případ uvádí pouze závorky hranaté ([4], str. 16). S lomenými závorkami se potkáme dále například ve statistice, kde označují střední aritmetickou hodnotu ([4], str. 24). Složené závorky píšeme například ve výčtech prvků množiny.

Častou chybou bývá nesprávná velikost závorek (obrázek 16). Je-li v závorce zápis, který svou výškou přesahuje normální výšku řádku (zlomek, výraz s mocninou či odmocninou atd.), je třeba adekvátně upravit i výšku závorek. Závorky se v matematice používají v mnoha dalších situacích z nichž zdaleka ne všechny jsou v normách popsány. Doporučujeme držet se vždy daných zvyklostí, popřípadě delší text doplnit vysvětlením použitého značení, a především zachovat jednotnost v celém dokumentu.

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \cup \boldsymbol{K}_2 \cup \boldsymbol{K}_3 = \langle -\frac{1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \rangle$$

Obrázek 16: Velikost lomených závorek není přizpůsobena výšce výrazu uvnitř závorek a mezi středníkem a druhým výrazem chybí mezera (převzato z [13], str. 54).

6.7 Číslování položek výčtu

Ve sbírkách úloh, v písemných pracích a všude tam, kde chceme napsat pod společné zadání více dílčích úloh se v matematice setkáme s problematikou psaní výčtů. Pravidla pro psaní výčtů (zejména co se týká interpunkce, velkých písmen a dalších obecných zásad) jsou podrobně popsána v [6] a ([3], str. 32–33).

Zde bychom rádi upozornili na problém číslovaných výčtů ve spojení s matematickými výrazy, který může vést k nežádoucímu nedorozumění mezi autorem textu (učitelem) a čtenářem (žákem). Pokud položky výčtu očíslujeme a za čísly ponecháme tečku (tak je obvykle nastaveno standardní číslování v běžných kancelářských programech), může žák omylem například druhou položku výčtu číst od začátku jako *dvakrát...* Proto je

[12] Nemáme-li k dispozici oblíbené symboly $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ..., použijeme výrazně jiné písmo než jakým píšeme ostatní text. Je-li kupříkladu většina textu psána patkovým písmem, zvolíme pro označení číselných oborů nějaké bezpatkové písmo.

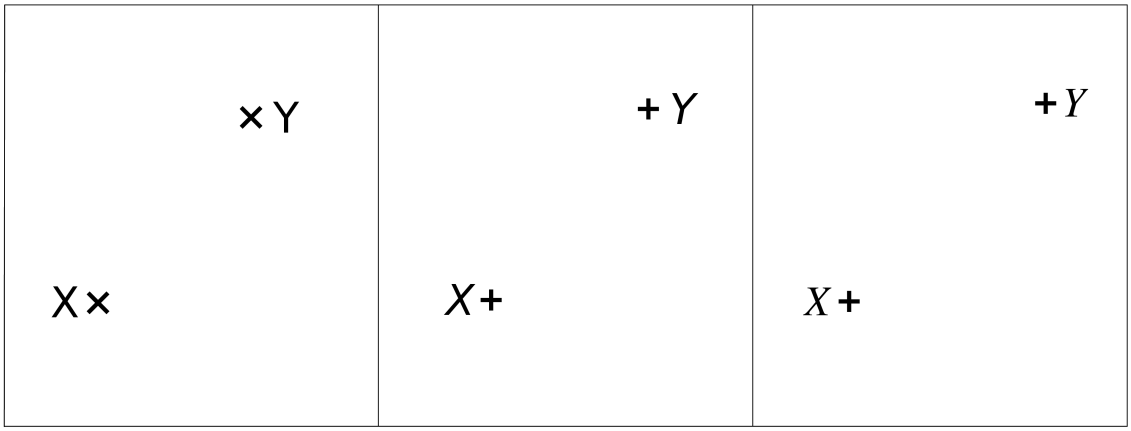
vhodnější jednotlivé položky výčtu značit *a), b), ...*, popřípadě, chceme-li číslovat, použijeme za pořadovým číslem jiný znak než tečku a matematický výraz od pořadového čísla odsadíme větší mezerou (viz obrázek 17).

1. $2 \cdot 5 + 1$	1) $2 \cdot 5 + 1$
2. $\sqrt{16} - 8$	2) $\sqrt{16} - 8$
3. $(-7 - 2) \cdot (-3)$	3) $(-7 - 2) \cdot (-3)$
4. $x + 2 - 3x$	4) $x + 2 - 3x$
5. $(20 : 4)$	5) $(20 : 4)$

Obrázek 17: Matoucí (vlevo) a přehledné (vpravo) číslování úloh.

6.8 Znázornění bodu

Bod jako abstraktní pojem představující nekonečně malý, přesněji řečeno bezrozměrný objekt zakreslit nelze. Od základní školy jsme však zvyklí na různé podoby jeho znázornění (tečkou, různě natočeným křížkem, čárkou vedenou kolmo ke znázorněné přímce aj.). Tyto podoby znázornění by měly být co nejvíce přehledné. Přehlednost však může být snížena, pokud zvolíme nevhodnou kombinaci znaku pro bod, velikosti tohoto znaku a popisu bodu.



Obrázek 18: Nejvíce matoucí kombinace označení bodu křížkem a popis bezpatkovým písmem v normálním řezu (vlevo), akceptovatelná možnost znaku pro bod a popisu bezpatkovou kurzívou (uprostřed) a nejpřehlednější označení (vpravo).

Pro vyznačení bodu je v literatuře často používán křížek (×) připomínající písmeno *iks*. Pokud se takový bod také bude jmenovat X a navíc bude toto písmenko vysázeno bezpatkovým písmem v normálním řezu (X), nemůžeme se divit, že zmatený žák zamění označení bodu s jeho popisem. Přikláníme se tedy spíše k vyznačení bodů znakem připomínajícím znaménko *plus* (přeci jen tímto symbolem body zpravidla nepojmenováváme a záměna s písmenem je vyloučena) a pokud je doprovodný text psán patkovým písmem, pak v zájmu jednotnosti i k použití patkového písma k popisu bodů (obrázek 18).

6.9 Vliv západní literatury

V posledních cca deseti letech lze v pravidlech matematické sazby sledovat rostoucí vliv anglicky psané literatury. Dokládá to i u nás schválená mezinárodní norma [4], která se v mnoha případech odlišuje od zažitého značení užívaného desítky let ve školské matematice.

Jako příklad jsme již výše podali použití hranatých závorek pro zápis uzavřených intervalů. Z běžně používaných symbolů a označení můžeme dále uvést označení prázdné množiny. V české literatuře je rozšířený symbol přeškrtnuté nuly (∅), norma [4] však uvádí symbol ⌀, kterým jsme zvyklí označovat spíše průměr.[13] Ve zmíněné normě již bylo také definitivně přijato označení *tan* a *cot* pro funkce *tangens* a *kotangens* (namísto dosud rozšířených zkratek *tg* a *cotg*, jejichž používání norma [4] nedoporučuje).

7 Závěr

V příspěvku jsme podali výběr nejproblematičtějších situací, v jejichž sazbě se často chybuje. Chyby opakovaně nalézáme v písemných pracích a pracovních listech připravených učiteli, v dokumentech sepsaných studenty učitelství i v pracích žáků. Smutným dokladem nevědomosti a neznalosti typografických pravidel jsou zde použité ukázky z učebnic, které by měly být pro učitele a žáky vzorem.[14]

Při výkladu správných postupů jsme se drželi doporučení ČSN a ÚJČ, u případů, které v těchto zdrojích nejsou podchyceny, jsme vycházeli z vlastních zkušeností. Věříme, že článek pomůže všem, kteří si uvědomují smysluplnost typografie a chtějí jít svým žákům příkladem.

Literatura:

[1] *Pravidla českého pravopisu*, Academia, Praha, 2017.

[2] *Úprava písemností zpracovaných textovými editory*, ČSN 01 6910, Český normalizační institut, Praha, 2007.

[3] *Úprava dokumentů zpracovaných textovými procesory*, ČSN 01 6910, Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, Praha, 2014.

[4] *Veličiny a jednotky – Část 2: Matematické znaky a značky užívané v přírodních vědách a technice*, ČSN ISO 80000-2, Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, Praha, 2012.

[5] *Historie národní normalizace* [online], `http://www.unmz.cz/urad/historie-narodni-normalizace` [cit. 06.12.2017].

[13] Oficiální symboly pro prázdnou množinu (*empty set*, U+2205) a průměr (*diameter sign*, U+2300) se mírně liší, rozdíl však v některých fontech nemusí být na pohled patrný.

[14] Podotýkáme, že za kvalitu sazby neodpovídá autor, ale nakladatelství.

[6] *Internetová jazyková příručka* [online], http://prirucka.ujc.cas.cz [cit. 06.12.2017].

[7] *Zákon č. 22/1997 Sb.* [online], https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1997-22 [cit. 06.12.2017].

[8] Beran, V. & kol.: *Typografický manuál*, Kafka design Praha, 2016.

[9] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: *Matematika 9, Algebra – učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*, Fraus, Plzeň, 2010.

[10] Hejný, M., Jirotková, D.: *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání. Náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*, ÚIV, Praha, 2010.

[11] Jedličková, M., Krupka, P., Nechvátalová, J.: *Matematika. Hranoly a válce*, Nová škola, s.r.o., Brno, 2016.

[12] Kočička, P., Blažek, F.: *Praktická typografie*, Computer Press, Brno, 2004.

[13] Kubešová, N., Cibulková, E.: *Matematika – přehled středoškolského učiva*, Petra Velanová, Třebíč, 2007.

[14] Molnár, J. & kol.: *Matematika 8 – pracovní sešit, I. část*, Prodos, Olomouc, 2000.

[15] Odvárko, O.: *Matematika pro střední odborné školy. Základní poznatky*, Prometheus, Praha, 2009.

[16] Pravdová, M., Svobodová, I.: *Akademická příručka českého jazyka*, Academia, Praha, 2014.

[17] Půlpán, Z. & kol.: *Matematika 8 pro základní školy. Algebra*, SPN, Praha, 2009.

[18] Reutenauer, A.: *A brief history of TEX, volume II*, TUGboat, Vol. 29, No. 1 – XVII European TEX Conference, 2007, 68–72.

[19] Rybička, J.: *LATEX pro začátečníky*, Konvoj, Brno, 2003.

Práce byla podpořena projektem PROGRES Q17 (*Příprava učitele a učitelské profese v kontextu vědy a výzkumu*).

Vlasta Moravcová
Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: morava@karlin.mff.cuni.cz

ICT PODPORA BADATELSKY ORIENTOVANÉHO PŘÍSTUPU VE VÝUCE MATEMATIKY NA 2. STUPNI ZŠ

David Nocar, Pavla Polejová, Jitka Laitochová

Katedra matematiky PdF UP v Olomouci

Abstrakt: V současné době jeden z konstruktivistických přístupů ve výuce je označován jako badatelsky orientovaná výuka. V článku poukážeme na výsledky výzkumného šetření mezi učiteli matematiky 2. stupně ZŠ, jehož cílem bylo zjistit, jaké povědomí mají učitelé o badatelsky orientované výuce, zda znají tento přístup, zda jej využívají, realizují ve své výuce, jaké mají konkrétní zkušenosti, v jakých oblastech matematiky jej využívají, jakých nástrojů ICT k tomu využívají a jaké překážky jim brání k širšímu uplatnění těchto metod ve výuce.

Klíčová slova: výuka matematiky, badatelsky orientovaná výuka, ICT.

ICT support of inquiry-based approach in teaching mathematics at elementary schools

Abstract: Currently, one of the constructivist approaches in teaching is known as inquiry-based teaching. In the article, we point out the results of the research among teachers of mathematics at elementary schools which aim was to find out what awareness of inquiry-based teaching teachers have, whether they know this approach, whether they use it, whether they implement it in their teaching, what particular experience have they, in which parts of mathematics have they use it, what ICT tools they use to do so and what barriers impede them more frequent application of these methods in their teaching.

Key words: teaching mathematics, inquiry-based teaching, ICT.

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/Nocar.pdf

MOŽNOSTI PROGRAMU SIMREAL+

Zuzana Pátíková

Fakulta aplikované informatiky, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Abstrakt: Cílem příspěvku je seznámit české učitele s možností využití simulačního a vizualizačního programu SimReal+ ve výuce některých témat matematiky. Záměrem je okomentovat hlavní rysy programu, jeho výhody a nevýhody, přiblížit práci v něm a provést zájemce základní navigací.

Klíčová slova: simulace, vizualizace, software

Possibilities of the program SimReal+

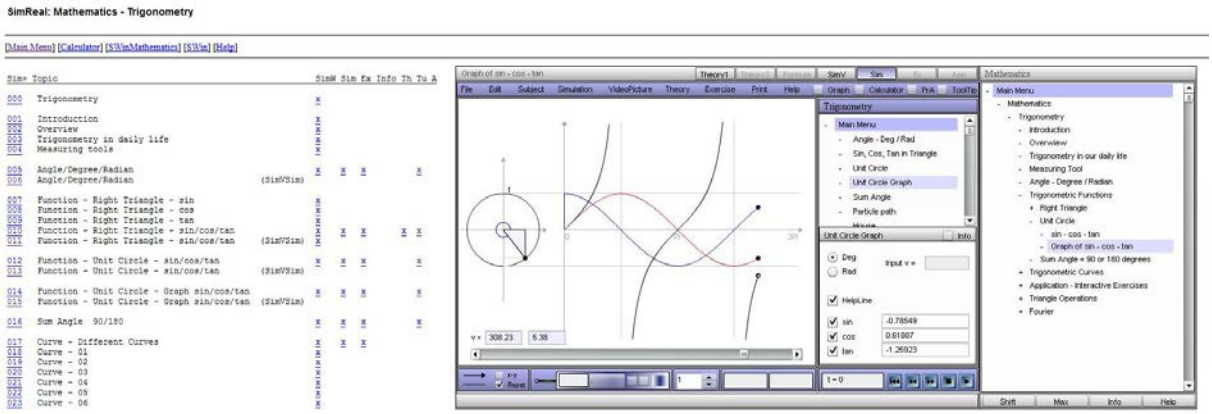
Abstract: The aim of the contribution is to introduce to Czech teachers of mathematics the possibilities of use of simulation and visualization program SimReal+ in teaching of some mathematical topics. The goal is to comment on key features of the program, its advantages and disadvantages, to show how to work with it and to present the basic navigation.

Key words: simulation, visualization, software

Úvod

SimReal+ je simulační a vizualizační program, jehož autorem je Per Henrik Hogstad, vyučující na norské University of Agder. Na základě vlastních zkušeností s výukou matematiky, fyziky a počítačových věd naprogramoval aplikaci, která má být pomocí a podporou pro vysvětlování složitějších témat v těchto předmětech. Připravené dávky, které v průběhu posledních let vznikly, jsou dnes dostupné pro použití doma či přímo ve výuce všem zájemcům s přístupem na Internet. Program je stále ve vývoji a průběžně dochází k mnohým inovacím a zlepšením.

SimReal+ zahrnuje simulátory, interaktivní animace, videa výuková i streamy z přímé výuky (v norštině), hry a grafický kalkulátor. Navigace dostupnými materiály na webových stránkách je uspořádána tematicky a v angličtině.



Použití programu SimReal+ ve výuce matematiky

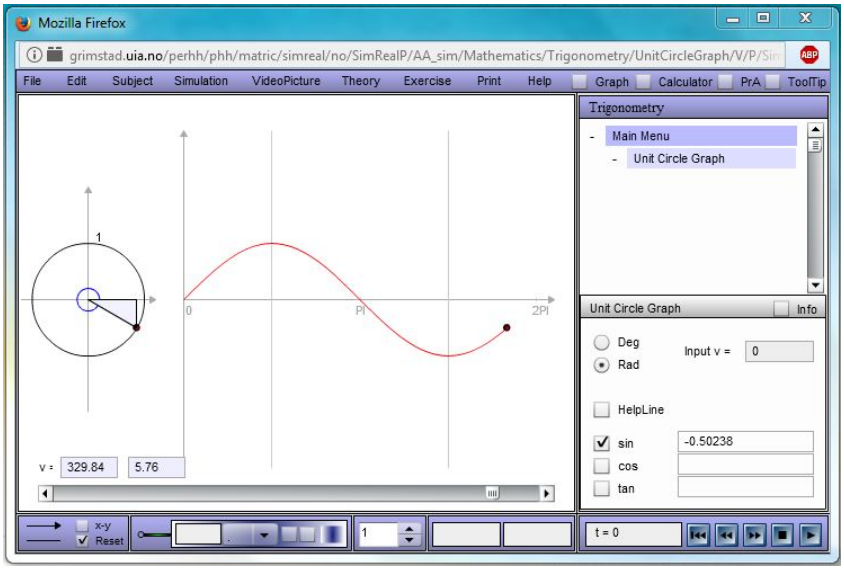
Program SimReal+ a zejména nachystané materiály k jednotlivým tématům je možné využít ve výuce matematických předmětů na středních školách a v bakalářských programech vysokých škol. V případě vhodného zadání lze tento nástroj využít také pro samostatnou práci žáků a°studentů. Čeští učitelé a žáci bohužel zůstanou ochuzeni o možnost použití části SimVideo obsahující videomateriály v norštině. Stále však mají k dispozici jazykově neutrální simulační dávky a kalkulátor.

Hlavními výhodami z hlediska českého uživatele jsou následující vlastnosti. Simulace lze provádět online, bez nutnosti instalování softwaru do počítače. Zabudovaný kalkulátor pro výpočty či vykreslení grafů se dá použít rychle a efektivně jen s použitím internetového prohlížeče. Interaktivní prostředí je pro žáky a studenty motivační, jednoduše mohou sami pracovat se simulacemi a zkoušet nová nastavení, případně kontrolovat vypočítané výsledky. Některé dávky poskytují vhled ze strany různých reprezentací problému a matematických konceptů. Nachystané materiály umožní koncentrovat se přímo na probírané učivo bez nutnosti přípravné fáze. Použití hotových simulací nevyžaduje programátorské schopnosti, pokročilejší uživatelé však v budoucnu budou mít možnost připravit si vlastní dávky v jednoduchém webovém prostředí.

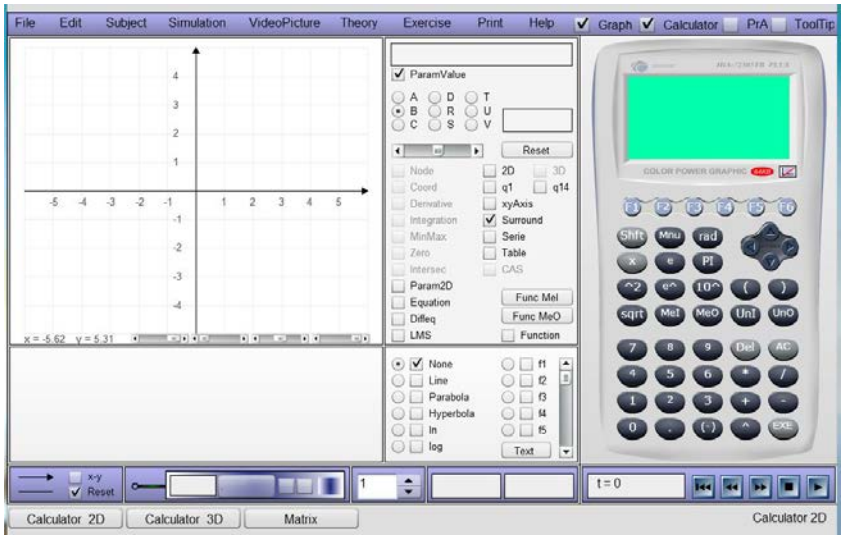
Mezi slabší stránky programu patří grafická a organizační reprezentace. Práce s uživatelským prostředím není úplně intuitivní, možností, co s dávkou lze dělat, je někdy příliš mnoho a jsou nepřehledné a málo srozumitelné. Navigace a struktura webových stránek je těžkopádná. Obsahové náplni by se dalo vytknout to, že je málo diferencovaná podle stupně obtížnosti učiva a neobsahuje dost příkladů. Simulacím chybí přehledný úvod k řešenému problému, proto materiály nejsou vhodné k samostudiu.

Matematická témata, ke kterým jsou dostupné simulace, zahrnují například některá témata z elementární matematiky, Pythagorovu větu, trigonometrii, definici kuželoseček, vysvětlení derivace, integrace a vícerozměrné integrace, matice, parametrizaci a polární

souřadnice, vektorová pole a křivkové integrály, Taylorovy a Fourierovy řady. Mnohem více témat má ovšem v provozu hlavně videa z výuky a tutoriály (norsky).

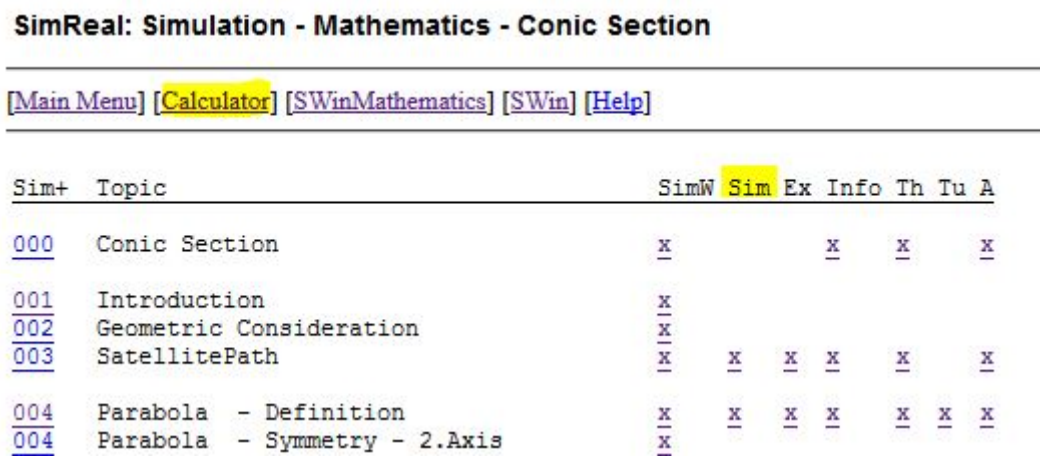


Kalkulátor umožňuje běžné výpočetní operace s kalkulačkou, grafickou reprezentaci více funkcí zároveň, grafy křivek zadaných parametricky, řešení rovnic, řešení obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty do druhého řádu včetně, ilustraci metody nejmenších čtverců, počítání součtu řady, základní statistické zpracování dat, u funkcí vyčíslí derivaci v bodě, kořeny, najde minimum/maximum na zadaném intervalu, numericky spočte integrál z funkce na daném intervalu. Volba 3D umožňuje vykreslit vektory v prostory, roviny, grafy funkcí dvou proměnných. Pod záložkou Matrix jsou skryté základní operace s maticemi.



Přístup k aplikaci

Vstupní bránou k uživatelskému prostředí programu je webová stránka http://grimstad.uia.no/perhh/phh/matric/simreal/no/sim.htm. Mimo jiné je zde odkaz na video tutoriál používání programu a k prostředí pro programování vlastních dávek. Hlavní volba „Start SimReal“ nebo klik na obrázek vedou k volbě předmětu a výběrem „Mathematics“ se uživatel dostane do hlavního menu pro matematické materiály. Volba konkrétního tématu pak vede k zobrazení navigace pro dostupné druhy materiálů. Simulace, které jsou v popředí našeho zájmu, jsou vyznačeny ve sloupečku „Sim“. Materiály v ostatních sloupcích vedou k různým druhům videí.



SimReal: Simulation - Mathematics - Conic Section

[Main Menu] [Calculator] [SWinMathematics] [SWin] [Help]

Sim+	Topic	SimW	Sim	Ex	Info	Th	Tu	A
000	Conic Section	x			x	x		x
001	Introduction	x						
002	Geometric Consideration	x						
003	SatellitePath	x	x	x	x	x		x
004	Parabola - Definition	x	x	x	x	x	x	x
004	Parabola - Symmetry - 2.Axis	x						

Ke kalkulátoru vede odkaz „Calculator“, který je umístěný v levém horním rohu navigačních stránek.

Závěr

Vzhledem k tomu, že SimReal+ má pouze jednoho autora a dá se tak říct, že je nízkonákladový, nemůže se měřit s více propracovanými konkurenty, ať už komerčními či nekomerčními. Přesto má potenciál a některé jeho rysy a výhody mohou zaujmout učitele natolik, že jej začnou používat ve své výuce jako doplňkový nástroj.

Literatura:

[1] Curri, E.: *Using computer technology in teaching and learning mathematics in an Albanian upper secondary school*, unpublished master thesis, University of Agder, Norway, 2012.

[2] Brekke, M., Hogstad, P. H.: *New teaching methods – Using computer technology in physics, mathematics and computer science*, International Journal of Digital Society, Volume 1, Issue 1, 2010.

[3] Hadjerrouit, S.: *Assessing the affordances of SimReal+ and their applicability to support the learning of mathematics in teacher education*, Issues in Informing Science + Information Technology, Volume 14, 2017.

Zuzana Pátíková
Fakulta aplikované informatiky
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Nad Stráněmi 4511, Zlín 76005
e-mail: patikova@utb.cz

PODPORA FINANČNÍ GRAMOTNOSTI S VYUŽITÍM APLIKACE STUDENTBROKER

Vladimíra Petrášková, Přemysl Rosa

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Abstrakt: Z výzkumu FINRA vyplývá, že výsledky respondentů v oblasti diverzifikace portfolia za účelem redukce případných rizik na akciových trzích jsou slabší než v ostatních oblastech. Zároveň je v současnosti pro mnohé atraktivní, vzhledem k nízkým úrokovým sazbám u běžných spořících produktů, investování na těchto trzích. Problémem je, že toto téma se špatně implementuje do běžné výuky finanční matematiky. Řešením by mohlo být využití aplikace StudentBroker od Fio banky.
V tomto příspěvku jsou zmíněny zkušenosti autorů s využíváním aplikace StudentBroker ve výuce zaměřené na posílení finanční gramotnosti. Zároveň bude představena samotná aplikace.

