Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Sborník příspěvků 9. konference
Užití počítačů ve výuce matematiky

7. – 9. listopadu 2019
České Budějovice

Společnost učitelů matematiky
JČMF

Katedra matematiky Pedagogické