Klíčová slova: akciové trhy, finanční deriváty, finanční gramotnost

Supporting financial literacy using StudentBroker application

Abstract: FINRA research shows that results of respondents in portfolio diversification used to reduce potential risks in stock markets are worse than results in other areas. At the same time, it is currently attractive for many, given the low interest rates on common savings products, investments in these markets. The problem is that this topic is hard to implement in the ordinary course of financial mathematics. The solution could be to use StudentBroker from Fio Bank.
In this paper, the authors' experiences with the use of StudentBroker are focused on teaching financial literacy. At the same time, the application itself will be introduced.

Key words: Financial derivatives, financial literacy, stock markets

Úvod

Finanční vzdělávání je v posledních letech v popředí zájmu nejedné vlády. Přispívá k tomu skutečnost, že zadluženost nejen českých domácností, ale i celosvětově, roste. V ČR jsme stále častěji svědky toho, že takto zadlužené domácnosti nejsou schopny své dluhy splácet. Mnohdy se tak blíží exekučnímu řízení nebo osobnímu bankrotu. V souvislosti s tímto jevem se často hovoří o nízké úrovni finanční gramotnosti takto postižených dlužníků. Jak uvádí (Kalínská a kol.) jednou z mnoha příčin poslední světové krize (2007), která vznikla na finančních trzích Spojených států amerických a rychle se rozšířila téměř na celý svět, bylo chování spotřebitelů ve vyspělých zemích, konkrétně jejich nízká úroveň finanční gramotnosti.

Jednou z obsahových složek finančního vzdělávání je i znalost investičních produktů, k nimž patří i akcie a finanční deriváty. V tomto článku se budeme zabývat podporou výuky zaměřené na investování na finančních trzích.

Finanční vzdělávání v České republice

V České republice se v rámci péče o ochranu spotřebitele na finančním trhu začalo otázkami finančního vzdělávání zabývat Ministerstvo financí, které zdůrazňuje, že finanční gramotnost obyvatel je jedním ze základních pilířů ochrany spotřebitele na finančním trhu. V srpnu 2007 MF ČR vydalo dokument Rámcová politika Ministerstva financí v oblasti ochrany spotřebitele na finančním trhu, jenž slouží jako výchozí materiál, který stanovuje hlavní cíle, oblasti a principy, na které se MF ČR ve svých aktivitách na poli ochrany spotřebitele na finančním trhu zaměřuje. Obecným cílem ochrany spotřebitele na finančním trhu z pohledu MF ČR je:

dosažení stavu, kdy spotřebitel činí na finančním trhu odpovědné a adekvátní rozhodnutí ve vztahu k jeho aktuální situaci, tj. obstarává si služby a pořizuje produkty, jež nejlépe vyhovují jeho aktuálním potřebám a možnostem, a má možnost efektivně prosazovat a chránit své zájmy a práva.“ (MF ČR, 2007b)

V tomto dokumentu se uvádí, že stanoveného cílového stavu lze dosáhnout aktivitami v rámci tří pilířů:

- prvním je informovanost spotřebitele, tj. zajištění adekvátních informací poskytovaných pracovníky s odpovídající odborností,
- navazujícím (druhým) pilířem je vzdělávání spotřebitelů, tedy zvýšení jejich finanční gramotnosti tak, aby byli schopni získané informaci správně zpracovat, vyhodnotit a provést na finančním trhu konkrétní rozhodnutí,
- třetím pilířem je zajištění adekvátního postavení spotřebitele ve vztahu k distributorům finančních produktů a služeb.

V souvislosti s druhým pilířem hlavní aktivitou MF bylo revidování stávajícího systému finančního vzdělávání a následně vytvoření nového funkčního a komplexního systému finančního vzdělávání. Cílem je posílení schopnosti spotřebitele s přijatými informacemi pracovat, zpracovávat je a promítnout je do vlastního racionálního rozhodování. Tento cíl je

prosazován prostřednictvím Národní strategie finančního vzdělávání (dále NSFV, jedná se o aktualizovanou verzi dokumentu *Strategie finančního vzdělávání* (MF ČR, 2007a) a dokumentu *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školác*h (MF ČR, 2007c).

V dokumentu *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách* (MF ČR, 2007c), který byl vytvořený společně ministerstvy financí (MF), školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT) a průmyslu a obchodu (MPO) z pověření vlády České republiky, byly vymezeny Standardy finanční gramotnosti pro tři různé cílové skupiny:

- Standard finanční gramotnosti pro žáka 1. stupně základní školy (věk: 6 – 10 let).
- Standard finanční gramotnosti pro žáka 2. stupně základní školy (věk: 11 – 15 let).
- Standard finanční gramotnosti pro studenta střední školy (věk: 16 – 19 let), který odpovídá standardu dospělého člověka.

Standardy pro všechny tři uvedené cílové skupiny zahrnují následující oblasti: Peníze, Hospodaření domácnosti a Finanční produkty. Standard finanční gramotnosti pro střední školu obsahuje navíc téma Práva spotřebitele.

Standardy finanční gramotnosti byly v roce 2009 plně implementovány do rámcových vzdělávacích programů pro gymnázia a střední školy. Implementace standardů finanční gramotnosti do RVP pro ZŠ byla dokončena v lednu 2013.

Finanční trhy

V tomto článku se budeme zabývat výukou problematiky finančních trhů, které jsou v RVP pro gymnázia implementovány do oblasti **Člověk a svět práce / Finance** (VÚP Praha, 2007, s. 50):

Výstupy: Žák

…. navrhne způsoby, **jak využít volné finanční prostředky** (spoření, produkty se státním příspěvkem, **cenné papíry**, nemovitosti aj.), vybere nejvýhodnější produkt pro investování volných finančních prostředků a vysvětlí proč….

Učivo

…Finanční produkty – způsoby využití přebytku finančních prostředků…..

Z celé řady výzkumu zaměřených na zjišťování úrovně finanční gramotnosti vyplynulo, že respondenti měli problém především při řešení úloh zaměřených na finanční trhy. Např. v národním šetření USA, kterého se zúčastnilo 28 146 respondentů různého věku, pohlaví, etniky a vzdělání a které se uskutečnilo v roce 2011, pouze 10 % dotázaných správně odpovědělo na otázku, která byla zaměřena na porozumění vztahu mezi tržní úrokovou sazbou a cenou dluhopisu. V roce 2015 na tu samou otázku správně odpovědělo 28 % respondentů. Naopak u otázky, která mapovala porozumění diverzifikace rizika, došlo v rámci těchto dvou šetření k poklesu správných odpovědí.

V akademickém roce 2011/2012 byl na PF JU uskutečněn výzkum, jehož cílem bylo nalézt odpovědi na následující otázky: Jaká je úroveň finanční gramotnosti nastupujících studentů studijního oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání v akademickém roku

2011/2012? Které její složky jsou dostatečně rozvinuté? Na rozvinutí jakých složek finanční gramotnosti je třeba se v přípravě budoucích učitelů zaměřit?

Výzkum byl proveden se 47 budoucími učiteli druhého stupně ZŠ. Studenti byli v 1. ročníku studia studijního oboru „Matematika se zaměřením na vzdělávání“ a byli přihlášeni do kurzu „Úvod do financí“. Jejich věk se pohyboval od 19 do 21 let. Studenti, kteří se zúčastnili výzkumu, byli na střední škole seznámeni s finanční problematikou v rozsahu kurikulárních dokumentů české vzdělávací soustavy. Učivo korespondovalo s výše zmíněnými standardy finanční gramotnosti pro střední školy.

Největší problém měli studenti s otázkami cílenými na finanční trhy. V řízeném rozhovoru studenti konstatovali, že problematika investování na kapitálových trzích nebyla na absolvovaných středních školách vůbec vyučována, a pokud ano, tak s velkým omezením. Dále uváděli, že nemají příliš velké životní zkušenosti s těmito produkty. Jejich životní zkušenosti s finančními produkty spadaly především do oblasti studentských účtů a internetového bankovnictví, výběru mobilního operátora či užití debetní, popřípadě kreditní karty.

S výše uvedeného je zřejmé, že v přípravě budoucích učitelů matematiky by se měla pozornost zaměřit na trh cenných papírů (akcie, dluhopisy), neboť v této oblasti studenti vykazovali největší neznalost.

Výsledky výše zmíněného výzkumu byly publikovány v Petrášková (2013).

StudenrBroker

Při osvojování poznatků akciového, resp. derivátového může být jako výukový prostředek využita demoverze aplikace e-Broker, kterou nabízí Fio banka zdarma. Tato demoverze umožňuje nakoupit či prodat akcie, deriváty nebo ETF (Fond obchodovaný na burze s nízkým rozpětím mezi nákupními a prodejními cenami) bez jakéhokoliv rizika, neboť v demoverzi lze provádět fiktivní vklady vybraných cenných papírů do portfolia a fiktivní výběry z portfolia. Uživatel/student si tak může sestavit vlastní portfolio cenných papírů, které odpovídá jeho zvolené investiční strategii a sledovat jeho úspěšnost v čase. Tímto způsobem si může uživatel/student otestovat svoje schopnosti bez výše zmíněného rizika. Fio banka nabízí i výukový program StudentBroker, do kterého se může přihlásit pouze student vysoké školy zařazené do partnerského vzdělávacího programu české burzy cenných papírů RM-SYSTÉM. Projekt StudentBroker vznikl jako podpůrný a praktický prvek výuky na vysokých školách a univerzitách v České republice. Cílem projektu je představit studentům praktickou část spojenou s investováním nebo obchodováním na kapitálovém trhu nejen v ČR, ale i v zahraničí, a to prostřednictvím obchodní aplikace s virtuálními prostředky. Každá škola, která je zapojena do partnerského vzdělávacího programu StudentBroker, má v systému vytvořen vlastní profil. Každý student má k dispozici virtuální milion korun českých, které může investovat do českých i zahraničních akcií a v rámci školního semestru co nejefektivněji budovat své portfolio cenných papírů dle osnov příslušné vysoké školy nebo univerzity. V další části investiční

platformy má připraveno 50 000 USD, se kterými si může vyzkoušet obchody s deriváty US futures, jejichž prostřednictvím může spekulovat na pohyb cen například ropy či zlata. Ceny akcií i derivátů přesně kopírují reálný stav trhu a student tak získává neocenitelnou praktickou zkušenost z oblasti finančního vzdělávání[1]. Výukový program StudentBroker může být doplněn i vzdělávacími semináři, které Fio banka ve spolupráci s českou burzou RM-SYSTÉM nabízí zdarma a které jsou zaměřeny na kapitálové trhy. Nabízené kurzy jsou určeny jak začátečníkům, tak zkušeným investorům. Pro studenty je vhodný kurz *Základy investování na kapitálovém trhu,* ve kterém je seznámen se základy obchodování s akciemi a již zmíněnou aplikací e-Broker, takže při užití její studentské verze StudentBroker nemusí postupovat metodou „pokus-omyl".

Závěr

Témata finanční gramotnosti, která se týkají investování, ať už obecně nebo na akciových trzích, se studentům prezentují s jistou dávkou obtíží. Modelování příkladů, které by poskytli dostatečný vhled do dané problematiky, je vzhledem ke komplexnosti těchto trhů téměř nemožné. V tomto ohledu je aplikace StudentBroker, dle názoru autorů, vhodnou pomůckou k představení daných témat. Aplikace StudentBroker je z principu pouze mírně upravenou kopií reálné investiční aplikace e-Broker a data jí poskytována zrcadlí vývoj skutečného trhu. Díky tomu mají studenti možnost seznámit se s reálným trhem, aniž by museli investovat svůj kapitál, a tím i lépe pochopit zákonitosti jeho fungování.

Literatura:

[1] FINRA. (2011). Financial capability study [online]. [cit. 2013-05-13]. Available at http://www.usfinancialcapability.org

[2] MF ČR. (2007a). *Strategie finančního vzdělávání*. Praha: Ministerstvo financí ČR, c2007. Dostupné z http://www.mfcr.cz

[3] MF ČR. (2007b). *Rámcová politika Ministerstva financí v oblasti ochrany spotřebitele*. Praha: Ministerstvo financí ČR. Dostupné z http://www.mfcr.cz/cs/soukromy-sektor/regulace/ochrana-spotrebitele/ramcova-politika-mf-ochrany-spotrebitele

[4] MF ČR. (2007c). *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách*. Praha: Ministerstvo financí ČR. Dostupné z http://www.msmt.cz/vzdelavani/system- budovani -financ ni-gramotnosti-na-zakladnich-a-strednich-skolach

[5] MF ČR (2010). *Národní strategie finančního vzdělávání*. Praha: Ministerstvo financí ČR, c2010. Dostupné z http://www.mfcr.cz/cps/rde/xchg/mfcr/xsl/fintrh_fin_vzdelavani.html

[1] Výukový program Student Broker. *Fio banka.* Dostupné z http://www.studentbroker.cz/

[6] Petrášková, V. (2013). *Pre-service mathematics Teachers' Financial Literacy*. The New Educational Review, Vol. 34, No. 4. Wydawnictwo Adam Marszalek, Torún, pp. 280-291

Vladimíra Petrášková
Jihočeská univerzita v Č. B.
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: petrasek@pf.jcu.cz

Přemysl Rosa
Jihočeská univerzita v Č. B.
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: rosapr00@pf.jcu.cz

VÝUKA MATEMATIKY V PROSTŘEDÍ DIGITÁLNÍCH TECHNOLOGIÍ

Jarmila Robová

Katedra didaktiky matematiky, MFF UK, Praha

Abstrakt: lánek je věnován aktuálním problémům využívání digitálních technologií ve výuce matematiky, a to zejména na středoškolské úrovni. První část je zaměřena na roli učitele ve výuce podporované technologiemi a na jeho znalosti, které jsou nezbytné pro rozvíjení dovedností a vědomostí žáků v digitálním prostředí. Druhá část se zabývá integrací technologií z pohledu žákova učení s důrazem na rozvíjení žákovských vědomostí a kompetencí potřebných pro účelné využívání technologií v matematice. Součástí článku jsou konkrétní příklady integrace programu GeoGebra ilustrující uváděné jevy a problémy.

Klíčová slova: Digitální technologie, výuka matematiky, role učitele, vědomosti a dovednosti žáků.

Teaching mathematics in digital technology environment

Abstract: This article deals with present problems of technology integration in teaching mathematics, especially at the secondary level. The first part is focused on the role of the teacher in teaching supported by digital technology and on his knowledge needed for developing pupils' understanding and skills. The second part is concerned with technology integration from the pupils' learning point of view, with the emphasis on pupils' knowledge needed for effective using technology in mathematics. The examples illustrating discovering and testing hypotheses in dynamic geometry Geogebra are included.

Key words: Digital technology, teaching mathematics, teacher role, pupils' knowledge and skills..

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/Robova.pdf

BADATELSKÉ ÚLOHY VE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

Libuše Samková

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích

Abstrakt: Tento příspěvek nabízí možnou odpověď na otázku, jaké úlohy zařazovat při badatelsky orientovaném vyučování matematice. V úvodu jsou stručně vymezeny různé typy úloh, které se při tomto vyučování mohou uplatnit: badatelské úlohy, otevřené úlohy a polyvalentní úlohy. V hlavní části příspěvku je podrobně představena jedna z badatelských úloh, která je polyvalentní i otevřená. Při vhodném uchopení je tato úloha využitelná při badatelsky orientovaném vyučování nezávisle na stupni vzdělávání (ZŠ, SŠ, VŠ).

Klíčová slova: BOVM, badatelsky orientované vyučování matematice, badatelská úloha, otevřená úloha, polyvalentní úloha.

Inquiry tasks in mathematics teaching

Abstract: This contribution offers a possible answer to a question which tasks can be used in the classroom within inquiry based mathematics teaching. In the introduction, we shortly characterize various types of tasks that can be utilized within this type of teaching: inquiry tasks, open tasks, and polyvalent tasks. The main part of the contribution introduces in detail one of inquiry tasks that is open and polyvalent. When properly arranged, the task can be employed independently of the school level (elementary, secondary, higher).

Key words: IBME, inquiry based mathematics education, inquiry task, open task, polyvalent task.

Úvod

Čtenáře, kteří neznají badatelsky orientované vyučování, si dovolím odkázat na svůj příspěvek, který se objevil na jedné z předchozích konferencí a který se vymezení tohoto stylu vyučování věnuje [6]. Mnoho dalších podrobností a různých souvislostí týkajících se historie

a vymezení badatelsky orientovaného vyučování (nejen) matematice naleznete v první polovině souhrnného článku [14] a v kapitole [12].

Zjednodušeně lze říci, že badatelsky orientované vyučování je vyučování, při kterém dochází k badatelským aktivitám žáků či studentů. Úlohy podněcující takové badatelské aktivity budeme nazývat *badatelské úlohy*.

Badatelské úlohy bývají zpravidla *úlohami otevřenými* ve smyslu otevřeného přístupu k matematice, což znamená, že u nich může existovat

- více způsobů, jak úlohu uchopit;
- více způsobů, jak úlohu řešit;
- více různých řešení (někdy i s nejasnou klasifikací);
- více způsobů, jak z úlohy vytvořit úlohu novou.

Obzvláště cennými jsou pak *úlohy polyvalentní*, což jsou otevřené úlohy, jejichž jednotlivá řešení jsou různě obtížná a každý žák/student si tak může najít "své" řešení odpovídající jeho znalostem.

Jednu takovou polyvalentní úlohu si nyní podrobně představíme. Její zadání jsem volně přeložila z publikace [4] a po mnoha ostrých testech upravila, aby lépe vyhovovalo plánovanému rozfázování úlohy a jejímu dalšímu didaktickému rozpracování. Oproti původnímu zadání tak například přibyla pravidla P1 a P2.

Pehkonenova úloha -- zadání

Z 12 stejně dlouhých párátek můžeme vytvořit obrys čtverce, jehož obsah je 9 čtverečných párátek (zkráceně čp).

Dokážete z 12 párátek vytvořit obrys rovinného útvaru s obsahem 8, 7, 6, 5 čp?

Je třeba využít všechna párátka a dodržovat následující dvě pravidla:

P1) párátka se mohou dotýkat pouze svými konci;
P2) každý konec párátka se dotýká právě jednoho jiného párátka.

Kolik existuje útvarů s obsahem 5 čp? Je jich víc než 10? (Za různé považujeme takové útvary, které nelze převést jeden na druhý otočením a/nebo převrácením.)

Dokážete vytvořit obrysy rovinných útvarů s obsahem 4, 3, 2, 1 čp?

Dokážete vytvořit obrys rovinného útvaru s obsahem větším než 9 čp?

Jaký je nejmenší možný obsah? Jaký je největší možný obsah?

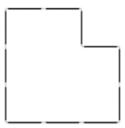
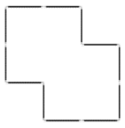
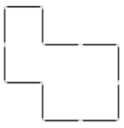
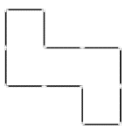
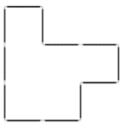
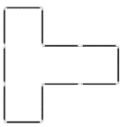
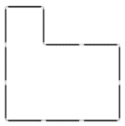
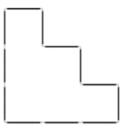
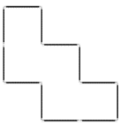
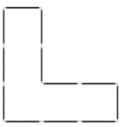
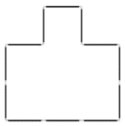
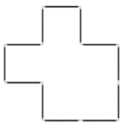
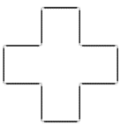
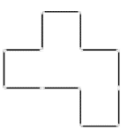
Řešení úlohy

Jak se ukázalo po několika ostrých testech úlohy, nejčastěji používaný prvoplánový postup řešení vychází z obrysu čtverce zmiňovaného v zadání úlohy a z úpravy, která by se mohla

nazývat *prolamování rohů* nebo také *rohová úprava*. Tato úprava spočívá v přemístění dvou párátek tvořících některý z rohů útvaru tak, aby se obsah útvaru zmenšil o 1 čp.

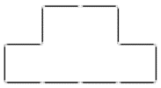
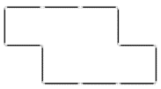
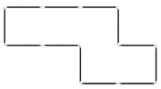
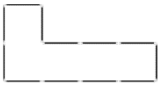
Jednotlivá řešení, jež můžeme získat z obrysu čtverce opakovaným uplatněním této úpravy, jsou znázorněna v Tabulce 1. Tabulka je uspořádána tak, že vybereme-li si nějaký útvar uvedený v tabulce, tak v sousedních buňkách vpravo jsou umístěny útvary, které se z vybraného útvaru dají vytvořit jednou rohovou úpravou. Výčtem útvarů je tabulka kompletní, ale některé útvary je samozřejmě možné z původního čtverce získat i jiným pořadím rohových úprav. Pro přehlednost je každý sloupec tabulky v záhlaví opatřen údajem o obsahu útvarů, které se v něm nacházejí.

Tab. 1: Řešení získaná z obrysu čtverce pomocí rohové úpravy.

S = 9 čp	S = 8 čp	S = 7 čp	S = 6 čp	S = 5 čp
				
				
				
				
				
				

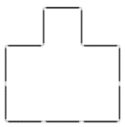
Tímto způsobem jsme však rozhodně nezískali všechna řešení Pehkonenovy úlohy. Kromě obrysu čtverce totiž z 12 párátek můžeme vytvořit i obrysy jiných známých geometrických útvarů, například obdélníků, a i na ně se můžeme pokusit uplatnit rohovou úpravu. Ukáže se, že na obdélník o rozměrech 2 a 4 párátka je možno rohovou úpravu uplatnit, ale na obdélník o rozměrech 1 a 5 párátek ji uplatnit nelze (viz Tabulka 2).

Tab. 2: Řešení získaná z obrysu obdélníků pomocí rohové úpravy.

S = 8 čp	S = 7 čp	S = 6 čp	S = 5 čp
		  	  

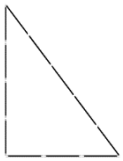
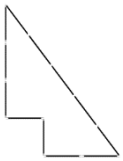
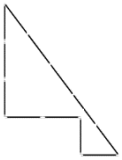
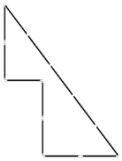
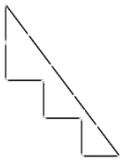
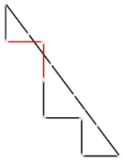
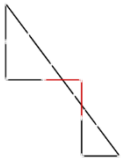
Pokud bychom se chtěli s úlohou pohybovat pouze v kontextu jednotkové čtvercové sítě, máme už téměř všechna řešení nalezena. Obrys žádného jiného útvaru již na této síti neleží, ale přesto nám jedno řešení chybí – není totiž dostupné pomocí rohové úpravy. Využívá analogické úpravy, kterou bychom mohli nazývat *prolamování dvojrohů* nebo také *dvojrohová úprava*. Tato úprava spočívá v přemístění tří párátek tvořících dva sousední rohy útvaru tak, aby se obsah útvaru zmenšil o 2 čp. Z útvarů znázorněných v Tabulkách 1, 2 můžeme dvojrohovou úpravu použít pouze na jediný; získáme tak chybějící poslední řešení na jednotkové čtvercové síti (viz Tabulka 3).

Tab. 3: Jediné řešení získané pomocí dvojrohové úpravy (vpravo).

S = 7 čp	S = 5 čp
	

Mimo jednotkovou čtvercovou síť máme mnoho dalších možností. Pythagorejský trojúhelník se stranami 3, 4 a 5 párátek sice může mít vrcholy umístěné v bodech jednotkové čtvercové sítě, ale jeho přepona je mimo síť. Tento trojúhelník má obsah 6 čp a na jeho obrys můžeme opakovaně uplatnit rohovou úpravu. Musíme jen dávat pozor, kdy je úprava ještě možná a kdy už ne (viz Tabulka 4).

Tab. 4: Řešení získaná z obrysu pythagorejského trojúhelníku pomocí rohové úpravy; v posledním sloupci případy, kdy rohová úprava již není možná.

S = 6 čp	S = 5 čp	S = 4 čp	S = 3 čp	nelze
		 		 

Z dalších známých geometrických útvarů na první pohled žádný nevypadá, že by ho bylo možné umístit svými vrcholy do bodů jednotkové čtvercové sítě, ale pokud bychom chtěli mít jistotu, museli bychom systematicky procházet geometrické útvary jeden po druhém a podrobně je zkoumat. Podobně není jasné, jestli ještě nějaké další rovinné útvary mohou mít celočíselný obsah. Pokusíme se teď obě záležitosti v rámci možností objasnit najednou – systematickým zkoumáním.

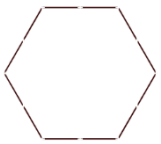
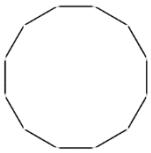
Jako první krok tohoto zkoumání musíme zjistit, obrysy kterých známých geometrických útvarů je ještě možné z 12 párátek vytvořit, a pak určit obsahy těchto útvarů. Po nahlédnutí do školních matematických tabulek zúžíme hledání na trojúhelníky, pravidelné mnohoúhelníky, lichoběžníky, kosodélníky a kosočtverce.

Otázka hledání všech trojúhelníků, jejichž obrys je možné vytvořit z 12 párátek, je pěkným kombinatorickým cvičením založeným na trojúhelníkové nerovnosti. Přestože by člověk mohl mít pocit, že takových trojúhelníků musí existovat mnoho, ve skutečnosti existují pouze tři. Kromě již výše zmiňovaného pythagorejského trojúhelníku už existuje jen rovnostranný trojúhelník se stranou o délce 4 párátka a rovnoramenný trojúhelník se základnou o délce 2 párátka a rameny o délce 5 párátek. Obecný trojúhelník žádný neexistuje. Obsah rovnostranného ani rovnoramenného trojúhelníku není celočíselný, protože jejich výška není celočíselná (rameno a polovina základny mají sice celočíselnou velikost, ale nepatří do žádné pythagorejské trojice). Ze stejného důvodu nelze vrcholy těchto dvou trojúhelníků umístit do bodů jednotkové čtvercové sítě.

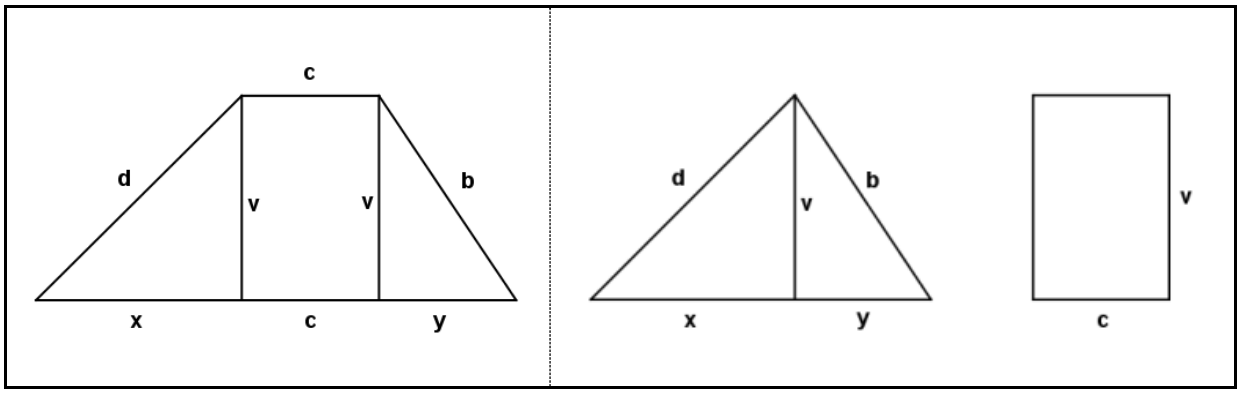
Pravidelné mnohoúhelníky, jejichž obrys je možné vytvořit z 12 párátek, existují také jen tři. Kromě již výše zmiňovaného rovnostranného trojúhelníku se jedná o pravidelný šestiúhelník (se stranou o délce 2 párátka) a pravidelný dvanáctiúhelník (se stranou o délce 1 párátka). Jejich obsah není celočíselný, ale je zajímavý tím, že je větší než 9 čp. Jejich vrcholy opět nelze umístit do bodů jednotkové čtvercové sítě.

Nově nalezené trojúhelníky a pravidelné mnohoúhelníky jsou uvedené v Tabulce 5.

Tab. 5: Další trojúhelníky a pravidelné mnohoúhelníky.

			
S = 4 $\sqrt{3}$ čp	S = 2 $\sqrt{6}$ čp	S = 6 $\sqrt{3}$ čp	S = 3 (2 + $\sqrt{3}$) čp

Otázka hledání všech lichoběžníků je poněkud komplikovanější, vyžaduje vhodné rozložení lichoběžníku na menší útvary – obdélník a dva pravoúhlé trojúhelníky s jednou stejně dlouhou odvěsnou; po přiložení těchto trojúhelníků k sobě vznikne nový trojúhelník (viz Obr. 1). Obrys lichoběžníku je tvořen složením obrysu tohoto nového trojúhelníku a obrysem dvou vodorovných stran obdélníku.



Obr. 1: Rozdělení lichoběžníku na obdélník a dva trojúhelníky

Pokračujeme opět systematicky:

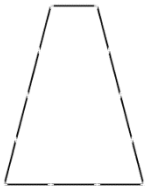
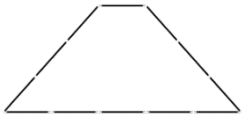
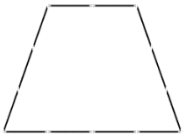
- Pokud mají vodorovné strany obdélníku délku 1 párátka (tj. c = 1), zbyde na trojúhelník 10 párátek. Z 10 párátek můžeme sestavit 2 různé trojúhelníky, oba jsou rovnoramenné: první s rameny o délce 4 párátka a základnou o délce 2 párátka (tj. b = d = 4, x = y = 1), druhý s rameny o délce 3 párátka a základnou o délce 4 párátka (tj. b = d = 3, x = y = 2).
- Pokud mají vodorovné strany obdélníku délku 2 párátka, zbyde na trojúhelník 8 párátek. Z nich můžeme sestavit 1 trojúhelník, opět rovnoramenný: s ramenem délky 3 párátka a základnou délky 2 párátka (b = d = 3, x = y = 1).
- Pokud mají vodorovné strany obdélníku délku 3 párátka, zbyde na trojúhelník 6 párátek. Z nich můžeme sestavit 1 trojúhelník, tentokrát rovnostranný o straně délky 2 párátka (b = d = 2, x = y = 1).
- Pokud mají vodorovné strany obdélníku délku 4 párátka, zbydou na trojúhelník 4 párátka. Ze 4 párátek trojúhelník nelze sestavit.

- Pokud mají tyto vodorovné strany délku 5 párátek, zbydou na trojúhelník 2 párátka, což je málo. Trojúhelník nelze sestavit.

Protože všechny nalezené trojúhelníky mají stejně dlouhá ramena, budou stejně dlouhá i ramena vzniklých lichoběžníků. Žádný z nalezených trojúhelníků není pravoúhlý, takže ani žádný z lichoběžníků nebude pravoúhlý.

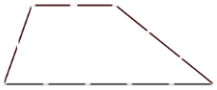
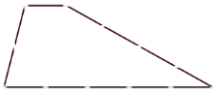
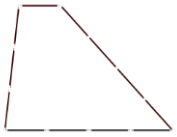
Všechny nalezené rovnoramenné lichoběžníky jsou znázorněny v Tabulce 6. Výpočet obsahu těchto lichoběžníků není obtížný, neboť jejich výška je zároveň výškou nad základnou rovnoramenného trojúhelníku; pata výšky je tedy umístěna ve středu základny. Jelikož je navíc délka základny vždy sudé číslo, tak se do Pythagorovy věty dosazují celá čísla. Ale vypočtené výšky nejsou celočíselné, tak ani obsahy nejsou celočíselné a vrcholy lichoběžníků nelze umístit do bodů jednotkové čtvercové sítě.

Tab. 6: Rovnoramenné lichoběžníky.

			
S = $2\sqrt{15}$ čp	S = $3\sqrt{5}$ čp	S = $3\sqrt{8}$ čp	S = $4\sqrt{3}$ čp

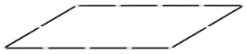
Nesmíme ovšem zapomenout i na varianty, kdy nalezené rovnoramenné trojúhelníky při tvorbě lichoběžníku otočíme tak, aby jedno jejich rameno bylo umístěno vodorovně. Potom vzniknou lichoběžníky s různě dlouhými rameny (jedno rameno lichoběžníku je tvořeno ramenem trojúhelníku a druhé rameno je tvořeno základnou trojúhelníku). Určení obsahu těchto lichoběžníků je mnohem obtížnější, neboť patu výšky v takto otočeném trojúhelníku nelze jednoduše určit a pro výpočet výšky je nutno využít složitější aparát, např. kosinovou větu a vztah mezi sinem a kosinem stejného úhlu. Výsledné nerovnoramenné lichoběžníky a jejich obsahy uvádí Tabulka 7.

Tab. 7: Nerovnoramenné lichoběžníky.

		
S = $\frac{14}{3}\sqrt{2}$ čp	S = $\frac{3}{2}\sqrt{15}$ čp	S = $\frac{10}{3}\sqrt{5}$ čp

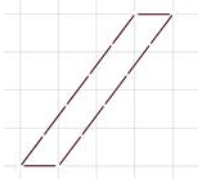
Ne náhodou nám závěr zbyly kosodélníky a kosočtverce – krátké zamyšlení nad tím, co určuje obsah libovolného rovnoběžníku (základna a výška), nás totiž dovede k univerzálnímu řešení Pehkonenovy úlohy: při vhodném zkosení dokážeme vytvořit kosodélník nebo kosočtverec o libovolném obsahu menším než 9 čp. Například zkosením čtverce ze zadání Pehkonenovy úlohy můžeme vytvořit kosočtverec o obsahu 6 čp (pokud strany zkosíme tak, aby výška byla 2 párátka) i kosočtverec o obsahu 3 čp (je-li výška 1 párátko). Můžeme samozřejmě dostat i kosočtverce nebo kosodélníky s neceločíselným obsahem (i libovolně malým), stačí zvolit vhodnou neceločíselnou výšku útvaru. Tabulka 8 znázorňuje čtyři různé rovnoběžníky o výšce 1 párátko.

Tab. 8: Kosodélníky a kosočtverec.

	S = 1 čp
	S = 2 čp
	S = 3 čp
	S = 4 čp

Na první pohled to vypadá, že vrcholy rovnoběžníků opět nepůjdou umístit do bodů jednotkové čtvercové sítě. Ale není to pravda. Aby bylo umístění možné, musí být výška rovnoběžníku celočíselná a zároveň musí být celočíselný i rozestup mezi sousedními vrcholy ve vodorovném směru. V praxi to znamená, že pravoúhlý trojúhelník pod dolní zkosenou stranou musí být pythagorejský. Protože nejmenší pythagorejský trojúhelník má přeponu o délce 5, může taková situace nastat pro kosodélník vzniklý zkosením stejného obdélníku jako kosodélník na prvním řádku tabulky 8. Dva takové útvary odpovídající dvěma různým polohám pythagorejského trojúhelníku znázorňuje Tabulka 9.

Tab. 9: Dva kosodélníky v jednotkové čtvercové síti.

	S = 3 čp
	S = 4 čp

Shrnutí odpovědí na jednotlivé otázky ze zadání úlohy

Dokážete z 12 párátek vytvořit obrys rovinného útvaru s obsahem 8, 7, 6, 5 čp?
Ano. Takové útvary jsou například uvedeny v Tabulkách 1, 2, 3, 4. Dalšími útvary mohou být vhodně zkosené kosodélníky a kosočtverce.

Kolik existuje útvarů s obsahem 5 čp? Je jich víc než 10?
V Tabulkách 1 až 4 je takových útvarů znázorněno celkem 12. Dalšími mohou být vhodně zkosené kosodélníky a kosočtverce, třeba kosočtverec o základně 3 párátka a výšce 5/3 párátka.

Dokážete vytvořit obrysy rovinných útvarů s obsahem 4, 3, 2, 1 čp?
Ano. Například Tabulka 4 uvádí dva útvary s obsahem 4 čp a jeden s obsahem 3 čp; Tabulka 8 uvádí po jednom útvaru ke každému obsahu 4, 3, 2, 1 čp. Také Tabulka 9 uvádí útvary s obsahem 4 čp a 3 čp.

Dokážete vytvořit obrys rovinného útvaru s obsahem větším než 9 čp?
Ano. Jedná se například o pravidelný šestiúhelník a pravidelný dvanáctiúhelník, uvedené v Tabulce 5.

Jaký je nejmenší možný obsah? Jaký je největší možný obsah?
Obsah může být libovolně malý (rovnoběžníkové univerzální řešení). Největší možný obsah je obsah pravidelného dvanáctiúhelníku.

Co jsme dále zjistili

Z párátek je možné sestrojit rozličné známé geometrické útvary: čtverec, 2 různé obdélníky, 1 pravoúhlý trojúhelník, 1 rovnoramenný trojúhelník, 3 pravidelné mnohoúhelníky (trojúhelník, šestiúhelník, dvanáctiúhelník), 7 lichoběžníků, nekonečně mnoho rovnoběžníků. Ale celočíselný obsah mohou mít pouze čtverec, obdélníky, pravoúhlý trojúhelník a vhodně zvolené rovnoběžníky.

Další útvary s celočíselným obsahem můžeme získat ze čtverce, z obdélníků a z pravoúhlého trojúhelníku rohovou nebo dvojrohovou úpravou.

Do bodů jednotkové čtvercové sítě můžeme umístit vrcholy čtverce, obdélníků a všech útvarů z nich vzniklých rohovou a dvojrohovou úpravou. A také vrcholy pythagorejského trojúhelníku a dvou kosodélníků.

Jak je možné úlohu dále rozvinout

Prvoplánovým rozšířením Pehkonenovy úlohy by mohlo být její zopakování s jiným počtem párátek, ale po chvíli zkoumání se ukáže genialita původního počtu 12, kterou nelze jednoduše přenést na jiné počty párátek:

- Abychom mohli vycházet ze čtverce podobně jako Pehkonen, musí být počet párátek dělitelný 4.

- Číslo 4 je příliš malé, nabízí jako řešení pouze čtverec a kosočtverce.
- Číslo 8 nabízí i obdélník, kosodélníky, trojúhelník, pravidelný osmiúhelník a lichoběžník, ale většinu z nich pouze v 1 exempláři. Navíc číslo 8 není dělitelné 3, takže nedostaneme rovnostranný trojúhelník. Navíc číslo 8 není součtem žádné pythagorejské trojice, takže nedostaneme ani pravoúhlý trojúhelník.
- Číslo 16 nabízí podobné útvary jako číslo 8, a ve více exemplářích. Ale opět není dělitelné 3 a není součtem žádné pythagorejské trojice.
- U čísla 16 a větších je na místě položit si otázku, zdali takový počet pro párátka není příliš velký, a to jak pro manipulaci s nimi, tak pro kombinatorické úvahy. Již systematické hledání všech trojúhelníků pro počet 12 bylo poměrně časově náročné, a co teprve s většími čísly...

Opakovat úlohu en bloc s jiným počtem párátek tedy nebudeme. Ale můžeme využít jednotlivé součásti úlohy a ty dále rozvíjet. Ukážeme si tři různé možnosti takového rozvoje.

Před chvílí zmiňované systematické hledání všech trojúhelníků je pěknou kombinatorickou rozcvičkou, jako legitimní se tedy jeví otázka, kolik různých obrysů trojúhelníků můžeme sestavit například z 11 párátek, nebo z 10. Podobný efekt by mělo odstranění požadavku "je třeba využít všechna párátka" z původního znění Pehkonenovy úlohy.

Dalším zajímavým momentem řešení Pehkonenovy úlohy jsou rohová a dvojrohová úprava. Není možné tyto úpravy nějak zobecnit? Rohovou úpravu lze formálně popsat ve třech krocích:

i) v obrysu zvolíme dvě sousední párátka, která jsou navzájem kolmá;
ii) uchopíme je a zrcadlově překlopíme podle osy tvořené spojnicí těch jejich konců, které se navzájem **ne**dotýkají;
iii) zkontrolujeme, zda se spojnice těch konců párátek, které se navzájem dotýkají, překlopila dovnitř útvaru, k němuž původní obrys patřil.

Krok iii) zajišťuje, že nově vzniklý útvar má obsah menší než původní útvar a že nově vzniklý útvar splňuje konstrukční pravidla P1 a P2 uvedená v zadání úlohy:

– pokud by se spojnice překlopila vně útvaru, obsah by se o 1 čp zvětšil;
– pokud by se spojnice překlopila na obrys útvaru, překlopená párátka by se dostala do kontaktu s dalšími párátky, a tak by nebylo splněno pravidlo P1 nebo P2.

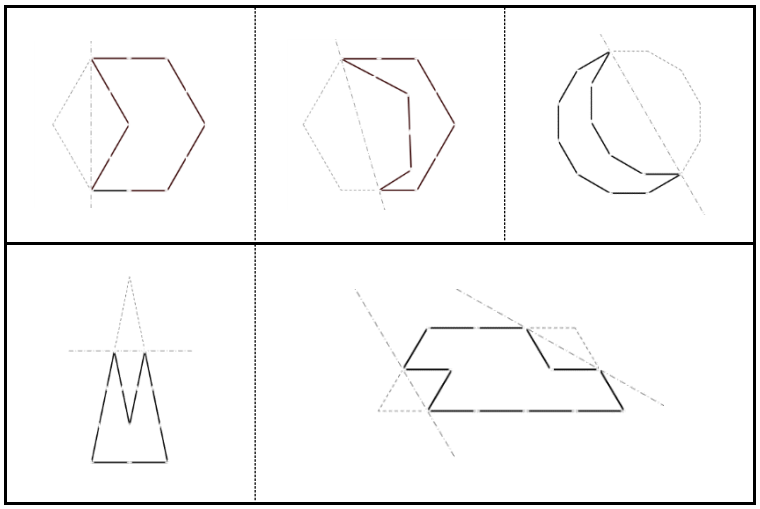
Tento formální přepis nám napovídá souvislost rohové úpravy s osovou souměrností. První krok úpravy můžeme snadno zobecnit a v obrysu zvolit libovolný počet sousedních párátek, bez bližšího požadavku na jejich vzájemnou polohu. Pak už jen stačí ve druhém a třetím kroku zobecnit popis konců, které se navzájem (ne)dotýkají, a dostaneme popis nové úpravy, která v sobě zahrnuje jak rohovou úpravu, tak dvojrohovou, a také mnoho dalších úprav:

i) v obrysu zvolíme libovolný souvislý neuzavřený úsek (tj. tento úsek má právě dva konce);
ii) uchopíme jej a zrcadlově překlopíme podle osy tvořené spojnicí jeho konců;

iii) zkontrolujeme, zda se celý úsek (bez konců) překlopil dovnitř útvaru, k němuž původní obrys patřil.

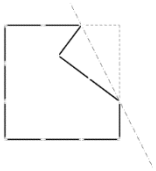
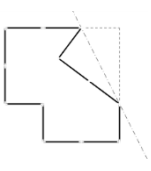
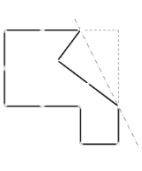
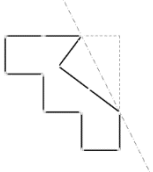
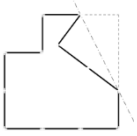
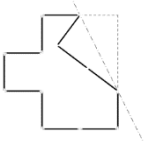
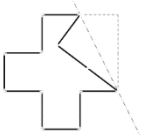
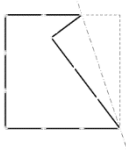
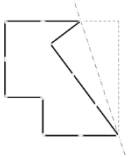
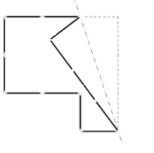
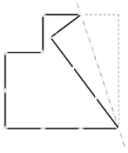
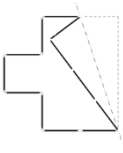
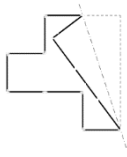
S touto obecnou úpravou můžeme z 12 párátek tvořit obrysy dalších útvarů a nadále dodržovat pravidla P1 a P2; úpravu můžeme používat i opakovaně (viz Tabulka 10).

Tab. 10: Obecná úprava použitá na pravidelný šestiúhelník, pravidelný dvanáctiúhelník, rovnoramenný trojúhelník a rovnoramenný lichoběžník.



Při vhodné volbě výchozího obrysu a vhodné volbě přemisťovaného úseku mohou nově vzniklé útvary mít i celočíselný obsah (viz Tabulka 11).

Tab. 11: Některá řešení s celočíselným obsahem získaná pomocí obecné úpravy čtverce.

S = 7 čp	S = 6 čp	S = 5 čp	S = 4 čp	S = 3 čp
				
				
				
				

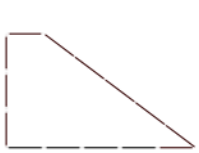
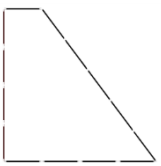
Třetí možnost rozšíření Pehkonenovy úlohy nám nabízí pasáž, ve které jsme hledali všechny možné lichoběžníky, jejichž obrys je tvořen 12 párátky. Tvarů jsme nalezli 7, což je poměrně dost, ale žádný z nich neměl celočíselný obsah. Jako návaznou si tak můžeme položit otázku, kolik párátek bychom potřebovali, abychom mohli sestrojit obrys lichoběžníku s celočíselným obsahem.

Vyjít můžeme ze situace na Obr. 1, podrobněji se zaměříme na trojúhelník a obdélník znázorněné na tomto obrázku vpravo. K celočíselnému obsahu nás mohou dovést dvě cesty: buď bude obsah obdélníku i obsah trojúhelníku neceločíselný, ale jejich součet celočíselný, nebo bude obsah obdélníku i obsah trojúhelníku celočíselný a jejich součet pak automaticky také. První možnost je poměrně obtížná na argumentaci a nebudeme se jí věnovat. Podrobně se však podíváme na tu druhou možnost. Hledáme tedy obdélník a trojúhelník z Obr. 1 vpravo tak, aby jejich obsahy byly celočíselné. Protože svislý rozměr obdélníku je zároveň výškou trojúhelníku a vodorovný rozměr obdélníku je vždy celočíselný (je celý sestrojen z párátek), tak z požadavku na celočíselný obsah obdélníku plyne požadavek na celočíselnou výšku trojúhelníku. K celočíselnému obsahu trojúhelníku nás dovede pythagorejský trojúhelník, nejmenší takový je trojúhelník z Tabulky 4. Tento trojúhelník můžeme umístit do schématu z Obr. 1 celkem třemi různými způsoby, ale pouze ve dvou z nich je jeho výška celočíselná:

- Pokud má vodorovná strana trojúhelníku délku 5 párátek (tj. $x + y = 5$, $b = 4$, $c = 3$), tak jeho výška je 12/5, což není celé číslo.
- Pokud má vodorovná strana trojúhelníku délku 4 párátka (tj. $x + y = 4$, $b = 5$), tak jeho výška splyne s druhou jeho odvěsnou (tj. $v = 3$, $y = 4$, $d = 0$, $x = 0$). Na tento trojúhelník budeme potřebovat 12 párátek. Nejmenší možný vodorovný rozměr obdélníku je 1 párátko (tj. $c = 1$). Složením trojúhelníku a obdélníku vznikne pravoúhlý lichoběžník, na jehož obrys je potřeba $12 + 2 = 14$ párátek.
- Pokud má vodorovná strana trojúhelníku délku 3 párátka (tj. $x + y = 3$, $b = 5$), tak jeho výška splyne s druhou jeho odvěsnou (tj. $v = 4$, $y = 3$, $d = 0$, $x = 0$). Na tento trojúhelník budeme potřebovat 12 párátek. Nejmenší možný vodorovný rozměr obdélníku je 1 párátko (tj. $c = 1$). Složením trojúhelníku a obdélníku vznikne pravoúhlý lichoběžník, na jehož obrys je potřeba $12 + 2 = 14$ párátek.

Oba nalezené lichoběžníky jsou uvedeny v Tabulce 12. Jejich obsah je součtem obsahu pythagorejského trojúhelníku (6 čp) a obsahu obdélníku s vodorovným rozměrem 1 párátko a svislým rozměrem rovným výšce pythagorejského trojúhelníku (tj. 3, resp. 4 párátka).

Tab. 12: Lichoběžníky s celočíselným obsahem.

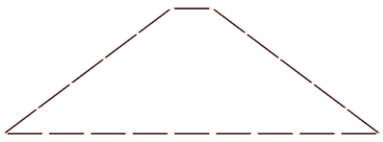
	
S = 9 čp O = 14 p	S = 10 čp O = 14 p

Zajímavou variantou je hledání rovnoramenného lichoběžníku s celočíselným obsahem, s využitím dvou pythagorejských trojúhelníků, kde každý je umístěný z jedné strany obdélníku:

- Pokud má vodorovná strana trojúhelníků délku 4 párátka (tj. x = y = 4, b = d = 5), tak jejich výška splyne s druhou odvěsnou (tj. v = 3). Složením těchto dvou trojúhelníků dostaneme trojúhelník, na jehož obrys potřebujeme 18 párátek. Nejmenší možný vodorovný rozměr obdélníku je 1 párátko (tj. c = 1). Složením trojúhelníku a obdélníku vznikne rovnoramenný lichoběžník, na jehož obrys je potřeba 18 + 2 = 20 párátek.
- Pokud má vodorovná strana trojúhelníků délku 3 párátka (tj. x = y = 3, b = d = 5), tak jejich výška splyne s druhou odvěsnou (tj. v = 4). Složením těchto dvou trojúhelníků dostaneme trojúhelník, na jehož obrys potřebujeme 16 párátek. Nejmenší možný vodorovný rozměr obdélníku je 1 párátko (tj. c = 1). Složením trojúhelníku a obdélníku vznikne rovnoramenný lichoběžník, na jehož obrys je potřeba 16 + 2 = 18 párátek.

Oba nalezené rovnoramenné lichoběžníky jsou uvedeny v Tabulce 13. Jejich obsah je součtem obsahů dvou pythagorejských trojúhelníků (12 čp) a obsahu obdélníku s vodorovným rozměrem 1 párátko a svislým rozměrem rovným výšce pythagorejských trojúhelníků (tj. 3, resp. 4 párátka).

Tab. 13: Rovnoramenné lichoběžníky s celočíselným obsahem.

	
S = 15 čp O = 20 p	S = 16 čp O = 18 p

Kdy a jak úlohu využít ve výuce

Při vhodném uchopení je možné Pehkonenovu úlohu využít na libovolném stupni vzdělávání. Na 1. stupni ZŠ například zůstaneme v kontextu jednotkové čtvercové sítě a budeme se věnovat čtvercům, obdélníkům a útvarům z nich vzniklým pomocí rohové a dvojrohové úpravy. Jako alternativní pomůcku můžeme využít i Geoboard / Geodesku.

Pokud vynecháme návaznost na obsah útvaru, můžeme se na 1. stupni ZŠ věnovat i trojúhelníkům a například hledat různé trojúhelníky, které je možné z párátek vytvořit.

Na 2. stupni ZŠ můžeme dále zařadit pythagorejský trojúhelník, rovnostranné a rovnoramenné trojúhelníky, rovnoběžníky a pravidelné mnohoúhelníky (zde je možné žákům nabídnout vhodné vzorce na výpočet obsahu vycházející z délky strany, viz např.

[1, str. 326]). Pro zdatnější řešitele jsou z druhostupňového obsahu dostupné i rovnoramenné a pravoúhlé lichoběžníky.

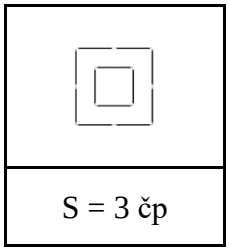
Na SŠ se můžeme navíc věnovat i obecným lichoběžníkům, případně podrobnému odvozování vzorců na výpočet obsahu pravidelných mnohoúhelníků vycházejících z délky strany.

Úlohu je možné využít jako opakovací, poskytuje souhrnný náhled na různé typy rovinných útvarů a jejich vlastnosti, vztahy mezi nimi. Případně jako motivační při vstupu do nového tématu.

Místo závěru

Tabulka 14 nabízí ještě jedno řešení, které jsme doposud neobjevili. Na první pohled možná vypadá podezřele, ale splňuje všechny požadavky Pehkonenovy úlohy, včetně pravidel P1 a P2. Na rozdíl od všech ostatních řešení ale není nalezený útvar jednoduše souvislý (má uvnitř "díru"), čímž se dostáváme k vysokoškolské matematice, topologii a já osobně se tak oklikou dostávám ke své dizertační práci, jež mj. vycházela z vlastností jednoduše souvislých množin.

Tab. 14: Řešení "s dírou".



Podobných nečekaných spojitostí může úloha skrývat víc, je jen na řešitelích, jestli si je budou chtít objevovat.

Dodatek 1

Jak jsem slíbila na workshopu, uvedu zde soupis publikací s dalšími badatelskými úlohami, na kterých jsem se v posledních letech podílela a které jsou v českém jazyce. Doporučený stupeň vzdělávání je pouze orientační, řídí se obtížností úlohy a převládajícím matematickým obsahem.

Pro všechny stupně vzdělávání:

- úlohy v druhé polovině publikace [14], obtížnost úloh je zde odlišena hvězdičkami.

Pro 1. a 2. stupeň ZŠ:

- příspěvek z konference v Litomyšli [2];
- sada na sebe navazujících příspěvků z konferencí v Srní [10, 5, 15, 13].

Pro 2. stupeň ZŠ a SŠ:

- příspěvek z konference v Srní [8].

Pro SŠ:

- sada příspěvků z časopisu MFI [3, 11];
- příspěvek z konference UPVM [6] a na něj navazující příspěvky z časopisu SBML [7, 9].

Dodatek 2

Nelze nedodat poděkování tvůrcům prostředí GeoGebra, ve kterém jsem vytvořila všech 76 ilustrací k tomuto příspěvku a ve kterém jsem si ověřovala většinu nalezených numerických výsledků. Tím se, také oklikou, dostáváme k jednomu z témat konference UPVM – můj příspěvek nepopisuje žádné využití dynamického software ve výuce, ale je sám o sobě ukázkou takového využití.

Literatura:

[1] Bartsch, H.-J.: *Matematické vzorce*. Praha, 2002.

[2] Hošpesová, A., Samková. L.: Skládání tvarů jako podnět k badatelským aktivitám v geometrii na ZŠ. *Sborník konference Jak učit matematice žáky ve věku 10-16 let,* str. 123-130, 2012.

[3] Leischner, P., Samková, L.: Od řešení Heronovy úlohy k modelům kuželoseček. *Matematika - fyzika - informatika,* **23,** 1, str. 9-14, 2014. Dostupné na http://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/106

[4] Pehkonen, E. (Ed.): *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. Helsinky, 1997.

[5] Roubíček F.: Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice II. *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*, str. 169-174, 2014.

[6] Samková, L.: Badatelsky orientované vyučování matematiky. *Sborník 5. konference Užití počítačů ve výuce matematiky,* str. 336-341, 2011. Dostupné na http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2011/sbornik/clanky/36_UPVM11_Samkova.pdf

[7] Samková, L.: Jak velká je třetina koule? *South Bohemia Mathematical Letters,* **20**, str. 25-29, 2012. Dostupné na http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/samkova1.pdf

[8] Samková, L.: Pracovní listy pro badatelsky orientované vyučování matematiky. *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2012*, str. 167-172, 2012.

[9] Samková, L.: Modelování reálných situací v matematice na SŠ - Stěhovací problém. *South Bohemia Mathematical Letters,* **21**, str. 67-75, 2013. Dostupné na http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/samkova_web.pdf

[10] Samková, L.: Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice I. *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*, str. 187-192, 2014.

[11] Samková, L.: Modelování kuželoseček v dynamickém prostředí. *Matematika - fyzika - informatika,* **24**, 4, str. 303-311, 2015. http://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/225

[12] Samková, L.: Badatelsky orientované vyučování. In V. Šimandl (Ed.), *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií* (str. 11-20). Č. Budějovice, 2015.

[13] Samková, L.: Ohlédnutí za sedmi podobami badatelsky orientovaného vyučování matematice. *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2016*, str. 113-118, 2016.

[14] Samková, L., Hošpesová, A., Roubíček, F., Tichá, M.: Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione,* **6**, 1, str. 91-122, 2015. Dostupné na http://www.scied.cz/index.php/scied/article/viewFile/154/145

[15] Tichá, M., Hošpesová, A.: Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice III. *Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014*, str. 217-223, 2014.

Libuše Samková
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta JU
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: lsamkova@pf.jcu.cz

APLIKACE PODMÍNĚNÉ PRAVDĚPODOBNOSTI V LÉKAŘSKÉ DIAGNOSTICE

Bc. Lucie Studená
Ústav matematiky a biomatematiky, PřF, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Abstrakt: Článek se věnuje aplikaci podmíněné pravděpodobnosti a Bayesova vzorce v lékařské diagnostice. Na několika příkladech je ukázáno, jak se statisticky ověřuje správnost diagnostických testů a je objasněno, jaký význam má specificita a senzitivita lékařského testu. Toto praktické využití teorie pravděpodobnosti v lékařství může být uplatněno jak ve výuce matematiky, tak ve výuce biologie.

Klíčová slova: podmíněná pravděpodobnost, Bayesův vzorec, lékařská diagnostika, diagnostický test

Application of conditional probability in medical diagnostics

Abstract: The paper deals with the application of conditional probability in medical diagnostics. The statistical verification of diagnostic tests accuracy is illustrated with a few examples and it clarifies the meaning of the sensitivity and the specificity of medical tests. This practical application of probability theory can be effectively utilized in the teaching of mathematics and of biology.

Key words: conditional probability, Bayes′ formula, medical diagnostics, diagnostic test

1 Úvod

Podmíněná pravděpodobnost a Bayesův vzorec nachází své uplatnění v populačních etiologických studiích (studiích o příčinách a původech nemocí) a v některých matematických modelech diagnostického, terapeutického či prognostického lékařského rozhodování, např. tedy v případech, kdy je potřeba statisticky vyhodnotit kvalitu lékařského diagnostického testu. Statistickým vyhodnocováním lékařských diagnostických testů se zabývá lékařská diagnostika.

Tématem tohoto článku je právě aplikace podmíněné pravděpodobnosti v lékařské diagnostice. Jedná se v podstatě o jednu z kapitol mojí diplomové práce Aplikace matematických znalostí při výuce biologie, v níž propojuji oba obory, které studuji, ve snaze demonstrovat široké uplatnění a důležitost matematického aparátu na poli biologie a lékařství.

Cílem tohoto článku je především poskytnout učitelům středních škol návod jak studentům přiblížit teorii podmíněné pravděpodobnosti a Bayesův vzorec pomocí zajímavé aplikace; dále

jak studentům ukázat důležitost teorie podmíněné pravděpodobnosti v lékařství; a v neposlední řadě také jak obohatit výuku a zaujmout studenty pomocí vysvětlení principu vyhodnocování diagnostických testů na zajímavých příkladech z běžného života.

Čtenář se dočte mnohé o diagnostických testech (jaké jsou druhy testů, kde se s nimi můžeme setkat, na jakých principech určité testy fungují apod.), o jejich ukazatelích správnosti, zejm. senzitivitě a specificitě, o principu statistického testování diagnostických testů, o vlivu prevalence na výsledek diagnostického testu aj.

Výhodou této aplikace je její využitelnost jak při výuce středoškolské matematiky, tak i při výuce středoškolské biologie. Učitelé matematiky mohou prostřednictvím aplikace studentům ukázat praktické využití poněkud neoblíbeného a často opomíjeného tématu podmíněné pravděpodobnosti. Učitelé biologie mají možnost studenty seznámit s diagnostickými testy, což jsou sice znalosti nad rámec běžné výuky, avšak mohou být pro studenty zajímavým zpestřením. Setkat se v běžném životě s různými diagnostickými testy, ať už s těmi zakoupitelnými v lékárně (těhotenský test, test na alkohol, test na jištění množství vitamínu B_{12} v těle apod.), nebo u lékaře (např. jaterní test na přítomnost fibrózy, zátěžové kardio testy apod.), totiž není nijak nevšední.

Je pouze na uvážení každého učitele, v jakém rozsahu a obtížnosti aplikaci ve svých hodinách využije a zda-li ji zařadí do běžné výuky, nebo ji představí jen vybrané skupině přírodovědně nadaných žáků, např. v rámci semináře. Učitelé se také mohou nechat inspirovat přiloženým návrhem pracovního listu se zajímavými příklady, díky kterým si studenti procvičí získané znalosti o diagnostických testech a naučí se také orientovat v jednoduchých tabulkách. K usnadnění výpočtů hodnot ze zadaných tabulek lze také využít MS Exel.

2 Podmíněná pravděpodobnost a Bayesův vzorec

Než si objasníme princip vyhodnocování kvality diagnostického testu, připomeneme si nezbytné znalosti z teorie podmíněné pravděpodobnosti.

„*Podmíněná pravděpodobnost značí, že k pravděpodobnosti nastání určitého jevu přidáme ještě nějakou podmínku.*“

Číslo $P(A)$ značí pravděpodobnost jevu A vzhledem k pevně danému souboru základních podmínek, po jejichž uskutečnění (provedení náhodného pokusu) nastane jev A s pravděpodobností $P(A)$. Pokud k těmto základním podmínkám připojíme ještě další podmínku, že např. nastal jev B ($P(B) > 0$), některé pravděpodobnosti se stanou jistými (např. jev B), některé nemožnými (např. každý jev neslučitelný s B) a ostatní jevy očekáváme se změněnými pravděpodobnostmi. Těmto pravděpodobnostem říkáme podmíněné pravděpodobnosti. [3],[4]

Definice 2.1. *([4], s. 14)[**Podmíněná pravděpodobnost.**] Podmíněnou pravděpodobnost jevu A vzhledem k jevu B označíme $P(A|B)$ a definujeme ji jako:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0, \tag{1}$$

Uveďme si následující příklad. Mějme dva různé jevy A a B, jev A značí, že je určitý pacient určen jako pozitivní a jev B značí, že pacient skutečně trpí danou nemocí. $P(A)$ je pravděpodobnost, že je pacient určen jako pozitivní, $P(B)$ je pravděpodobnost, že pacient skutečně trpí nemocí. Podmíněná pravděpodobnost, že je *pacient určen jako pozitivní za předpokladu, že je skutečně nemocný* by se spočítala jako $P(A|B)$, kde $P(B) > 0$, dle vzorce (1) a pravděpodobnost, že je *pacient určen jako pozitivní za předpokladu, že nemocný není* by se dle stejného vzorce spočítala jako $P(A|B')$, kde $P(B') > 0$ a jev B' (pacient není nemocný) je jev opačný k jevu B, a tedy platí $P(B') = 1 - P(B)$.

S podmíněnou pravděpodobností souvisí pojem nezávislost jevů, tzn. že nastání jednoho jevu nemá vliv na nastání nebo nenastání druhého jevu.

Věta 2.1. *([4], s. 15)**[Věta o násobení pravděpodobností.]** Nechť A, B jsou dva nezávislé jevy, pak pro pravděpodobnost jejich současného nastání platí*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{2}$$

Jsou-li tedy jevy A, B nezávislé, pak dosazením rovnosti (2) do vzorce pro výpočet podmíněné pravděpodobnosti (1) získáme:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Platí tedy, že podmíněná pravděpodobnost vzhledem k nezávislému jevu se rovná nepodmíněné pravděpodobnosti. [4]
Ze vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost (1) si vyjádříme $P(A \cap B)$ následujícím způsobem:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B). \tag{3}$$

Pokud budeme chtít vyjádřit pravděpodobnost jevu B za podmínky nastoupení jevu A, zaměníme ve vzorci pro podmíněnou pravděpodobnost (1) jevy A a B

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \ P(A) > 0. \tag{4}$$

Rovnost (3) dosadíme do vzorce (4)

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}, \ P(B) > 0,$$ [5]

čímž jsme získali tzv. **Bayesův vzorec** pro dvojici jevů, který udává jak podmíněná pravděpodobnost nějakého jevu souvisí s opačnou podmíněnou pravděpodobností.

Věta 2.2. *([3], s. 31)**[Bayesův vzorec.]** Mějme dva náhodné jevy A a B s pravděpodobnostmi $P(A)$ a $P(B)$, $P(B) > 0$, potom platí*

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}, \tag{5}$$

kde $P(A|B)$ je podmíněná pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B.

Věta 2.3. *([3], s. 29)**[O úplné pravděpodobnosti.]** Nechť B, C jsou dva jevy, které se navzájem vylučují, přičemž jeden z nich nutně nastává. Potom pro libovolný jev A platí $A = A \cap B \cup A \cap C$, pak pravděpodobnost $P(A)$ lze vyjádřit*

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C). \tag{6}$$

Bayesův vzorec (5) lze dále upravit dosazením vzorce (6) do jmenovatele za $P(A)$:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C)}.\text{[5]} \tag{7}$$

3 Lékařská diagnostika

3.1 Princip statistického vyhodnocování diagnostických testů

V úvodu článku jsme se dozvěděli, že podmíněná pravděpodobnost se v lékařství uplatňuje při statistickém **vyhodnocování správnosti diagnostických testů**. Diagnostický test je vlastně určitá speciální metoda pomáhající s určitou pravděpodobností zjistit, zda pacient má, resp. nemá, zjišťovanou nemoc nebo určitou látku v těle.

Test v lékařské diagnostice může představovat nejen určitou laboratorní metodu, např. histologické vyšetření, ale i např. ultrazvukové vyšetření. Mezi diagnostické testy patří také testy volně zakoupitelné v lékárně jako např. těhotenský test nebo test potravinové intolerance. Na trhu existuje takovýchto různých testů nepřeberné množství
(viz např. www.prozdravi.cz/diagnosticke-testy).

Požadavky na diagnostické testy jsou, aby byly jednoduché, snadno a rychle proveditelné, finančně příliš nenákladné a také neškodné a bezbolestné. [2]

Nyní si ukážeme, jak se provádí statistické vyhodnocování správnosti diagnostického testu a co vše je k tomu potřeba znát.

Každý diagnostický test má dva možné výsledky, jedná se vlastně o dvojici opačných a tedy i navzájem neslučitelných jevů. Nazýváme je:

- **pozitivní výsledek**, ozn. A^+,
- **negativní výsledek**, ozn. A^-,

Dále je důležitá také skutečná přítomnost nemoci, což jsou opět dva opačné navzájem neslučitelné jevy nazývané:

- **nemoc je přítomna**, ozn. H^+,
- **nemoc není přítomna**, ozn. H^-. [2]

Diagnostické schopnosti testu jsou při vyhodnocování prověřovány proti skutečnému stavu testovaných osob, kde se proti sobě srovnávají právě pozitivní (resp. negativní) výsledky testu a prokazatelně zjištěná přítomnost (resp. nepřítomnost) nemoci nebo látky. Pro takovéto vyhodnocování je zavedeno několik ukazatelů správnosti (validity) představujících číselné ohodnocení testu ve vztahu k jeho chybovosti. Představíme si čtyři nejzákladnější z nich. [2]

První dva ukazatele správnosti diagnostických testů jsou tzv. *senzitivita testu* (schopnost testu rozpoznat nemocné osoby) a *specificita testu* (schopnost testu rozpoznat osoby bez nemoci). Tyto ukazatele definujeme pomocí podmíněné pravděpodobnosti:

- **senzitivita testu** je pravděpodobnost, že test bude pozitivní, když je osoba skutečně nemocná, tj. $P(A^+|H^+)$,
- **specificita testu** je pravděpodobnost, že test bude negativní, když je osoba zdravá, tj. $P(A^-|H^-)$. [2]

S pojmy senzitivita a specificita se můžete běžně setkat v příbalovém letáku u volně zakoupitelných testů, nebo v popisu testu v internetové lékárně
Druhé dva ukazatele správnosti diagnostických testů jsou tzv. *prediktivní hodnoty*, které stejně jako předchozí ukazatele definujeme pomocí podmíněné pravděpodobnosti:

- **prediktivní hodnota pozitivního testu** je pravděpodobnost, že osoba skutečně je nemocná, když test vyjde pozitivní, tj. $P(H^+|A^+)$,
- **prediktivní hodnota negativního testu** je pravděpodobnost, že osoba skutečně není nemocná, když test vyjde negativní, tj. $P(H^-|A^-)$. [2]

Tabulka (1) objasňuje, jak lze ze zjištěných dat spočítat hodnotu zmíněných ukazatelů správnosti (jedná se vlastně o vypočítání podmíněné pravděpodobnosti na základě daných jevů – výsledků testu, a skutečné ověřené přítomnosti nemoci):

výsledek testu	**ověření přítomnosti nemoci / látky**		**celkem**
	přítomna (H^+)	***nepřítomna (H^-)***	
pozitivní (A^+)	a	b	a + b
negativní (A^-)	c	d	c + d
celkem	a + c	b + d	a + b + c + d

Tab. 1: Obecná tabulka zjištěných hodnot diagnostického testu.

Z tabulky (1) je zřejmé, že a je počet lidí s pozitivním výsledkem testu, u nichž je nemoc přítomna, b je počet lidí s pozitivním výsledkem, u nichž je nemoc nepřítomna, c je počet lidí s negativním výsledkem, u nichž je nemoc přítomna a d je počet lidí s negativním výsledkem, u nichž je nemoc nepřítomna.

Hodnoty ukazatelů v procentech se poté určují pomocí podmíněné pravděpodobnosti jako:

$$P(A^+|H^+) = \frac{a}{a+c} \cdot 100,$$
$$P(A^-|H^-) = \frac{d}{b+d} \cdot 100,$$
$$P(H^+|A^+) = \frac{a}{a+b} \cdot 100,$$
$$P(H^-|A^-) = \frac{d}{c+d} \cdot 100. \text{ [1]}$$

V následujícím jednoduchém příkladu si ukážeme určení ukazatelů správnosti diagnostických testů.

Příklad 3.1. *Vypočítejte senzitivitu, specificitu a prediktivní hodnoty hypotetického testu na zjištění rakoviny na základně hodnot uvedených v tabulce (2). Jev A^+ značí, že náhodně vybraný pacient je pozitivní na rakovinu a opačný jev A^-, že osoba je negativní na rakovinu. Jev H^+ značí, že je rakovina u pacienta skutečně přítomna a opačný jev H^-, že je rakovina nepřítomna. Určete, zda je test přesný (jako přesný test zde budeme považovat test s hodnotami vyššími než $80\ \%$).*

výsledek testu	**ověření přítomnosti rakoviny**		**celkem**
	přítomna (H^+)	***nepřítomna (H^-)***	
pozitivní (A^+)	47	4	51
negativní (A^-)	5	38	43
celkem	52	42	94

Tab. 2: Zjištěné hodnoty hypotetického testu na určení rakoviny.

Řešení:
Z tabulky (2) nejprve vypočítáme senzitivitu a specificitu testu:

$$P(A^+|H^+) = \frac{47}{52} \cdot 100 \doteq 90,4\ \%, \qquad P(A^-|H^-) = \frac{38}{42} \cdot 100 \doteq 90,5\ \%,$$

poté hodnotu pozitivního a negativního testu:

$$P(H^+|A^+) = \frac{47}{51} \cdot 100 \doteq 92,2\ \%, \qquad P(H^-|A^-) = \frac{38}{43} \cdot 100 \doteq 88,4\ \%.$$

Vidíme, že daný test je poměrně kvalitní a přesný, neboť se hodnoty ukazatelů pohybují nad $80\ \%$. Pravděpodobnost, že je pacient skutečně nemocný, když mu test vyjde pozitivní, je dokonce $92,2\ \%$.

Senzitivita a specificita jsou především populační ukazatele, protože se zjišťují na základě znalosti skutečné přítomnosti (resp. nepřítomnosti) onemocnění u určitého souboru lidí. Zajímají

zejména lékaře, kteří je pak mohou použít pro porovnání diagnostické správnosti dvou různých testů. U konkrétního pacienta, který přijde do ordinace s výsledky testu, skutečnou přítomnost (resp. nepřítomnost) nemoci lékař nezná. [2]

Pro pacienty jsou zajímavější ukazatele prediktivní hodnoty, které vycházejí z určitého výsledku jejich testu, a které v případě, že jejich vlastní test vyšel pozitivně (resp. negativně), určují s jakou pravděpodobností danou nemoc skutečně mají (resp. nemají). [2]

Stejně tak jako v jiných statistických metodách, i u těchto testů zvyšuje jejich kvalitu dostatečná velikost experimentálního vzorku (tj. velikost souboru testovaných lidí). Pokud by byl tento soubor malý, poroste pravděpodobnost, že někteří specifičtí pacienti nebudou zachyceni a odhady specificity a senzitivity budou zkreslené. [2]

Mezní hodnoty senzitivity a specificity určující, zda je daný test kvalitní, resp. kvalitnější než jiné testy, které jsou aktuálně dostupné, se určují obtížně. Závisí totiž na míře poznání dané oblasti a na dosažitelné správnosti dostupných testů. V některé oblasti mohou být hodnoty nad 60 % vítězstvím, v jiné se diagnostika blíží v obou ukazatelích hodnotě 100 %. [2]

V dalším příkladu budeme porovnávat dva těhotenské testy. Těhotenské testy fungují na principu zjištění přítomnosti hormonu gonadotropinu v moči nebo v krevním séru. Gonadotropin je produkován buňkami vyvíjející se placenty a jeho koncentrace v moči či krvi v prvních týdnech po otěhotnění výrazně stoupá téměř každým dnem.

Příklad 3.2. *Dva hypotetické těhotenské testy – Mimicheck a Pregnus – na svém obalu tvrdí, že jsou nejlepším volně dostupným těhotenským testem. Úkolem je určit, který z nich je lepší (tj. spočítat a porovnat ukazatele správnosti).*
K dispozici jsou výsledky obou těchto testů a výsledky ověření těhotenství, které byly zjišťovány na stejném souboru 200 žen (z toho 66 žen bylo lékařským vyšetřením ověřeno jako skutečně těhotných), zanesených v tabulkách (3):

výsledek testu Mimicheck	**ověření skutečného těhotenství**		**celkem**
	těhotná (H^+)	***není těhotná (H^-)***	
pozitivní (A^+)	63	4	67
negativní (A^-)	3	130	133
celkem	66	134	200

výsledek testu Pregnus	**ověření skutečného těhotenství**		**celkem**
	těhotná (H^+)	***není těhotná (H^-)***	
pozitivní (A^+)	60	2	62
negativní (A^-)	6	132	138
celkem	66	134	200

Tab. 3: Zjištěné hodnoty pro Mimicheck a Pregnus.

Řešení:
Nejdříve vyhodnotíme Mimitest:

- *senzitivita ...* $P(A^+|H^+) = \frac{63}{66} \cdot 100 \doteq 95,5\ \%$
- *specificita ...* $P(A^-|H^-) = \frac{130}{134} \cdot 100 \doteq 97\ \%$
- *prediktivní hodnota pozitivního testu ...* $P(H^+|A^+) = \frac{63}{67} \cdot 100 \doteq 94\ \%$
- *prediktivní hodnota negativního testu ...* $P(H^-|A^-) = \frac{130}{133} \cdot 100 \doteq 97,7\ \%$

Poté vyhodnotíme Pregnus:

- *senzitivita ...* $P(A^+|H^+) = \frac{60}{66} \cdot 100 \doteq 90,9\ \%$
- *specificita ...* $P(A^-|H^-) = \frac{132}{134} \cdot 100 \doteq 98,5\ \%$
- *prediktivní hodnota pozitivního testu ...* $P(H^+|A^+) = \frac{60}{62} \cdot 100 \doteq 96,8\ \%$
- *prediktivní hodnota negativního testu ...* $P(H^-|A^-) = \frac{132}{138} \cdot 100 \doteq 95,7\ \%$

Porovnáním obou testů zjišťujeme, že oba testy vykazují vysoké pravděpodobnosti a jsou tedy oba poměrně kvalitní. Mimitest má o něco vyšší senzitivitu, to znamená, že s větší pravděpodobností rozpozná skutečně těhotné ženy. Pregnus má zase o $1,5\ \%$ *specificitu, což znamená, že je o něco citlivější na vyloučení žen, které nejsou těhotné. Navíc Mimitest vykazuje větší pravděpodobnost, že je žena skutečně těhotná, když test vyjde pozitivní, což je většinou hledisko, které nejvíce zajímá právě ženy provádějící těhotenské testy.*

Poznámka: Ve skutečnosti příbalové letáky těhotenských testů uvádějí až $100\ \%$ *hodnoty senzitivity a specificity. V zadání předchozího příkladu byly hodnoty záměrně sníženy, aby bylo možné testy porovnat.*

3.2 Vliv prevalence na prediktivní hodnoty testu

Prediktivní hodnoty pozitivního a negativního testu mj. úzce souvisí s **prevalencí**[1] určité sledované nemoci (nebo obecně nějakého defektu) v dané populaci. V určitém časovém okamžiku, lze prevalenci vyjádřit jako procento pacientů se sledovanou nemocí určené ze všech osob v dané populaci. [2]

Jak moc mohou prediktivní hodnoty záviset na velikosti prevalence si ukážeme na řešeném příkladu se záměrně vybranými dvěma populacemi s extrémně rozdílnými počty nemocných jedinců.

Než se začneme zabývat příkladem, musíme si vyjádřit prediktivní hodnoty pomocí prevalence. Označme prevalenci jako $P(H^+)$, tj. pravděpodobnost, že určitá osoba je skutečně nemocná (v

[1] Prevalence je počet existujících nemocí či zdravotních problémů ve vybrané populaci k určitému datu.

daný okamžik a v dané populaci) a platí $1-P(H^+) = P(H^-)$, kde $P(H^-)$ je pravděpodobnost, že určitá osoba není nemocná. Prediktivní hodnoty si nyní vyjádříme pomocí upraveného Bayesova vzorce (7) s úplnou pravděpodobností a pomocí hodnot senzitivity a specificity :

$$P(H^+|A^+) = \frac{P(A^+|H^+)P(H^+)}{P(A^+|H^+)P(H^+) + P(A^+|H^-)P(H^-)},$$

$$P(H^-|A^-) = \frac{P(A^-|H^-)P(H^-)}{P(A^-|H^-)P(H^-) + P(A^-|H^+)P(H^+)}.$$

Příklad 3.3. *Úkolem je určit a porovnat pozitivní a negativní prediktivní hodnoty hypotetického testu na zjištění HIV pozitivity, u kterého je výrobcem garantována senzitivita* $98\ \%$ *a specificita* $99\ \%$ *pro populaci Lesotha, kde se k 1. 1. 2017 vyskytuje* $25\ \%$ *HIV pozitivních a poté pro populaci České republiky, kde se k 1. 1. 2017 vyskytuje pouze* $0,03\ \%$ *HIV pozitivních.*

Řešení:
Nejprve budeme uvažovat populaci Lesotha s relativně vysokou prevalencí HIV pozitivity:

- $P(H^+) = 0,25$*:*

$$P(H^+|A^+) = \frac{0,98 \cdot 0,25}{0,98 \cdot 0,25 + (1-0,99) \cdot (1-0,25)} \doteq 0,970$$
$$P(H^-|A^-) = \frac{0,99 \cdot (1-0,25)}{0,99 \cdot (1-0,25) + (1-0,98) \cdot 0,25} \doteq 0,993$$

A poté populaci České republiky s relativně nízkou prevalencí HIV pozitivity:

- $P(H^+) = 0,0003$*:*

$$P(H^+|A^+) = \frac{0,98 \cdot 0,0003}{0,98 \cdot 0,0003 + (1-0,99) \cdot (1-0,0003)} \doteq 0,029$$
$$P(H^-|A^-) = \frac{0,99 \cdot (1-0,0003)}{0,99 \cdot (1-0,0003) + (1-0,98) \cdot 0,0003} \doteq 0,999.$$

Je patrné, že v populaci s relativně vysokou prevalencí HIV pozitivity má kvalitní test vysokou pozitivní i negativní prediktivní hodnotu, tj. osoby s pozitivním (resp. negativním) testem mají vysokou pravděpodobnost, že jsou skutečně HIV pozitivní (resp. negativní).

Ovšem v populaci s nízkou prevalencí HIV pozitivity, má kvalitní test sice vysokou negativní prediktivní hodnotu – na $99,9\ \%$ *jsou osoby s negativním výsledkem testu opravdu HIV negativní, ale relativně nízkou pozitivní prediktivní hodnotu – pouze na* $2,9\ \%$ *jsou osoby s pozitivním testem skutečně HIV pozitivní.*

Kvalita testu daná vysokou senzitivitou a specificitou je tedy velice relativní a hodně záleží na velikosti prevalence uvažované nemoci v této populaci.

4 Návrh pracovního listu

Téma: Podmíněná pravděpodobnost v lékařské diagnostice
Jméno a třída: Datum:

Příklad č. 1 Hypotetický drogový test D7 slouží pro kvalitativní stanovení drogových metabolitů v lidské moči. Jedna z testem detekovaných látek je THC (Tetrahydrocannabinol, což je hlavní psychoaktivní látka nacházející se v konopí, mj. pochází z drog marihuana a hašiš). Detekční mez uvedená výrobcem je pro THC-kannabinol, 11-nor-8-THC-9-COOH a 11-nor-9-THC-COOH je 50 ng/ml. Výrobce udává $92,8\ \%$ specificitu a $95\ \%$ senzitivitu.

Vysvětli pomocí pravděpodobnosti, co znamená specificita a senzitivita na tomto konkrétním diagnostickém testu: .....
.....
.....
.....
.....

Na základě udaných hodnot senzitivity a specificity rozhodni, zda je možné test pokládat za kvalitní a přesný: .....
.....
.....
.....

Příklad č. 2 Hypotetický samodiagnostický test potravinové intolerance AlergSeeker je velmi jednoduchý a rychlý. Testovací položka s nanesenými potravinovými extrakty během 40 minut ukáže, na kterou z potravin má člověk vytvořené protilátky (tj. je alergický). Stačí k tomu pouze malá kapička krve ze špičky prstu, která se rozpustí v roztoku. Tak lze identifikovat přítomnost protilátek na jednu či více potravin v závislosti na výskytu modře zbarvených bodů na reakční podložce. Mezi testované potraviny patří obiloviny, luštěniny, ořechy, maso a ryby, zelenina a ovoce, vejce, kravské mléko aj. V následující tabulce jsou uvedeny zjištěné hodnoty pro testování přítomnosti protilátek na laktózu v kravském mléce a na gluten (lepek) v obilovinách. Obě testování byla provedena na souboru 300 lidí.

výsledek testu (laktóza)	**ověření skutečné intolerance**		**celkem**
	přít. protilátek (H^+)	***nepř. protilátek (H^-)***	
pozitivní (A^+)	44	1	45
negativní (A^-)	1	254	255
celkem	45	255	300

výsledek testu (lepek)	**ověření skutečné intolerance**		**celkem**
	přít. protilátek (H^+)	***nepř. protilátek (H^-)***	
pozitivní (A^+)	19	0	19
negativní (A^-)	2	279	281
celkem	21	279	300

Vypočítej všechny ukazatele správnosti u obou testování a porovnej prediktivní hodnotu pozitivního testu (pravděpodobnost, že osoba je skutečně alergická, když test vyjde pozitivní) při zjišťování přítomnosti protilátek na kravské mléko a na lepek.

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Příklad č. 3 V následující tabulce jsou uvedeny čtyři neinvazivní zátěžové kardiotesty, což jsou testy činnosti srdce. Neinvazivní znamená, že se při jejich provádění nezasahuje dovnitř organismu. **Doplň chybějící data v tabulce a na základě senzitivity a specificity porovnej kvalitu těchto testů.**

druh testu		počet pacientů	zjištěné hodnoty			senzitivita (%)	specificita (%)
1.	zátěžová EKG	11671	výsledek testu	ověření přítomnosti nemoci			71,2
				přítomna (H^+)	*nepřítomna* (H^-)		
			pozitivní (A^+)		2345		
			negativní (A^-)	1047	5790		
2.	zátěžový SPECT	3343	výsledek testu	ověření přítomnosti nemoci			
				přítomna (H^+)	*nepřítomna* (H^-)		
			pozitivní (A^+)	1024	641		
			negativní (A^-)	433	1245		
3.	zátěžová echokardiografie		výsledek testu	ověření přítomnosti nemoci			74,2
				přítomna (H^+)	*nepřítomna* (H^-)		
			pozitivní (A^+)	360			
			negativní (A^-)	59	224		
4.	zátěžová magnetická rezonance		výsledek testu	ověření přítomnosti nemoci		90,2	85,2
				přítomna (H^+)	*nepřítomna* (H^-)		
			pozitivní (A^+)	294			
			negativní (A^-)		271		

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

5 Autorské řešení pracovního listu

Příklad č. 1 Senzitivita drogového testu $92,8\ \%$ znamená pravděpodobnost $0,928$, že tento test bude pozitivní, když má osoba provádějící test skutečně v těle takové množství THC, které je test schopný detekovat. Specificita drogového testu $95\ \%$ znamená pravděpodobnost $0,95$, že tento test bude negativní, když nemá osoba provádějící test v těle žádné množství THC nebo když má v těle nižší množství THC, než je test schopný detekovat.

Na základě hodnot senzitivity a specificity, které jsou vyšší než $90\ \%$, lze usoudit, že je test relativně kvalitní a přesný.

Příklad č. 2 Intolerance laktózy: $P(A^+|H^+) \doteq 97,8\ \%$, $P(A^-|H^-) \doteq 99,6\ \%$, $P(H^+|A^+) \doteq 97,8\ \%$, $P(H^-|A^-) \doteq 99,6\ \%$.
Intolerance lepku: $P(A^+|H^+) \doteq 90,5\,\%$, $P(A^-|H^-) = 100\,\%$, $P(H^+|A^+) = 100\,\%$, $P(H^-|A^-) \doteq 99,3\ \%$.

Test vykazuje u zjišťování intolerance laktózy i lepku vysoké hodnoty. Prediktivní hodnota pozitivního testu je vyšší u zjišťování alergie na lepek (100 %).

Příklad č. 3 Hodnoty lze snadno dopočítat z definic senzitivity a specificity.

	druh testu	počet pacientů	zjištěné hodnoty			senzitivita (%)	specificita (%)
1.	zátěžová EKG	11671	výsledek testu	ověření přítomnosti nemoci		70,4	71,2
				přítomna (H^+)	*nepřítomna* (H^-)		
			pozitivní (A^+)	2489	2345		
			negativní (A^-)	1047	5790		
2.	zátěžový SPECT	3343	výsledek testu	ověření přítomnosti nemoci		70,3	66
				přítomna (H^+)	*nepřítomna* (H^-)		
			pozitivní (A^+)	1024	641		
			negativní (A^-)	433	1245		
3.	zátěžová echokardiografie	721	výsledek testu	ověření přítomnosti nemoci		86	74,2
				přítomna (H^+)	*nepřítomna* (H^-)		
			pozitivní (A^+)	360	78		
			negativní (A^-)	59	224		
4.	zátěžová magnetická rezonance	644	výsledek testu	ověření přítomnosti nemoci		90,2	85,2
				přítomna (H^+)	*nepřítomna* (H^-)		
			pozitivní (A^+)	294	47		
			negativní (A^-)	32	271		

Jako nejméně kvalitní zátěžový kardiotest se jeví SPECT, naopak jako nejvíce kvalitní se jeví magnetická rezonance.

6 Závěr

V úvodu čtenář zjistil především to, že podmíněná pravděpodobnost má široké uplatnění v lékařské diagnostice a že aplikace podmíněné pravděpodobnosti při ověřování diagnostických testů lze vhodně použít jak v hodinách středoškolské matematiky, tak i biologie.
V druhé části článku se čtenář stručně seznámil s teorií podmíněné pravděpodobnosti a s Bayesovým vzorcem.
V třetí části bylo čtenáři nejprve vysvětleno, co je to diagnostický test, jaké jsou jeho ukazatele správnosti a na řešených příkladech mu byl představen princip vyhodnocování těchto testů. Poté se dozvěděl, že senzitivita a specificita jsou charakteristiky samotného diagnostického testu, ale prediktivní hodnoty jsou velmi ovlivněny prevalencí – tj. tím, jak často se nemoc vyskytuje v populaci v určitém okamžiku, což bylo demonstrováno na posledním příkladu této části.
Poslední část s návrhem pracovního listu a jeho řešením nám nabídla čtenáři další úlohy pro procvičení dané problematiky.

K napsání článku byl použit sázecí systém LaTeX.

Literatura

[1] ZVÁROVÁ J. *Základy statistiky pro biomedicínské obory.* Nakladatelství Karolinum, Praha, 2004.

[2] Senzitivita, specificita a prediktivní hodnoty. *Matematická biologie: E-learningová učebnice* [online]. [cit. 2017-03-15].

Dostupné z: http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickych-a-biologickych-dat–biostatistika-pro-matematickou-biologii–vztah-pravdepodobnosti-statistiky-a-biostatistiky–senzitivita-specificita-a-prediktivni-hodnoty

[3] Hátle, J., Kahounová, J.: *Úvod do teorie pravděpodobnosti*. SNTL/ALFA, Praha, 1987.

[4] Dupač V., Hájek J. *Pravděpodobnost ve vědě a technice*. 1. vydání, Academia, 1962

[5] Podmíněná pravděpodobnost a Bayesův vzorec. *Matematická biologie: E-learningová učebnice* [online]. [cit. 2017-03-15].

Dostupné z: http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickych-a-biologickych-dat–biostatistika-pro-matematickou-biologii–vztah-pravdepodobnosti-statistiky-a-biostatistiky–podminena-pravdepodobnost-a-bayesuv-vzorec

[6] Kapitola 3 Diagnostika. *Medicína založená na důkazu* [online]. [cit. 2017-03-26].

Dostupné z: http://www.khshk.cz/e-learning/kurs1b/kapitola_3__diagnostika. html

Bc. Lucie Studená
UMB, PřF JU v Českých Budějovicích
Branišovská 1760, 370 05 České Budějovice
e-mail: lucine.studena@seznam.cz

MOTIVACE A GEOMETRICKÝ SOFTWARE

Světlana Tomiczková

Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni

Abstrakt: Jaký je vztah studentů a učitelů ke geometrii? Jakým způsobem zaujmout studenty, aby pro ně nebyla geometrie jen nutným zlem? V příspěvku se zaměříme na geometrii kolem nás a ukážeme několik příkladů, které mohou zaujmout jak učitele, tak žáky.

Klíčová slova: Geometrický software, motivace.

Motivation and geometric software

Abstract: What is the relationship of students and teachers to geometry? How do students take the geometry to be just a necessary evil? In the paper we will focus on the geometry around us and we will show some examples that can attract both teachers and students.

Key words: Geometric software, motivation.

Úvod

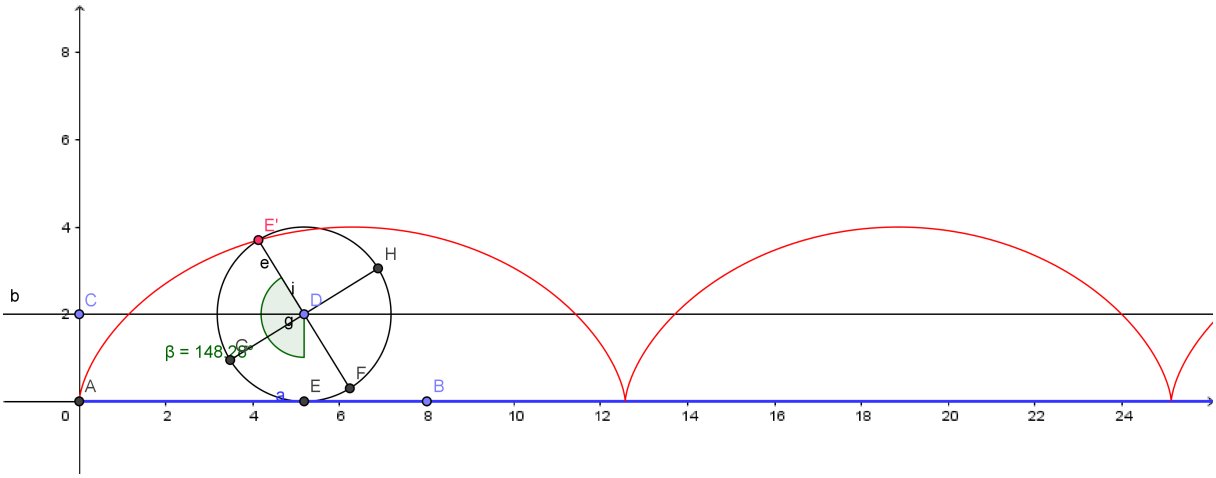
Při výuce geometrie se často setkáváme s tím, že žáci netuší, proč se geometrii učí a kde v reálném životě najdou její aplikace. Mnohdy to netuší ani sami učitelé. Ti se při výuce geometrie v rámci matematiky často omezí na školní úlohy, ale bojí se nebo nemají čas experimentovat s geometrií, která je nad rámec předepsaného učiva.

V tomto příspěvu je uvedeno několik námětů na rozšíření standardního učiva. Většina z nich byla prezentována buď na semináři pro učitele matematiky Brána matematikou otevřená nebo na přednáškách pro žáky středních škol v rámci exkurzí na Fakultu aplikovaných věd nebo na popularizačních přednáškách, které v rámci svých akcí pořádaly střední školy.

Další zajímavé náměty lze nalézt například v publikaci Geometry and its Applications [1] nebo je možné využít zajímavých ukázek z prostředí internetu.

1 Křivky

O kterých křivkách se studenti dozví v rámci standardního učiva matematiky na středních školách? Kromě přímky a kružnice jsou to zejména kuželosečky, kde žáci pracují s jejich rovnicemi, počítají průsečíky a tečny. Otázkou je, zda by uměli vyjmenovat alespoň některé případy užití kuželoseček. Že je elipsa spojena s Keplerovými zákony, prozradí žákům učitelé fyziky, ale zmíní se o tom také učitelé matematiky při výkladu o kuželosečkách? Stejně tak bychom měli hovořit o významu paraboly (např. parabolická anténa nebo šikmý vrh). V tomto okamžiku je ale možné zmínit se o křivce, která svým tvarem může parabolu připomínat, ale její rovnice souvisí hyperbolickým cosinem (popř. exponencielou). Touto křivkou je řetězovka a vyjadřuje průhyb lana zavěšeného na svých koncích (lépe řečeno, kterou vytvoří homogenní dokonale pevné a ohebné vlákno, které je na svých koncích zavěšeno, ne nutně ve stejné výšce, v homogenním gravitačním poli). Tedy např. popisuje průhyb drátů vysokého napětí. Poslední z regulárních kuželoseček hyperbolu je možné vidět na některých slunečních hodinách a pokud se podíváme i na plochy vzniklé rotací hyperboly, tak stojí za zmínku např. hyperbolické převody. Další křivkou, která by neměla uniknout pozornosti učitelů a jejich žáků, je cykloida (viz 1). Tato křivka vzniká valením kružnice po přímce, ale je to také křivka spojující dva body, po které se hmotný bod dostane z počátečního klidu v jednom bodě do druhého působením homogenního gravitačního pole za nejkratší dobu. Je známá pod názvem brachistochrona a ve skutečnosti je částí prosté cykloidy. Na YouTube lze nalézt mnoho reálných ukázek, jak se bod (kulička, autíčko apod.) dostává po různých křivkách z jednoho bodu do druhého.

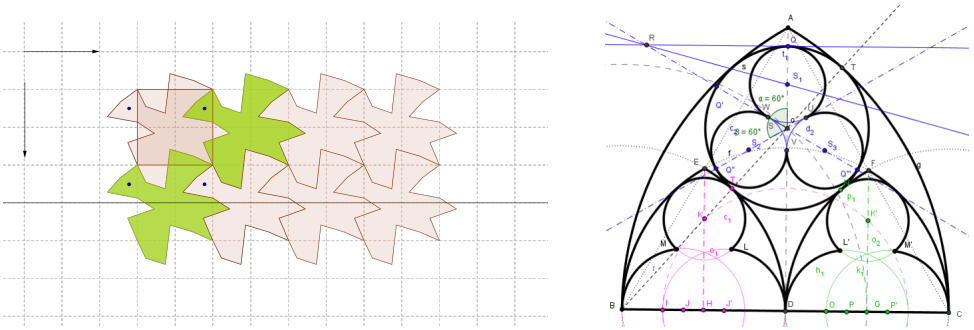


Obrázek 1: Cykloida

2 Geometrická zobrazení

Pokud se zamyslíme nad výukou geometrických zobrazení, musíme si položit několik otázek. Je pro učitele a žáky zajímavá část geometrie zabývající se geometrickými zobrazeními? Baví je to? Použijí tyto úlohy ještě někde jinde než v hodinách matematiky? Umí (žáci, učitelé) najít nějaké využití geometrických zobrazení ve světě okolo nás? Myslím, že odpověď na většinu z těchto otázek bude ne.

Geometrická zobrazení jsou ale všude kolem nás, ať už se podíváme na historické nebo moderní budovy, jejich rozmístění oken, dveří či ozdobných prvků nebo kružby u sakrálních staveb či mozaiky v dláždění a výzdobě. Cenným zdrojem inspirace je v tomto případě práce M. C. Eschera. Vhodná publikace, kde je možné najít zajímavé náměty je např. [2]. Vytváření šablon jednotlivých dlaždic s použitím posunutí rotací nebo souměrnosti může být zajímavým obohacením výuky nebo námět na samostatnou práci. Ukázky z prací na náměty mozaiek a kružeb vytvořených v GeoGebře jsou na obrázku 2.

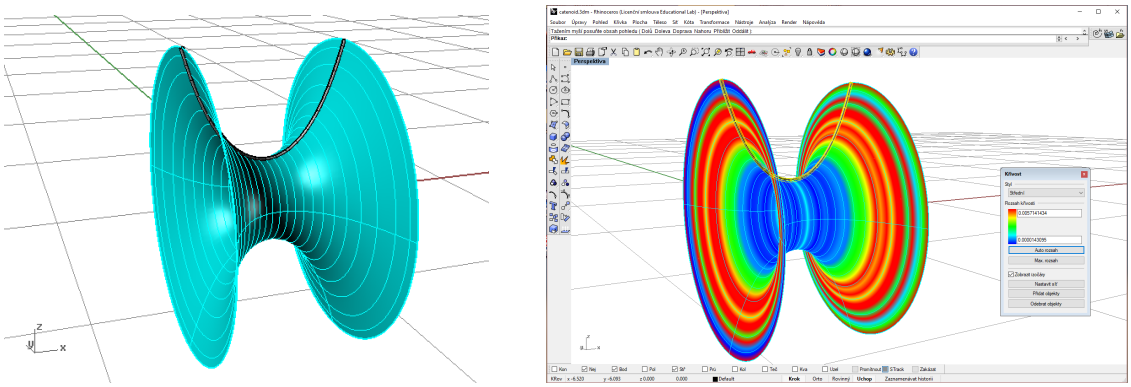


Obrázek 2: Mozaika a kružba vytvořená v softwaru GeoGebra, mozaika je z přednášky o M. C. Escherovi a kružba je ze semestrální práce studentky oboru učitelství Benešové

3 Plochy

Velice opomíjenou částí ve výuce matematiky jsou plochy. Je zřejmé, že když pomineme nedostatek času, tak bude problematické uchopit tento typ matematických objektů, aniž bychom zavedli funkce dvou proměnných, derivaci a další složitější pasáže z vyšší matematiky. Jednodušší typy ploch jako jsou rotační nebo šroubové lze zavést pomocí výtvarného zákona, kterým vznikají.

Na již zmiňovaných přednáškách pro žáky středních škol ale hovoříme např. i o minimálních plochách, což je geometrický popis ploch vzniklých jako mýdlový film s danou hranicí. Jsme schopni přiblížit žákům pojmy jako je křivost křivky, normálová křivost, Gaussova a střední křivost a také diskutovat o tom, proč geometrický software nezobrazí tyto plochy nebo jejich vlastnosti správně (viz 3). Není vše vysvětleno matematicky korektně, ale žáci pochopí princip, a pak již mohou v tomto kontextu lépe sledovat geometrický svět kolem nás. Příspěvek o mýdlových bublinách a minimálních plochách zazněl také na konferenci GCG 2014 [3].



Obrázek 3: Catenoid a vizualizace jeho křivosti v softwaru RhinoCeros

Závěr

Ve svém příspěvku jsem chtěla ukázat několik možností rozšíření geometrických pasáží matematiky o zajímavosti z reálného světa a uvést příklady, kde byly tyto náměty realizovány.

Literatura:

[1] Glaeser, G. *Geometry and its Applications in Arts, Nature and Technology*, Birkhauser, 2013.

[2] Schattschneider D., Emmer M. *M.C. Escher's Legacy: A Centennial Celebration*, Springer, 2003

[3] Tomiczková, S. *Mýdlové bubliny a minimální plochy*, Vlachovice 2014.

Světlana Tomiczková
KMA FAV ZČU v Plzni
Univerzitní 8, Plzeň
e-mail: svetlana@kma.zcu.cz

KHAN ACADEMY NA STŘEDNÍ ŠKOLE

Jiří Vančura

Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova

Abstrakt: Khan Academy je americká, nezisková organizace, vytvářející stejnojmenný webový nástroj. Známá je díky výukovým videím, která jsou velmi populární, ale podle našeho názoru nepříliš kvalitní. Naopak za kvalitní považujeme interaktivní sbírku úloh, kterou Khan Academy zdarma nabízí a kterou hojně využíváme k podpoře výuky matematiky na střední škole. V příspěvku mimo jiné popíšeme způsob, jakým Khan Academy využíváme, výsledky výzkumů a naše dosavadní zkušenosti s tímto nástrojem.

Klíčová slova: domácí úkol, interaktivní procvičování, drill

Khan Academy at High School

Abstract: Khan Academy is a U.S. based nonprofit organisation that creates a web-based tool of the same name. It is well-known for educational videos that are very popular but not very beneficial, in our opinion. On the other hand, we highly appreciate the interactive collection of mathematical tasks that Khan Academy offers free of charge and which we use to support teaching of mathematics at our high school. In this paper, we will describe the way we use Khan Academy, the results of our research and our experience with this tool.

Key words: homework, interactive exercise, drill

Výsledky výzkumů v oblasti domácích úkolů a procvičování

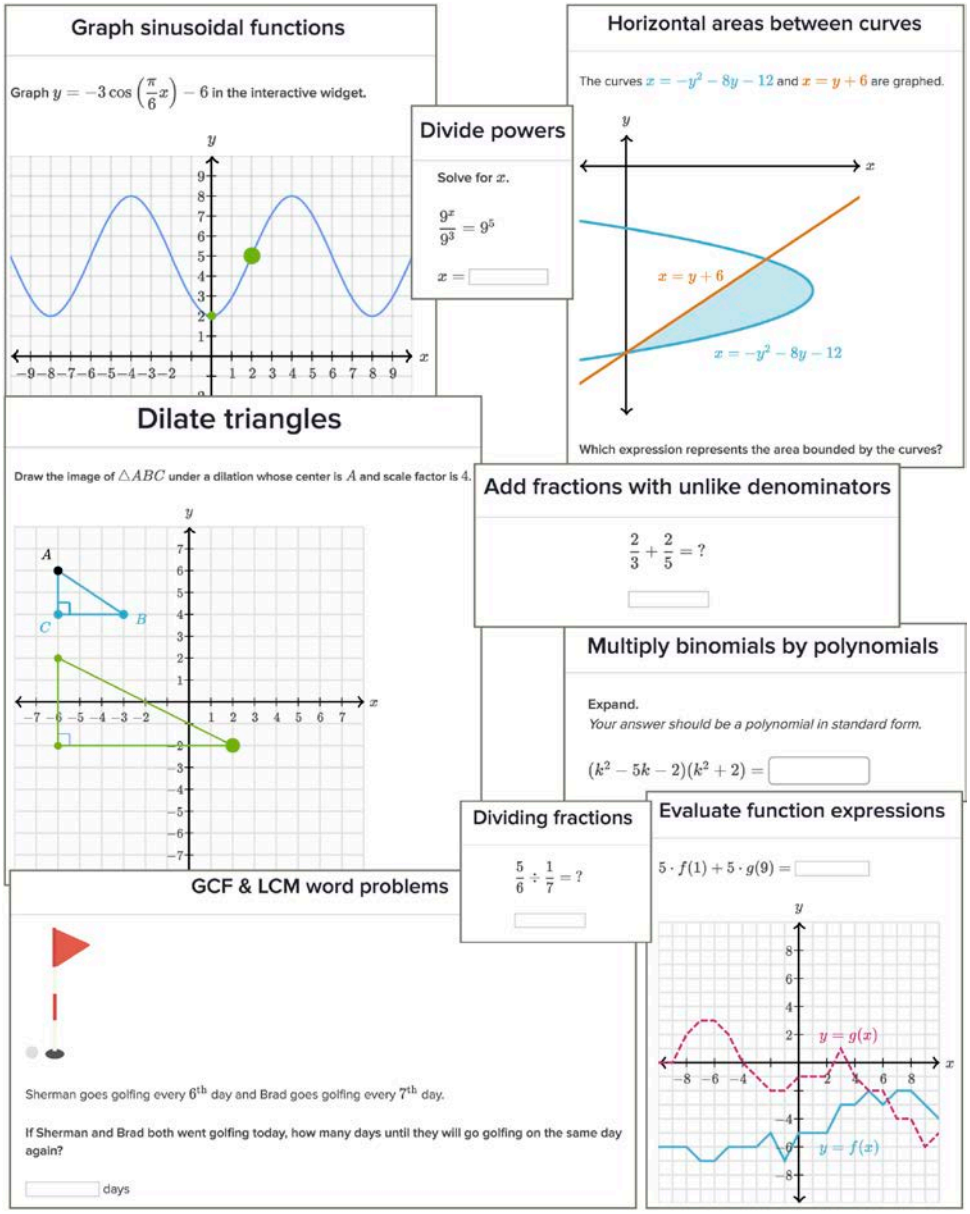
Domácí úkoly jsou běžnou složkou výuky matematiky na střední škole, bohužel učitel často nemá čas věnovat domácím úkolům všech žáků dostatek pozornosti. Z řady studií vyplývá, že žáci úkolům věnují více úsilí, pokud je jejich práce podrobně kontrolována [3]. Pokud naopak učitel domácí úkoly nehodnotí a bez větší pozornosti je přechází, mají žáci pocit, že při plnění úkolu mrhali svým časem [3, 6]. Je přínosné, pokud jsou žáci přesvědčeni, že úkoly jsou smysluplné a že je jejich úsilí oceňováno [7]. Studenti, kteří navštěvují školy s větším množstvím domácích úkolů, dosahují lepších výsledků. Tento vztah však neplatí univerzálně napříč předměty a ročníky. Nejsilnější je korelace právě u matematiky [2, 5]. Co se týče ročníku, nejsilnější korelace vychází v případě studentů středních škol, naopak u žáků prvního stupně je tato korelace téměř nulová [2]. Je důležité upozornit, že v rámci třídy je závislost obvykle opačná, tedy žáci, kteří dosahují lepších výsledků, tráví plněním domácích úkolů méně času, v rámci třídy [4]. To je logické v případě, že všichni studenti dostávají stejný domácí úkol, neboť schopnější studenti jej dokáží splnit rychleji. S touto problematikou také souvisí celkové hodnocení žáků v matematice. Poměrně známá studie [9] ukázala, že pokud oceňujeme inteligenci žáků, můžeme tím snížit jejich motivaci, výkon i sebevědomí. Naopak, oceňujeme-li úsilí žáků, můžeme jejich motivaci i výkon zvýšit. Pokud dokážeme objektivně měřit úsilí, které žáci vynaložili při plnění domácích úkolů, dává nám to jako učiteli velmi účinný a nástroj pro motivaci a hodnocení žáků.

Pár studií naznačuje, že prostředí, které žákům umožňuje cvičení opakovat, poskytuje okamžitou zpětnou vazbu a nápovědy, může vést k lepším výsledkům než prostředí, které žákům odhalí správnou odpověď bez možnosti opravy [1, 8]. Interaktivní cvičení z matematiky, které Khan Academy zdarma nabízí, jsou v souladu s výše uvedenými poznatky.

Interaktivní sbírka úloh z matematiky na Khan Academy

Khan Academy (dále jen KA) je nezisková organizace provozující stejnojmenný webový nástroj. Díky štědrým dárcům poskytuje KA veškerý obsah bezplatně. Od svého vzniku v roce 2008 prošla KA rapidním vývojem. Co začalo jako sada výukových videí diskutabilní kvality je dnes rozsáhlým vzdělávacím webem, který pokrývá většinu učiva matematiky od základní školy po první ročník vysoké školy. Dále na KA najdeme materiály z přírodních i humanitních věd, vzdělávací materiály zde prezentují NASA, Pixar a mnohé další instituce. Velmi dobře je zpracována například výuka programovaní v JavaScriptu (dostupné na khanacademy.org/computing/computer-programming).

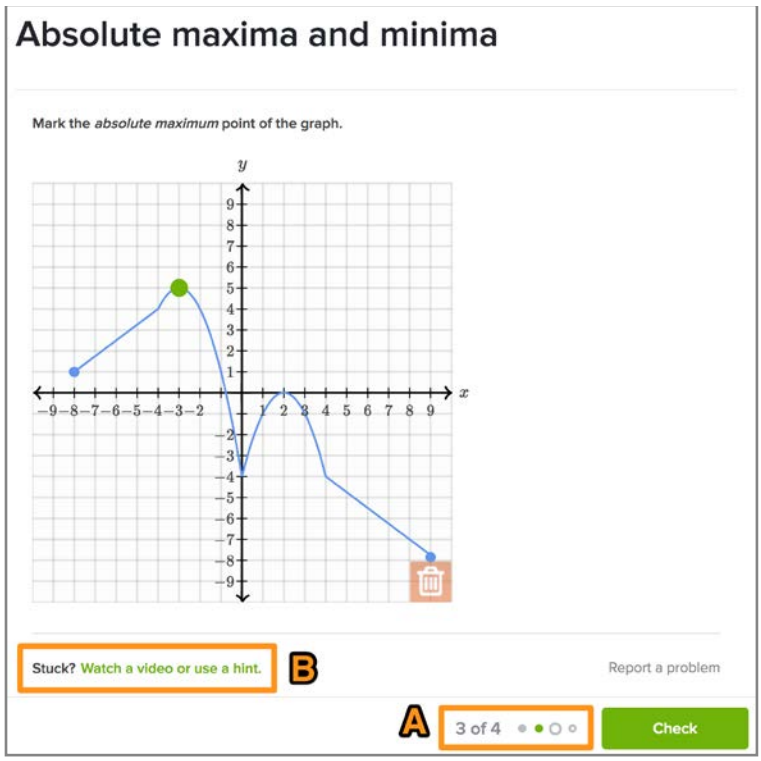
V tomto příspěvku se zaměříme na interaktivní sbírku úloh z matematiky. Tato sbírka pokrývá většinu látky základní a střední školy (viz obr. 1). Mezery najdeme především v konstrukční geometrii a kombinatorice, které není v USA věnována taková pozornost, jako u nás. Naopak velmi podrobně a pokročile je zde zpracována statistika, kde najdeme i testování hypotéz a základy regrese. Z vysokoškolské látky zde najdeme přes 200 spíše základních cvičení z analýzy od limit posloupností přes derivace, integrály a řady až po diferenciální rovnice.



Obr. 1: Úlohy z interaktivní sbírky úloh na Khan Academy

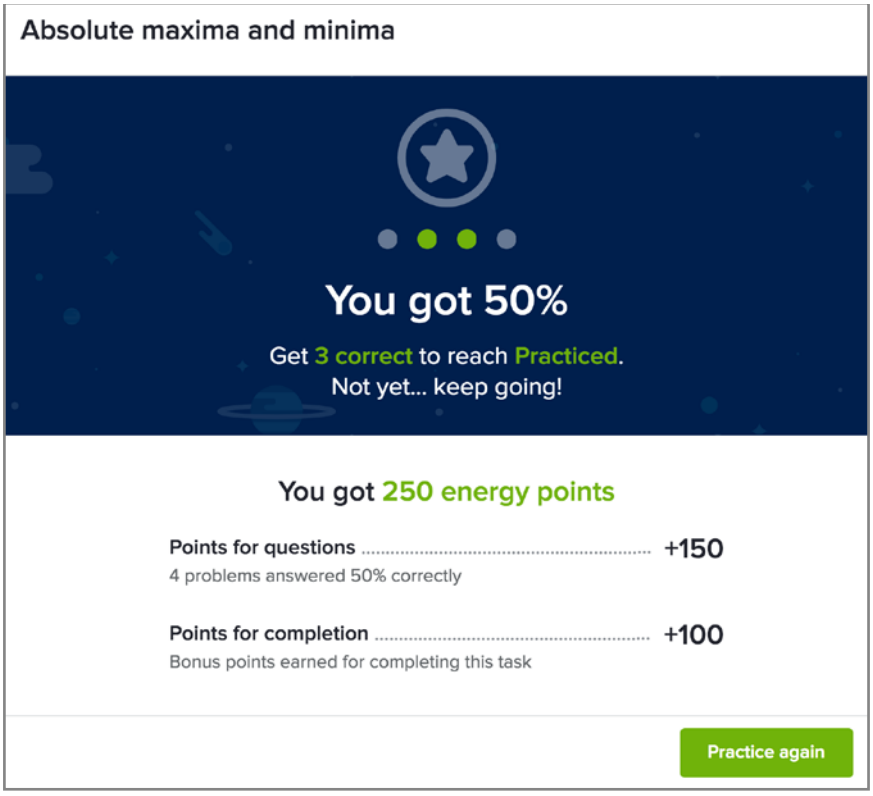
Všechna cvičení mají podobný formát a stejná pravidla. Ve všech cvičeních žák musí řešit úlohy zaměřené na jednu úzkou oblast, například vyznačování globálních extrémů v grafech. V některých cvičeních žák vybírá správnou odpověď z nabízených možností, v některých cvičeních je odpověď číselná nebo v podobě výrazu, který žák zapisuje do připravených polí, jindy musí žák manipulovat s interaktivním grafem nebo v něm vyznačovat požadované body (viz obr. 2). Jedno cvičení obsahuje zpravidla 4-7 úloh. Pokud žák úlohu vyřeší napoprvé a bez nápovědy, je odměněn fanfárou a úloha je uznána jako splněná. Úspěšnost v jednotlivých úlohách je vyznačena v pravém spodním rohu obrazovky (obr. 2A), splněné úlohy označují zelené tečky, ostatní úlohy jsou značeny šedou tečkou. Pokud žák odpoví napoprvé špatně, musí svou chybu opravit, aby mohl pokračovat dále, ale úloha už není uznána jako splněná. Pokud si žák s úlohou neví rady, může využít dvou podpůrných nástrojů

(obr. 2B). Žák se může podívat na výukové video, kde je podrobně řešen a komentován jiný vzorový příklad z dané oblasti, nebo se může podívat na krokované, komentované řešení této úlohy, v tom případě již ale úloha nebude uznána jako splněná.



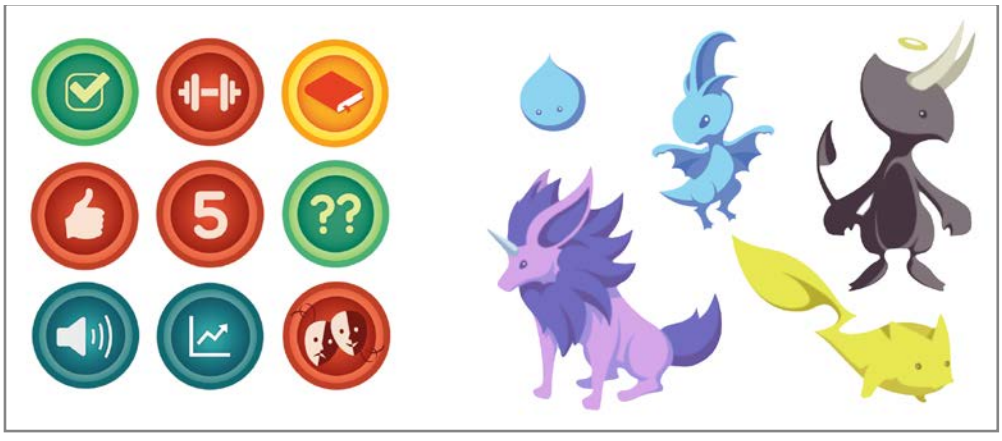
Obr. 2: Úloha na vyznačování globálních extrémů v grafu.
Dostupné na khanacademy.org/math/algebra/algebra-functions/maximum-and-minimum-points/e/recognize-absolute-maxima-and-minima

Po dokončení cvičení se žákovi zobrazí souhrn (viz Obr. 3). Aby bylo celé cvičení uznáno za splněné, musí žák vyřešit správně a napoprvé alespoň 70 % úloh, v opačném případě musí cvičení opakovat, samozřejmě s jinými úlohami.



Obr. 3: Shrnutí cvičení.

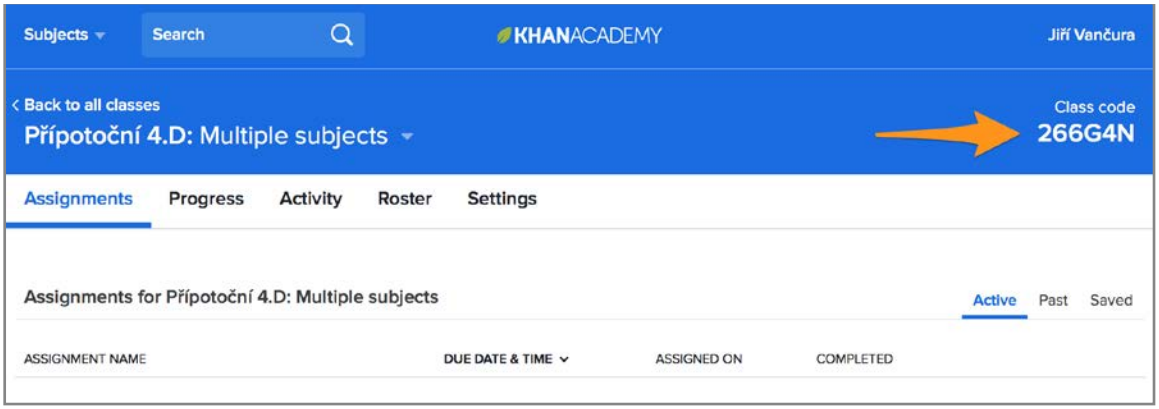
KA také obsahuje několik gamifikačních prvků. Za procvičování, sledování videí a další aktivity získává žák odznaky a body, díky kterým si pak může volit lepší avatary a více vzhledů svého profilu (viz Obr. 4).



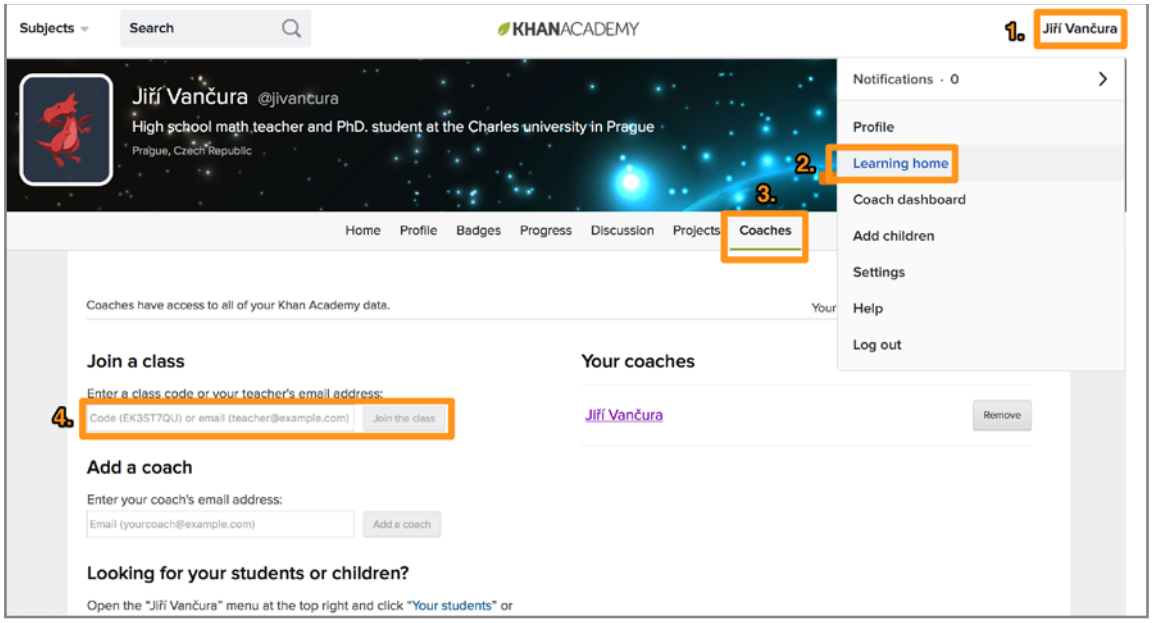
Obr. 4: Odznaky (vlevo) a avataři (vravo).

KA nezapomíná ani na učitele, kterým nabízí řadu nástrojů k monitorování činnosti jejich žáků. Učitel si nejprve musí založit virtuální třídu, do které může zapsat žáky pomocí jejich emailů, platformy Google Classroom, anebo může žákům dát unikátní kód třídy (viz obr. 5), pomocí nějž se žáci zapíšou sami. Žáci se do třídy mohou zapsat v záložce Coaches v sekci

Join a class (viz obr. 6). Doporučujeme, aby se i učitelé zapsali do své třídy, uvidí tak způsob, jakým KA se žáky komunikuje a jak funguje zadávání a monitorování cvičení z obou stran.

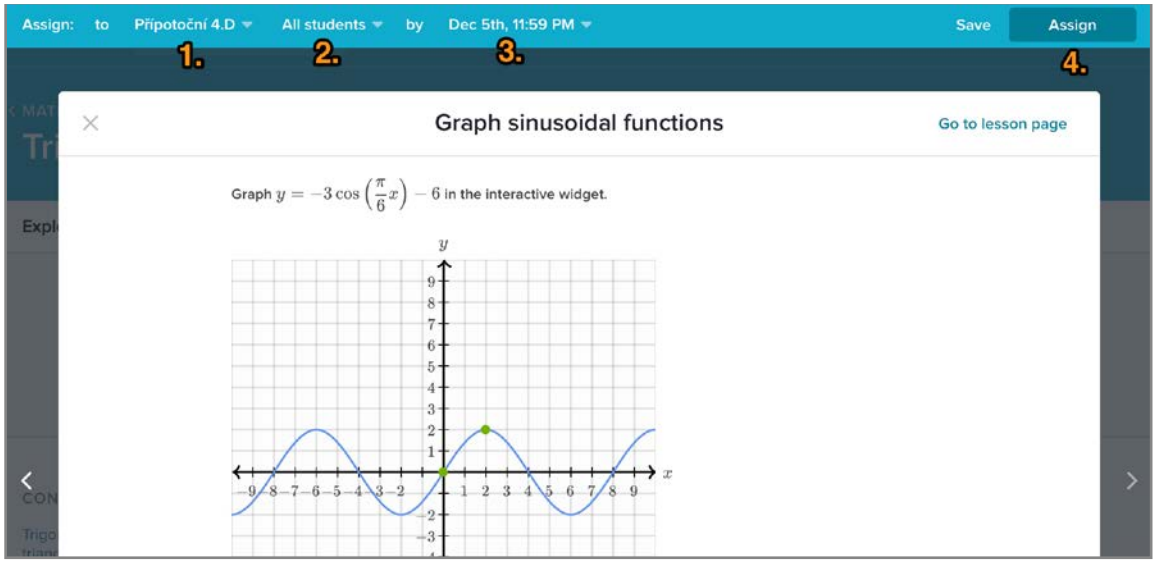


Obr. 5: Kód pro zápis do třídy



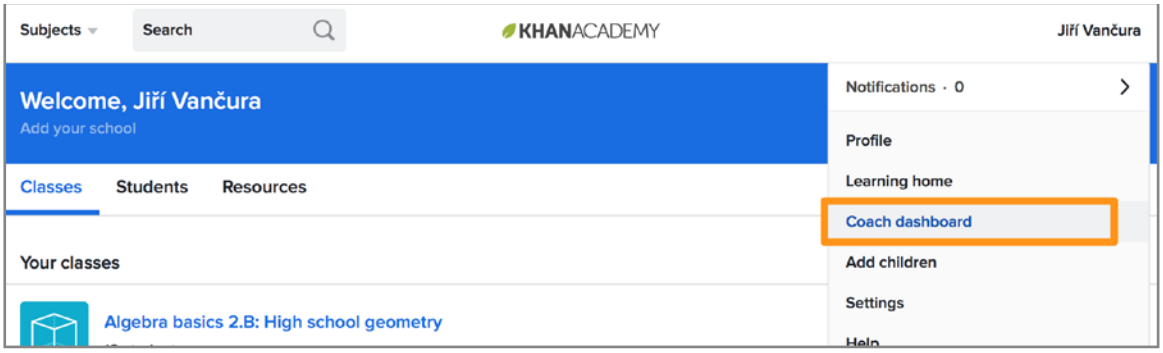
Obr. 6: Pole pro zápis do třídy

Jakmile máme vytvořenou třídu, můžeme jí zadávat úkoly. Cvičení můžeme vybírat buď přímo procházením jednotlivých tematických okruhů přes tlačítko Subjects v levém horním rohu obrazovky, nebo je můžeme vyhledávat pomocí pole Search také na horní liště vlevo. Pokud si cvičení otevřeme v učitelském profilu, zobrazí se nám v horní části obrazovky lišta pro zadání cvičení žákům (viz obr. 7). Nejprve vybereme třídy, kterým chceme cvičení zadat. Pokud vybereme jen jednu třídu, můžeme ve 2. kroku vybírat jednotlivé žáky ve třídě, nebo nechat označené všechny. Dále vybereme termín vypracování, a nakonec stiskneme tlačítko Assign, čímž zadání odešleme vybraným žákům, těm pak přijde informativní email a na profilu se jim zadání zobrazí ihned po přihlášení.



Obr. 7: Zadávání cvičení žákům

Ve svém učitelském přehledu (Coach dashboard) pak můžeme sledovat aktivitu našich žáků (viz obr. 8). Kliknutím na třídu se nám zobrazí seznam zadaných cvičení, které lze dále podrobněji zkoumat. U jednotlivých cvičení můžeme vidět seznam žáků, jejich aktivitu i úspěšnost. Můžeme také vidět soubor všech úloh, které žáci řešili včetně jejich procentuální úspěšnosti. Snadno tak můžeme zjistit, které úlohy žákům jdou dobře a které jim naopak činí největší potíže. Můžeme také sledovat, kdy naši žáci úkoly řešili, celkovou aktivitu třídy a mnohé další parametry.

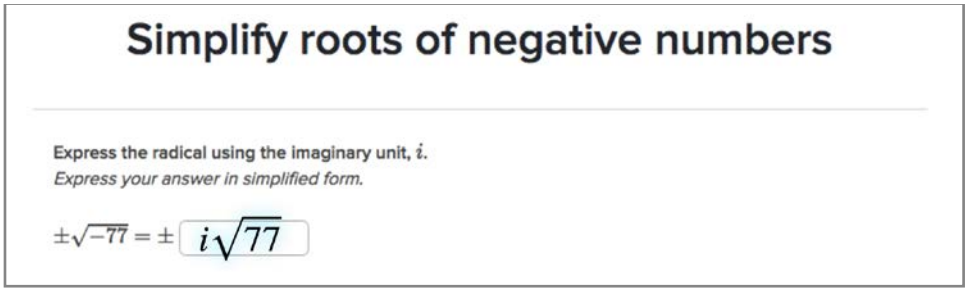


Obr. 8: Učitelský přehled

Náš model využití Khan Academy

Úlohy na KA mají spíše repetitivní než objevitelský charakter. Proto je využíváme k upevňování či doplňování dovedností získaných při hodinách. Poté, kdy je téma probráno ve škole, dostanou naši žáci za úkol cca 4 cvičení na KA na týden. Splnění těchto cvičení hodnotíme známkou, průměr všech známek za domácí úkoly pak tvoří jednu třetinu známky na vysvědčení.

V současné době se zabýváme vlivem cvičení na KA na dovednosti žáků. Výzkum stále probíhá, proto nemůžeme ještě publikovat žádné statistické závěry, můžeme ale varovat před příliš mechanickými úlohami, které také lze na KA najít. Na obrázku 9 je úloha, v níž si studenti mají procvičovat odmocňování v oboru komplexních čísel. Tato úloha má dvě slabá místa. Za prvé, úloha velmi nešikovně zachází se symbolem odmocniny, kde na jedné straně rovnosti symbol označuje komplexní odmocninu, na druhé pak odmocninu v reálném oboru. Drhou a závažnější vadou z didaktického hlediska je fakt, že úlohy tohoto typu mohou žáci úspěšně řešit bez sebemenšího povědomí o komplexních číslech. Po přečtení jednoho vzorového postupu žák zjistí, že stačí škrtnou minus pod odmocninu a napsat před ni *i*. Při volbě cvičení bychom tak měli zvažovat, zdali skutečně upevňují a rozvíjejí kýžené dovednosti žáků.



Obr. 9: Cvičení z odmocňování v oboru komplexních čísel.

Z našich předchozích výzkumů vyplývá, že žáci dlouhodobě preferují domácí úkoly na KA před domácími úkoly z běžné sbírky. Přestože žáci dostávají známky za splnění či nesplnění domácích úkolů, plní je v průměru pouze dvě třetiny žáků. Pozornost si také zaslouží jazyková úroveň žáků, případná jazyková bariéra může být překážkou přínosného využití KA.

Závěr

Khan Academy jako nástroj k zadávání a hodnocení domácích úkolů z matematiky na střední škole můžeme doporučit. Učitelům umožňuje objektivněji hodnotit úsilí, které žáci předmětu věnují, a žákům umožňuje doplnění či upevnění potřebných dovedností. Nástroj nedoporučujeme používat k výkladu nové látky, ale spíše k procvičování již probrané látky.

Pokud při zavádění Khan Academy narazíte na nějaké potíže, neváhejte mě kontaktovat, rád vám pomohu.

Literatura:

[1] Attali, Y. (2015). Effects of multiple-try feedback and question type during mathematics problem solving on performance in similar problems. *Computers & Education*, 86, pp.260–267.

[2] Fan, H., Xu, J., Cai, Z., He, J. and Fan, X. (2017). Homework and students' achievement in math and science: A 30-year meta-analysis, 1986–2015. *Educational Research Review*, 20, pp.35–54.

[3] Strandberg, M. (2013). Homework – is there a connection with classroom assessment? A review from Sweden. *Educational Research*, 55(4), pp. 325–346.

[4] Dettmers, S., Trautwein, U., Lüdtke, O., Kunter, M., Baumert, J. (2010). Homework Works if Homework Quality Is High: Using Multilevel Modeling to Predict the Development of Achievement in Mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 102, pp. 467–482

[5] Trautwein, U., Lüdtke, O. (2009). Predicting homework motivation and homework effort in six school subjects: The role of person and family characteristics, classroom factors, and school track. *Learning and Instruction*, 19, pp. 243–258

[6] *Wilson, J., & Rhodes, J.* (2010). Student perspectives on homework. Education, 131(2), 351-358.

[7] *Bempechat, J., Li, J., Neier, S. M., Gillis, C. A., & Holloway S., D.* (2011). The homework experience: Perceptions of low-income youth. Journal of Advanced Academics, 22(2), 250-278.

[8] *Clarina, R., & Koul, R.* (2003). Multiple-try feedback and higher-order learning outcomes. International Journal of Instructional Media, 32(3), 239-245.

[9] *Mueller, C. M., & Dweck, C. S.* (1998). Praise for intelligence can undermine children's motivation and performance. Dostupné zde: http://www.uky.edu/~eushe2/mrg/MuellerDweck1998.pdf

[10] Vančura, J. (2017). Research on the language barriers of students who use Khan Academy as a mathematics homework platform. *CERME 10*, Dublin 2017. Dostupné zde: https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0195.pdf

[11] Vančura, J. (2016). Využití Khan Academy pro výuku matematiky na střední škole. *Dva dny s didaktikou matematiky*, Praha 2016. ISBN 978-80-7290-894-3. Dostupné zde: http://www.suma.jcmf.cz/materialy-pro-ucitele/sborniky-z-konferenci/dva-dny-s-didaktikou-matematiky/

[12] Khan Academy - www.khanacademy.org

Jiří Vančura
Univerzita Karlova
Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: jivancura@gmail.com

VYUŽITÍ STRUKTURNÍCH KOMPONENT INTERAKTIVNÍCH UČEBNIC V HODINÁCH MATEMATIKY NA ZÁKLADĚ VIDEOSTUDIÍ

Klára Vocetková

Ekonomická fakulta, Jihočeská univerzita

Abstrakt: Interaktivní učebnice, tzv. I-učebnice, jsou svým obsahem tištěné učebnice obohacené o multimediální materiály. Po důkladné analýze strukturních komponent tištěných učebnic a I-učebnic nás zajímalo jejich praktické využití. Videostudie hodin planimetrie probíhaly ve vybrané třídě na českobudějovickém gymnáziu v květnu a v červnu 2017. O své dojmy a výsledky bych se ráda podělila s ostatními, neboť samotná práce s učebnicí přinášela v reálném procesu řadu kladů ale i záporů.

Klíčová slova: I-učebnice, strukturní komponenty učebnic, didaktická vybavenost učebnic

The use of structural component of interactive textbooks in mathematics classes bases on a videostudy

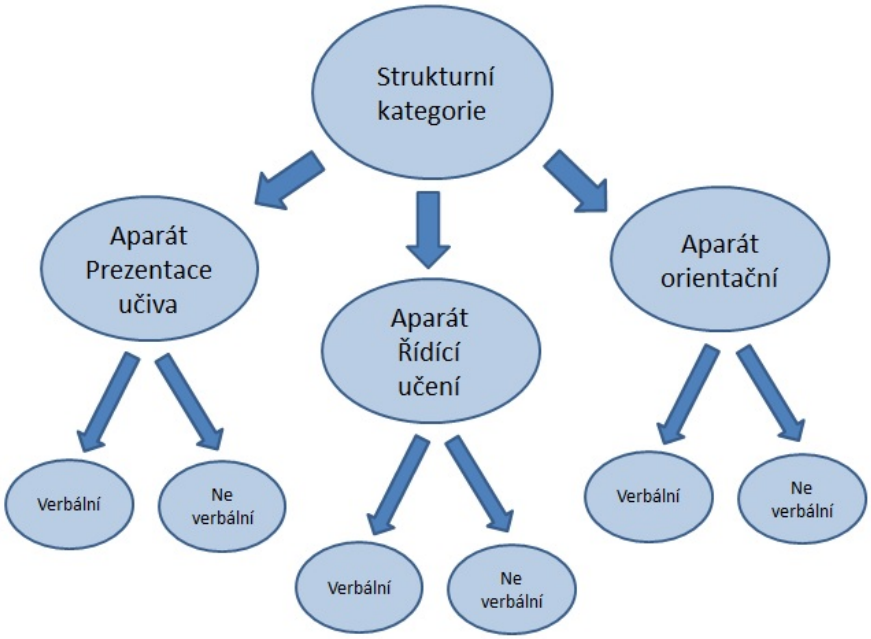
Abstract: Interactive textbooks, so called I-textbooks, are printed textbooks whose contents are enriched with multimedia materials. After a profound analysis of structural components of printed textbooks and I-textbooks, the authors were interested in their practical use in mathematics classes. A videostudy of plane geometry classes was conducted in a selected grammar school in České Budějovice in May and June 2017. The study revealed many pros and cons concerning the use of such textbooks in real classes and the paper presents interesting findings and experience with their use in the teaching and learning process.

Key words: I-textbooks, structural components of textbooks, didactical equipment of textbooks

Úvod

Analýza učebnic zabývající se zkoumáním jednotlivých dílčích složek učebnic je označována jako funkčně strukturální analýza učebnic. Jednotlivé složky a jejich strukturní komponenty, které se v učebnicích vyskytují, mají konkrétní funkci, tudíž mezi funkcí a strukturou učebnice je úzká souvislost. Každý strukturní komponent má svou didaktickou funkci a realizace didaktických funkcí nemůže být efektivně splněna bez strukturních komponentů, které danou funkci rozvíjí.

Nyní bych si dovolila shrnout malý historický přehled zavedení pojmu „strukturní komponenty učebnic“. Kategorizace, které budou následně podrobněji uvedeny, jsou řazeny vzestupně vzhledem k roku vytvoření a je zde vidět i logická návaznost vývoje strukturních komponentů. Mezi první autory zabývající se problematikou struktury učebnic patří J. I. Perovskij (1957; podle Zujev, 1986, str. 96). Nepoužívá ještě termín struktura, ale metodická stavba učebnice, kterou vnímá jako vnitřní formu obsahu učebnice a vymezuje obecně sedm prvků učebnice. V NDR se strukturou učebnic v sedmdesátých letech zabýval G. Meyerdorf (podle Zujev, 1986, str. 96–98). Vyčleňuje čtyři skupiny učebnic, ale spíše z pohledu funkcí, které budou jednotlivé skupiny plnit. U nás se v osmdesátých letech zabývali klasifikací strukturních komponentů J. Doleček, M. Řešátko a Z. Skoupil (1975) a kategorizovali pouze textové složky učebnice. Dále se již obecně v každém modelu rozlišuje textová a mimotextová složka. M. Bednařík (1981; podle Průcha, 1998)) zmiňuje 12 komponentů textové složky a nevýkladovou složku rozděluje na procesuální, orientační a obrazový aparát. V. Michovský (1981; podle Červenková, 2011) již k jednotlivým strukturním kategoriím, kde opět rozlišoval textové a mimotextové složky, definoval jejich funkce. Strukturní kategorie rozlišil obdobně i A. Wahla (1983). D. D. Zujev (1986) pracoval se strukturními komponenty, které rozdělil na dvě velké skupiny, výkladový a nevýkladový text. Ke každé skupině definoval dílčí komponenty, a uvedl druh strukturního komponentu. Poslední zmíněnou klasifikací, u nás dodnes nejčastěji používanou, je klasifikace dle J. Průchy (1998), kde jsou předchozí členění spojena, upravena a doplněna do výsledné kategorizace strukturních komponentů. Inspirován rozdělením základních strukturních skupin dle V. Michovského (1981; podle Červenková, 2011) klasifikuje aparát prezentace učiva, aparát řídící učení a aparát orientační. U každého aparátu rozlišuje textové a mimotextové složky a definuje jejich dílčí strukturní komponenty. Vznikl model s 36 strukturními komponenty, který se používá dodnes. Strukturní jednotky kategorizuje na verbální a neverbální a současně do jednotlivých aparátů učiva, tudíž rozděluje komponenty dle funkce učebnice.



Obrázek 1 - Strukturní kategorie dle J. Průchy (1998) - vlastní zpracování

Na učebnici je třeba tedy nahlížet jako na obecný systém komponentů, ve kterém hledáme integrované podsystémy a jejich strukturní jednotky, které mají v učebnici jednoznačný, opakující se znak. Z tohoto důvodu se struktura učebnice liší daným předmětem, věkem žáků či studentů, autorovým stylem psaní učebnice atd. Zároveň stejně jako u funkce učebnice záleží na tom, zda autoři strukturních modelů zvolí obecnější či podrobnější strukturní dělení.

Obsahová analýza vybraných matematických učebnic a I-učebnic

Již zmíněný model J. Průchy hodnotím také nejpropracovanějším, a tudíž jsem ho použila jako výchozí model pro vlastní výzkum. Na základě podrobné analýzy dostupných učebnic planimetrie a funkcí pro střední školy, kdy jsem schválně vybrala odlišné kapitoly svým pojetím výkladu, mi vznikla následující strukturní kategorizace.

APARÁT PREZENTACE UČIVA (celkem 15 komponentů)	
Verbální komponenty	**Neverbální komponenty**
výkladový test prostý	umělecká ilustrace
výkladový test nedefiniční	nauková ilustrace
definice (věty, lemma, axiomy, tvrzení aj.)	důkazy z naukové ilustrace
důkazy (přímý, nepřímý, sporem, indukcí)	fotografie
shrnutí učiva k tématům (kapitolám, lekcím)	mapy, kartogramy, plánky, grafy, diagramy aj.

APARÁT PREZENTACE UČIVA (celkem 15 komponentů)	
doplňující texty (dokumentační materiál, citace z pramenů, statistické tabulky)	obrazová prezentace barevná (použití alespoň jedné barvy odlišné od běžného textu)
poznámky a vysvětlivky	
podtexty k vyobrazením	
seznam použitých symbolů	
APARÁT ŘÍDÍCÍ UČENÍ (celkem 17 komponentů)	
Verbální komponenty	**Neverbální komponenty**
předmluva	grafické symboly vyznačující určité části textu (poučky, pravidla, úkoly, cvičení aj.)
návod k práci s učebnicí (pro žáky a/nebo učitele)	užití zvláštní barvy pro určité části verbálního textu
stimulace celková (podněty k zamyšlení, otázky aj. před celkovým učivem ročníku)	užití zvláštního písma (tučné písmo, kurzíva aj.) pro určité části verbálního textu
stimulace detailní (podněty k zamyšlení, otázky aj. před nebo v průběhu lekcí, témat)	využití přední nebo zadní obálky (předsádky) pro schémata, tabulky aj.
odlišení úrovní učiva (základní – rozšiřující, povinné – nepovinné apod.)	
otázky a úkoly za tématy, lekcemi	
vzorově řešené příklady	
instrukce k úkolům komplexnější povahy (návody k pokusům, laboratorním pracím, pozorováním, aj.)	
náměty pro mimoškolní činnosti s využitím učiva (využití mezipředmětových vztahů)	
explicitní vyjádření cílů učení pro žáky	
prostředky a/nebo instrukce k sebehodnocení pro žáky (testy a jiné způsoby hodnocení výsledků učení)	
výsledky úkolů a cvičení (správná řešení, správné odpovědi apod.)	
odkazy na jiné zdroje informací (bibliografie, doporučená literatura aj.	
APARÁT ORIENTAČNÍ (celkem 4 komponenty)	
Verbální komponenty	**Neverbální komponenty**
obsah učebnice	
členění učebnice na tematické bloky, kapitoly, lekce aj.	
marginálie, výhmaty, živá záhlaví aj.	
rejstřík (věcný, jmenný, smíšený)	

Tabulka 1 - Strukturní komponenty matematických učebnic - vlastní zpracování

V dnešní době postupně přibývají nakladatelství, která kromě tištěných učebnic vydávají i I-učebnice. Jedná se na první pohled o stejnou verzi učebnice, která je doplněna řadou strukturních komponentů, obohacených o velké množství interaktivních prvků. Současné dostupné I-učebnice pro střední školy z vybraných kapitol jsou třídílná učebnice planimetrie a dvoudílná učebnice funkcí od nakladatelství Fraus. Při důkladné obsahové analýze učebnic jsem zjistila, že v porovnání s učebnicí klasickou, je do I-učebnice přidáno 1244 strukturních komponentů, které jsem si dále rozdělila do jednotlivých aparátů dle didaktické funkce, kterou daný komponent rozvíjí.

Do aparátu prezentace učiva byly přidány následující strukturní komponenty:

- Verbální komponenty - poznámka/vysvětlení (3×),
- Neverbální komponenty – obrázek (8×), video (1×), animace (1×), mapa (1×).

Do aparátu řídící učení byly přidány následující strukturní komponenty:

- Verbální komponenty - hypertextový odkaz na matematickou látku v rámci stejné učebnice (238×), hypertextový odkaz do jiné I-učebnice matematiky v rámci stejné řady učebnic (48×), odkaz na web (55×), hypertextový odkaz v rámci mezipředmětových vztahů (2×), odkaz na řešené úlohy (211×), odkaz na cvičení (16×), krokované řešení (223×), mezivýpočet (4×), odkaz na výsledek/řešení (316×), testy k sebehodnocení (52×), překlad z AJ (23×),
- Neverbální komponenty - krokované konstrukce (41×), krokovaný obrázek (1×).

Je třeba i zmínit komponenty řadící se do aparátu orientace v učebnici, ke kterým patří například polepka (student má možnost si dopisovat poznámky) či zvýrazňovač. Jedná se o komponenty patřící již do I-učebnice, která umožňuje zároveň i personifikaci. Mezi další komponenty je nutno zařadit mapu struktury učebnice, vyhledávání v učebnici, přítomnost navigace, zažité příkazy, klávesové zkratky či optimalizaci parametrů audiovizuálních prvků.

Vlastní výzkum využití strukturních komponentů při výuce

Vlastní pilotní výzkum probíhal v květnu a v červnu 2017 v jedné gymnaziální třídě na fakultní škole v Českých Budějovicích. Celkem bylo nahráno celých 13 hodin výuky planimetrie, ostatní hodiny byly věnovány testům, dobírání předešlé látky či závěrečnému opakování na pololetní práci, nikoliv výuce planimetrie. Výuka probíhala dle I-učebnice z nakladatelství Fraus a byly probrány následující kapitoly: Základní planimetrické pojmy a poznatky, Trojúhelníky a Čtyřúhelníky. Kapitoly Mnohoúhelníky, Kružnice, kruh a jejich části a Množiny bodů dané vlastnosti vyučující nestihl na rozdíl od původního ročního plánu probrat. Jedním z důvodů bylo, že dobíral na začátku roku ještě látku z předchozího ročníku a druhým důvodem bylo dle něj pomalejší tempo výkladu při práci s učebnicí.

V I-učebnici se v probraných kapitolách vyskytovalo následujícím několik strukturních komponentů, které mohly být ve vyučování využity:

Hypertextové odkazy všech typů – 18× (aparát řídící učení, verbální komponenty),
Odkazy na řešené úlohy či cvičení – 18× (aparát řídící učení, verbální komponenty),
Krokované řešení, mezivýpočet – 12× (aparát řídící učení, verbální komponenty),

Výsledek, řešení – 24× (aparát řídící učení, verbální komponenty),
Obrázek, video, animace, mapa – 3× (aparát prezentace učiva, neverbální komp.).

Využitelnost strukturních komponent ve vyučovacím procesu

Je třeba si všimnout, že v aparátu prezentace učiva I-učebnice nabízí malé množství strukturních komponentů. Učitel využíval obrázky, a to téměř v každé hodině, do kterých barevně dopisoval různé poznámky a na základě nich dokazoval například Pythagorovu či Eukleidovy věty, ale zmíněné obrázky jsou i součástí klasické učebnice, tím pádem se nejedná o prvek, který je do I-učebnice přidán, ale o prvek elektronické (pouze promítané) klasické učebnice. Neverbální komponenty z aparátu prezentace učiva, které učebnice nabízely, jsou spíše doplňující látkou, a nebyl na mě vzhledem k časové tísni probírané látky čas. Všechny ostatní komponenty spadají do aparátu řídící učení. Z těch se ukázaly hypertextové odkazy a odkazy mezi textem a úlohami či řešením nevyhovující, a to hlavně z důvodu udržení pozornosti ve třídě. Při podrobné analýze videostudií bylo zjištěno, že každý „překlik“ avizuje pokyn k volnosti či nesoustředěnosti, a trvá cca tři minuty, než učitel zklidní třídu a mohou dále pracovat. Poslední možný komponent se týká krokovaných řešení či mezivýpočtů. Zde se ukázalo, že učitel pokud chce aktivně zapojit celou třídu, musí úlohu krokovat celá třída a učitel jejich postup jen koriguje. Z toho důvodu nebylo vhodné použít doporučená krokovaná řešení, která nabízí jen jedno z možných postupů. Stejná situace nastane u krokovaných konstrukcí, kde je opět uveden jeden konkrétní postup konstrukce dané úlohy. Krokované konstrukce učebnice nabízela ale až v dalších kapitolách, které nebyly probrány, nicméně konstrukční úlohy žákům byly například u kapitoly čtyřúhelníků zadány. V tomto případě učitel využívá GeoGebru, kterou velmi dobře ovládá.

Závěr

Bezpochyby nejdůležitější stránkou pro učitele, zda použít I-učebnici či nikoliv, by mělo být dostatečné technické zázemí školy a správně fungující technologie. V případě malého počtu učeben s dataprojektorem dochází k neustálému stěhování. Důležité je také osvětlení třídy a možné používání žaluzií z důvodu, aby studenti dostatečně viděli na psaní a naopak neměli moc osvětlené plátno. Ve třídě by měla být také umístěna tabule na přední stěně, která nebude překryta promítacím plátnem. Ukázalo se, že je vhodné promítat na bílou tabuli, nikoliv na zeď či na plátno, protože umožňuje dopisování do obrázků, textů či zvýrazňování.

Kromě videostudií výzkum zahrnoval i focení sešitů s cílem kontroly zápisu verbálních či neverbálních komponentů a focení testů. Na závěr studenti vyplnili i dotazník, kde byli dotazování na práci s učebnicí, zapisování poznámek a na jejich přípravu na test či na běžnou hodinu. Uvedla bych některé výsledky, které vyplývají z vyhodnocení jednotlivých dotazníků. 18 % studentů uvádí, že dostatečně neviděli na texty či na vzorce. 23 % studentům se zdál výklad rychlejší, 18 % pomalejší. Zde je třeba zdůraznit, že pomalejší výklad se zdál studentům s horším prospěchem a rychlejší výklad studentům s výborným či chvalitebným prospěchem. Při kontrole sešitů bylo zjištěno, že ti co odpovídali, že se jedná o rychlejší výklad, neměli dělány dostatečné či žádné poznámky. Učitel zde zmínil, že jsou žáci zvyklí si psát, to co píše na tabuli či když zdůrazní „zapište si“. V tomto případě se jednalo o jinou formu výkladu, učebnice byla promítána, tudíž žáci s lepším prospěchem se snažili si vše přečíst a udělat si co

nejvíce poznámek, naopak studenti s horším prospěchem si napsali poznámek málo či nepsali vůbec. 53 % uvedlo, že jim učebnice přišla přehlednější, ale je třeba zmínit, že na škole studenti nemají povinnou literaturu, tím pádem učitelé nevyučují v hodinách podle učebnice. Mají pouze literaturu doporučenou pro domácí studium.

Na základě rozboru videostudií a vlastního pocitu z výuky jsme s vyučujícím dospěli k závěru, že využití nabízených strukturních komponentů kapitoly planimetrie není ve vyučovacích hodinách vyhovující, a to hlavně z důvodu časových. Je třeba ale zdůraznit, že na dotaz z jakých materiálů se připravují studenti na hlášený test, uvedli, že 70 % z nich se připravuje ze sešitu, 41 % vyhledává na internetu a 35 % si dohledává informace v učebnicích. Podobně odpovídali i na dotaz, jak se připravuje jejich nejlepší kamarád na hlášený test. Na jednotlivé vyučovací hodiny se dle odpovědí nepřipravují vůbec či si přečtou poznámky v sešitě před hodinou. Z důvodu, že přes třetinu třídy využívá při domácí přípravě internet či učebnici se domnívám, že by mohlo mít význam, využít takovou I-učebnici při přípravě na vyučování. Proto bych se v následující části výzkumu chtěla věnovat využití strukturních komponentů ve fázi přípravy na vyučování, a to jak učitele, tak i studentů.

Závěrem bych chtěla poděkovat fakultní škole a hlavně vyučujícímu za možnost provést videostudii a za veškerou organizaci, kterou bylo třeba kvůli nahrávání zajistit.

Literatura

[1] Bokhove, Ch., Jones, K., Charltom, P., Mavrikis, M. & Geraniou, E. (2014). Auhoring your own creative, electronic book for mathematicx: the MC-squared project. In *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development.* Dostupné z WWW: http://eprints.soton.ac.uk/374809/1/ICMT-2014_proceedings150331.pdf

[2] Červenková, I. (2011). *Užívání učebnic v činnostech žáků na 2. stupni základních škol.* Disertační práce. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci. Dostupné z WWW: http://theses.cz/id/sreuts/Disertan_prce_Iva_ervenkov.pdf

[3] Doleček, J., Řešátko, M. & Skoupil, Z. (1975). *Teorie tvorby a hodnocení učebnic pro odborné školství.* Praha: Výzkumný ústav odborného školství.

[4] Pluskal, M. (1996). Zdokonalení metody pro měření obtížnosti didaktických textů. *Pedagogika,* 46(1), 62–76. Dostupné z WWW: http://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=2908&lang=cs

[5] Průcha, J. (1998). Učebnice teorie a analýzy edukačního média: příručka pro studenty, učitele, autory a výzkumné pracovníky. Brno: Paido.

[6] Průcha, J. (2014). Results and Prospects of Textbook Research in the Czech Republik. *Orbis Scholae,* 8(2), 91–99. Dostupné z WWW: http://www.orbisscholae.cz/archiv/2014/2014_2_06.pdf

[7] Švaříček, R. & Šeďová, K. (2007). *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách.* Praha: Portál.

[8] Wahla, A. (1983). *Strukturní složky učebnic geografie*. Praha: SPN.

[9] Zujev, D. D. (1986). *Ako tvoriť učebnice.* Bratislava: SPN.

Klára Vocetková
Jihočeská univerzita
Ekonomická fakulta
Studentská 13,
370 05 České Budějovice
e-mail: kvocetkova@ef.jcu.cz

VYUŽITÍ MAPLE V ZÁKLADNÍCH KURZECH MATEMATIKY NA FIM

Iva Vojkůvková

Katedra informatiky a kvantitativních metod, Fakulta informatiky a managementu, Univerzita Hradec Králové

Abstrakt: Příspěvek seznamuje s využitím MAPLE ve výuce matematiky pro obor aplikovaná informatika. Během kurzu ZMI1 studující ovládnou prostředky potřebné k určení průběhu funkce. V kurzu ZMI2 se pak naučí příkazy z oblasti lineární algebry, věnují se maticové a grafické interpretaci lineárních zobrazení a funkcím dvou proměnných. Práce s MAPLE rozvíjí kompetence studentů informatického zaměření ovládat různé druhy SW.

Klíčová slova: MAPLE, matematika, kalkulus, lineární algebra, výstupy z učení

Using MAPLE in mathematics courses at FIM

Abstract: This paper deals with the use of MAPLE in teaching mathematics for the students of Applied Informatics. During the first semester (ZMI1) students master commands to determine the course of the function of one variable. In the second semester (ZMI2) they learn commands from linear algebra, they work with matrix and graphical interpretation of linear transformations and handle the functions of two variables. Work with MAPLE develops students competence to use various kinds of software.

Key words: MAPLE, mathematics, calculus, linear algebra, learning outcomes

Úvod

Základní kurz matematiky je na Fakultě informatiky zařazen v 1. ročníku bakalářského studia oborů finanční management, informační management a aplikovaná informatika. V prvním semestru vyučujeme předmět Základy matematiky 1, kde je probrán diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné. Ve druhém semestru navazuje předmět Základy matematiky 2, kde se věnujeme základům lineární algebry, funkcím dvou a více proměnných a obecným diferenciálním rovnicím 1. řádu. V obou semestrech je rozsah výuky 2 hodiny přednáška + 2 hodiny cvičení, předměty jsou ohodnoceny 7 kredity, jsou zakončeny zápočtem a zkouškou v písemné formě. MAPLE využíváme od roku 2010 při výuce studentů oboru aplikovaná informatika (předměty se zkratkou ZMI1 a ZMI2), zvládnutí základů ověřujeme formou domácí zápočtové práce.

MAPLE na FIM

V rámci projektu *Inovace počítačové učebny a nákup software pro výuku předmětů matematické povahy* (FRVŠ, 2010) byl MAPLE 15 instalován ve dvou volně přístupných učebnách (40 a 20 míst) a na počítačích vyučujících, později přibyla také možnost využít virtuálního připojení. V roce 2010 došlo k začlenění do výuky pro obor aplikovaná informatika s ohledem na zaměření studia.

Následně byl realizován projekt *REFIMAT – Inovace výuky matematiky v technickém a ekonomickém vzdělávání s cílem snížení studijní neúspěšnosti* (ESF OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, 2010-2013). V jeho rámci byly nejprve stanoveny Learning Outcomes (výstupy z učení – znalosti, dovednosti a způsobilosti). Dále byly připraveny nové studijní opory – tištěná skripta a sbírky (obsahují obrázky vytvořené v z MAPLE) i elektronické materiály v LMS Blackboard Learn 9.1. Během projektu proběhly workshopy MAPLE pro všechny vyučující základních kurzů matematiky a následně i pro studující oboru aplikovaná informatika. Ve čtyřčlenném týmu vyučujících byly vytvořeny pracovní materiály pro jednotlivé tematické celky předmětů ZMI1 a 2.

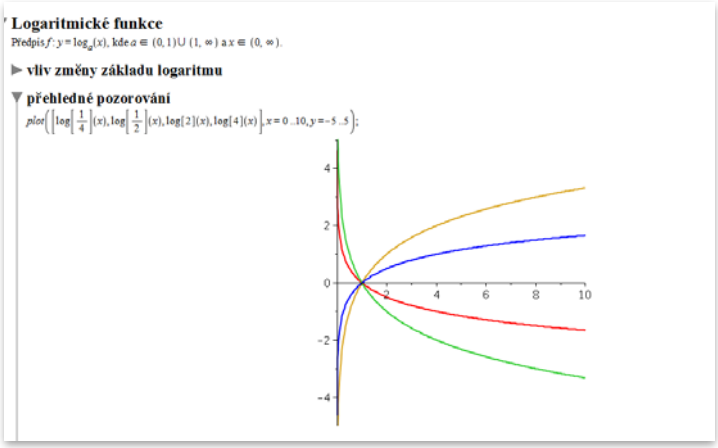
Ukázky práce s MAPLE jsou zařazeny v přednáškách, jedná se o „statické“ ilustrační výstupy i jednoduché animace. Pracovní materiály vytvořené v rámci REFIMATu jsou umístěny na interním disku N, dostupném studentům po přihlášení. Výukové prostředí Blackboard Learn 9.1 bohužel neumožňuje práci s těmito soubory. Pro studující jsou pořádány workshopy MAPLE ve druhé půli zimního i letního semestru, je to aktivita nad rámec rozvrhované výuky. Jeden ze tří příkladů v domácí zápočtové práci musí studující řešit v MAPLE.

Pracovní materiály - konkrétní příklady

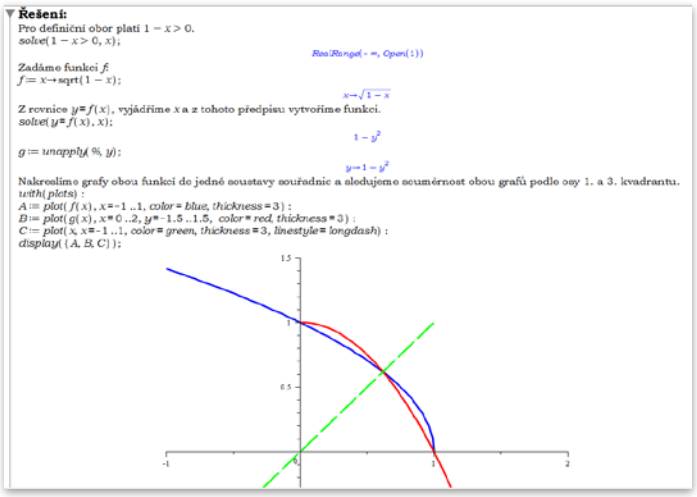
Struktura připravených materiálů je do jisté míry jednotná. Nejprve je uveden stručný teoretický výklad k dané partii. Některé materiály jsou doplněny o zajímavosti z historie či o praktické aplikace. Následují řešené příklady s komentářem k použitým příkazům popřípadě k interpretaci výsledků. Vesměs jsou používány běžné příkazy, zadávané zápisem resp. pomocí pravého tlačítka myši, dle potřeby jsou využity i „balíčky“ (Calculus, Linear Algebra,…). Nad rámec základních příkazů jsou v některých materiálech také jednoduché

uživatelem naprogramované výpočty. Kromě řešených příkladů jsou uvedena i zadání úloh k samostatné práci.

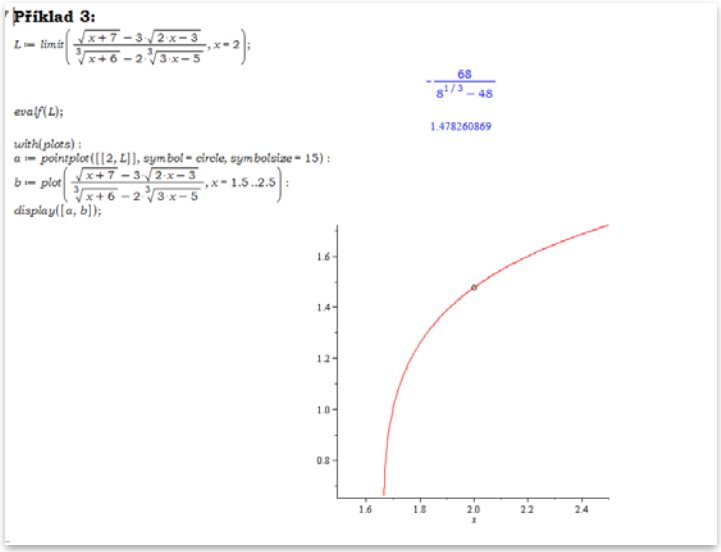
Pro předmět *Základy matematiky 1* byly vytvořeny materiály: Funkce (zadání, definiční obor, graf), Složená a inverzní funkce, Vlastnosti funkce, Limita funkce, Spojitost funkce, Derivace funkce, Monotonie, Taylorův polynom, Průběh funkce.



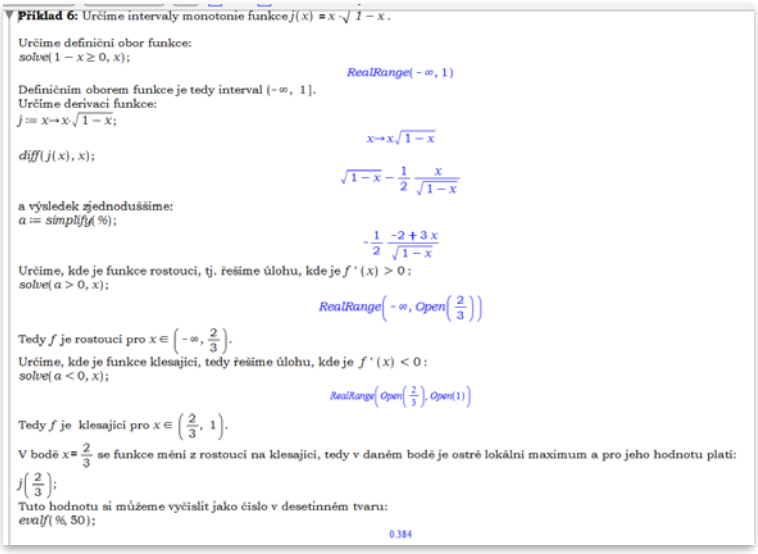
Obrázek 1: Logaritmická funkce



Obrázek 2: Nalezení inverzní funkce

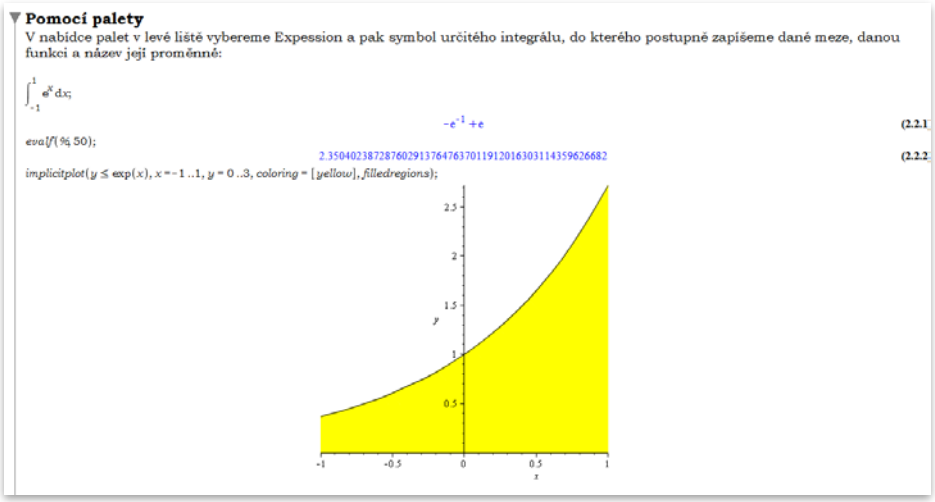


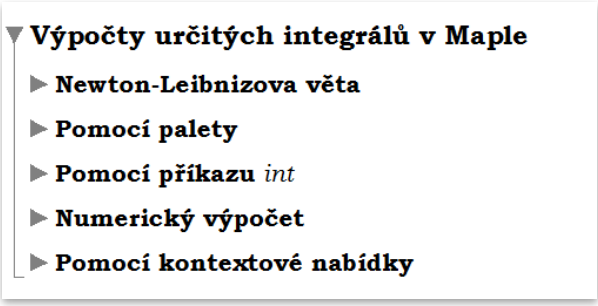
Obrázek 3: Výpočet limity, vykreslení bodu nespojitosti

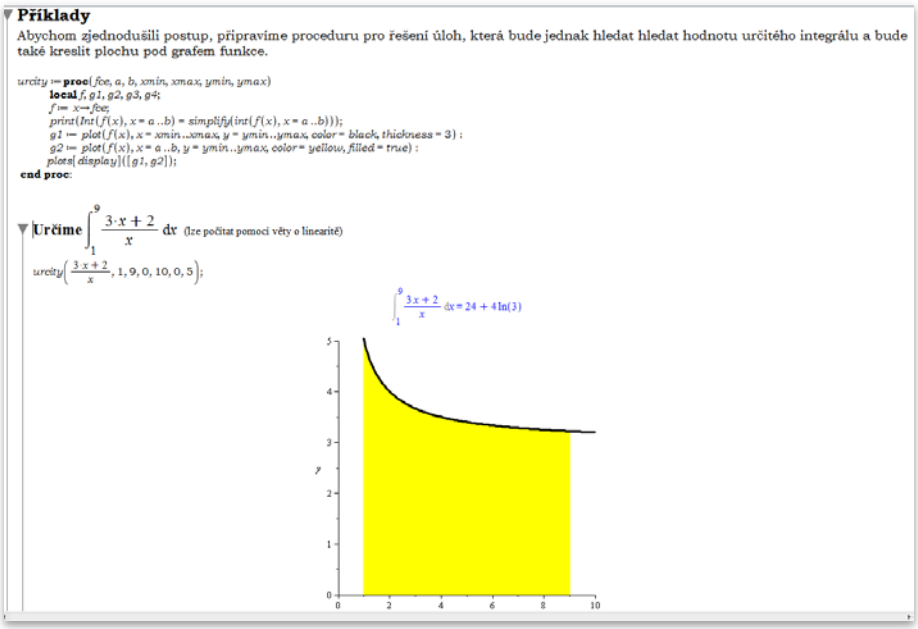


Obrázek 4: Určení intervalů monotonie funkce

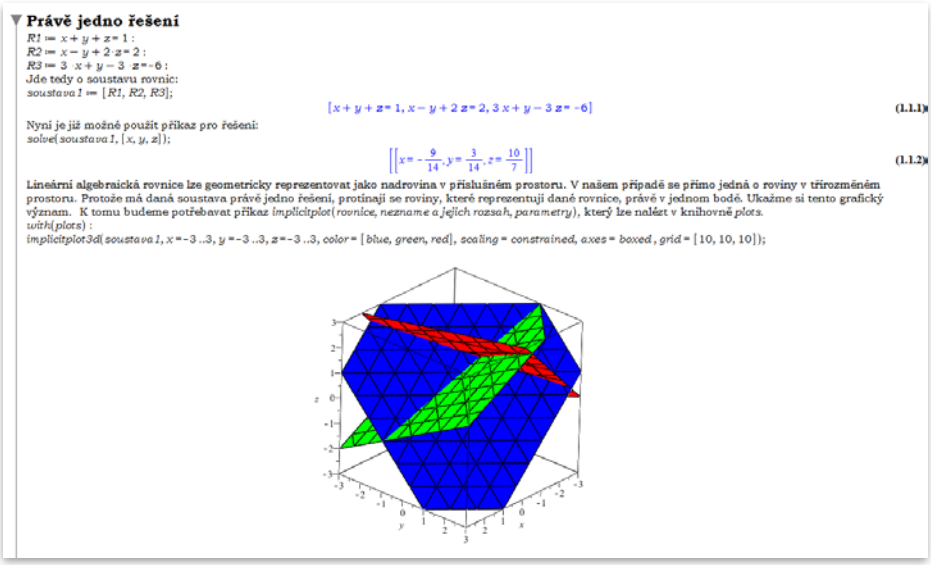
Pro předmět *Základy matematiky 2* byly vytvořeny materiály: Určitý integrál, Řešení soustavy lineárních rovnic, Gaussova eliminační metoda, Matice, Determinant, Lineární prostory, Lineární zobrazení, Vlastní vektory, Funkce více proměnných, Metoda nejmenších čtverců, ODR (ale v oboru ai se nevykládá).



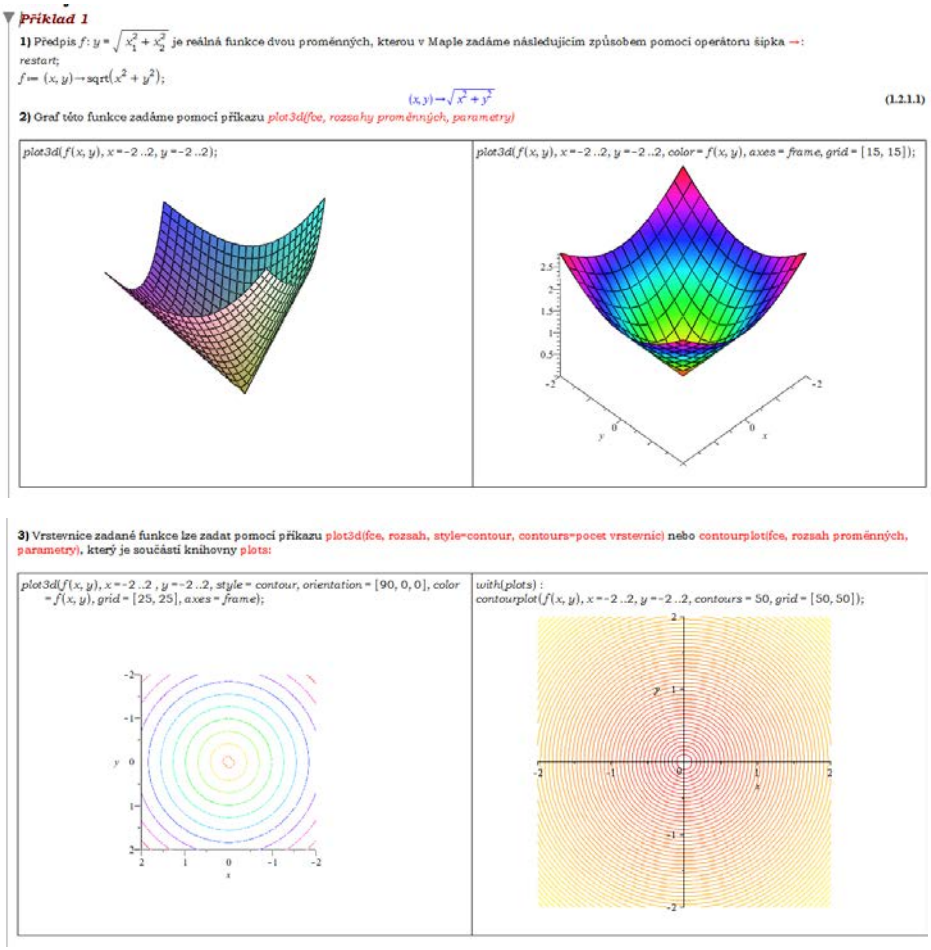




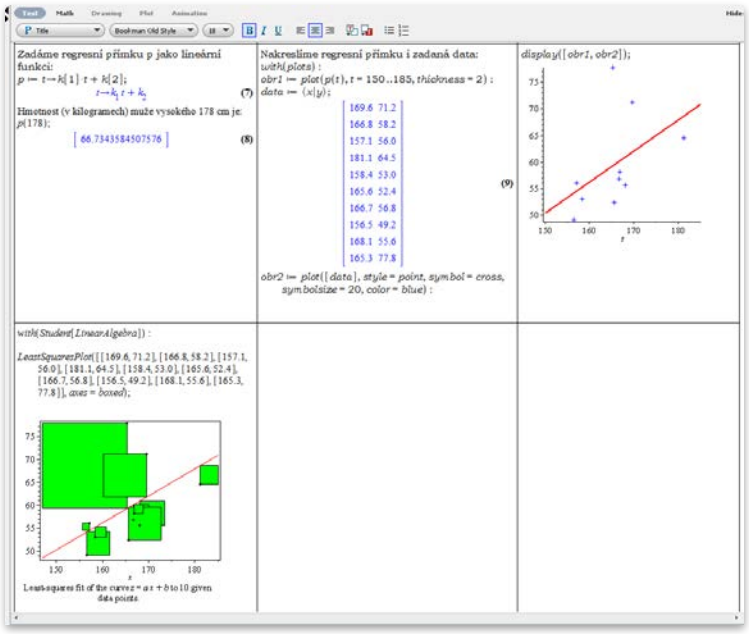
Obrázek 5: Výpočet určitých integrálů, plocha pod grafem funkce



Obrázek 6: Řešení SLAR a jeho geometrická interpretace



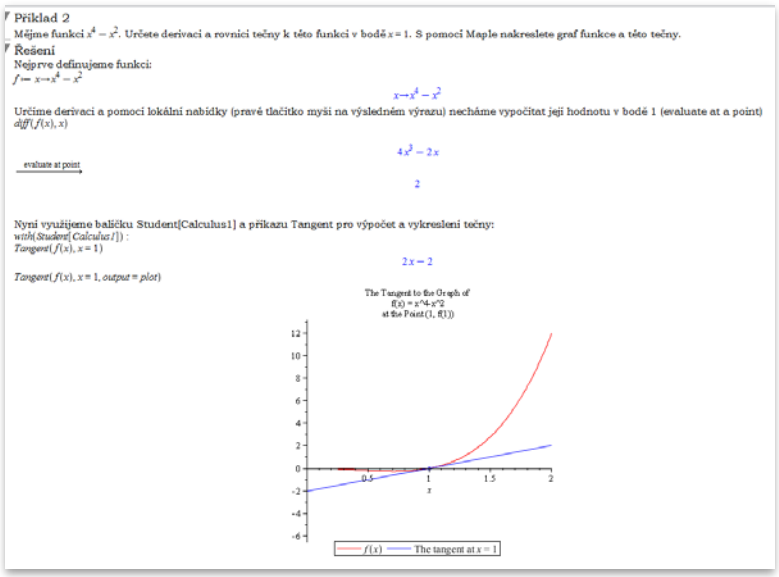
Obrázek 7: Funkce dvou proměnných – graf a vrstevnice



Obrázek 8: Metoda nejmenších čtverců

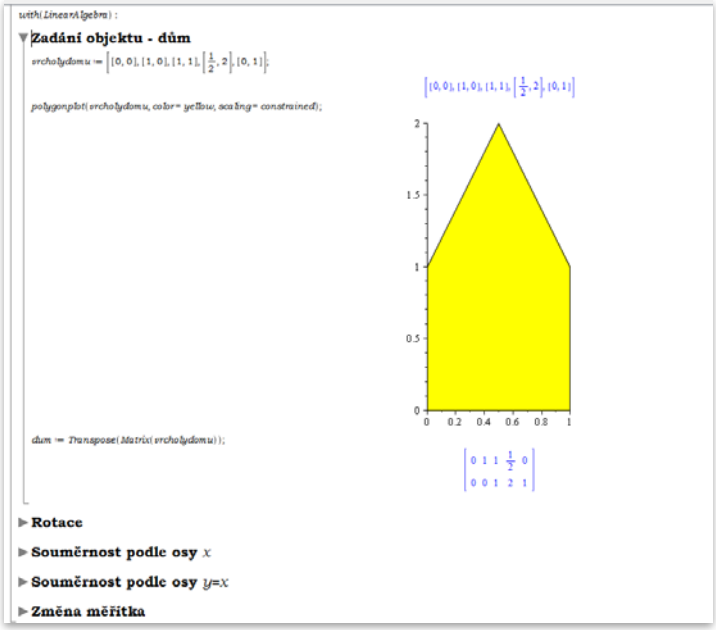
Workshopy

Obsahem workshopu v rámci předmětu *Základy matematiky 1* je především základní seznámení s prostředím (matematický a textový mód, zadávání výrazů a symbolů z klávesnice či výběrem z menu, základní příkazy pro výpočet), dále ukazujeme příkazy a volby pro úpravy výrazů, řešení rovnic a nerovnic, zadání funkce, vykreslení grafu, nalezení a využití derivace.



Obrázek 9: Derivace, rovnice tečny

V rámci předmětu *Základy matematiky 2* se při workshopu zaměřujeme na operace s maticemi, řešení soustav lineárních rovnic, zadání a zakreslení 2D objektu, maticovou interpretaci lineární transformace objektu a stručně se věnujeme funkcím více proměnných.



Obrázek 10: Zadání objektu a jeho lineární transformace

Domácí zápočtová práce

V předmětu *Základy matematiky 1* studující pomocí MAPLE určují průběh funkce, přičemž jsou zadány takové funkce, kde by „ruční“ řešení bylo náročné. V předmětu *Základy matematiky 2* je vylosován jeden ze tří příkladů: určení vzájemné polohy tří rovin početně i graficky, lineární transformace písmena (Z, N, M, W), metoda nejmenších čtverců. Požadavky na domácí zápočtovou práci splňují dlouhodobě zhruba 2/3 z celkového počtu studujících, (ne)úspěšnost v předmětu se odvíjí převážně od zvládnutí písemných zápočtových testů.

Problémy…

Jedním ze základních problémů je „výběhová“ verze MAPLE, zatím nejsou finance na novou. Též jsou problémy s reinstalací na nové notebooky pedagogů. Virtuální vzdálené připojení není vždy ideální, studenti tedy musí často pracovat na fakultě. Při pořádání workshopů bývá na překážku obsazenost učeben. Studující nezřídka poukazují na srovnatelné možnosti volně dostupného SW (WolframAlpha, Symbolab,…). V některých případech se i přes poměrně jasné pokyny objevuje řešení domácí zápočtové práce stylem „CtrlC + CtrlV“ a s tím spojené nepochopení výstupů a výsledků.

…a perspektivy

V současnosti je zvažováno podání projektu na nákup nové verze MAPLE, což také zvýší motivaci pedagogů k inovacím materiálů. Pro studující oboru aplikovaná informatika zůstává MAPLE stále první příležitostí k seznámení s CAS (v předmětu Numerická matematika mají pak povinně MaLab), jednotlivci vcelku pravidelně projevují zájem o samostatné bádání završené formou bakalářské či diplomové práce. Stalo se dobrou tradicí, že pořádáme také workshopy MAPLE pro střední školy v rámci tzv. Dne Pí na FIM.

Obrázek 11: Workshop pro studenty středních škol

Poděkování

Autorka děkuje kolegům z katedry doc. RNDr. Pavlu Pražákovi, Ph.D., doc. RNDr. Tatianě Gavalcové, CSc. a Mgr. Jiřímu Havigerovi, Ph.D. za poskytnutí materiálů, jejichž ukázky jsou v příspěvku použity.

Literatura:

[1] Vojkůvková, I.: *Zkušenosti s projektem REFIMAT na FIM UHK* (s. 189 - 194) In Ausbergerová, M.; Bastl, B.; Lávička, M (ed): *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Srní 2012. (sborník z konference - JČMF - pobočka Plzeň, ZČU a SUMA) dostupné na: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?PorZobr=2&PolozkaID=-1&ClanekID=119

[2] Monagan, M. B.: Maple 14 : The essential tool for mathematics and modeling. User Manual, Itroductory Programming Guide, Advanced Programming Guide., Maplesoft. Waterloo Maple Inc. Canada, 2010

[3] Pražák, P.: *Matematika 1*. Gaudeamus Hradec Králové, 2012.

[4] Haviger, J. a kol.: Sbírka úloh pro matematiku 1. Gaudeamus Hradec Králové, 2013.

[5] Gavalcová, T.; Pražák, P.: *Matematika 2.* Gaudeamus Hradec Králové, 2013.

[6] Gavalcová, T.: *Sbírka úloh z matematiky 2.* Gaudeamus Hradec Králové, 2013.

Iva Vojkůvková
Katedra informatiky a kvantitativních metod
Fakulta informatiky a managementu
Univerzita Hradec Králové
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: iva.vojkuvkova@uhk.cz

Název:	Sborník příspěvků 8. konference Užití počítačů ve výuce matematiky
Vydavatel:	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Editor:	Přemysl Rosa
Vydání:	1.
Počet stran:	177
Rok vydání:	2017
ISBN	978-80-7394-677-7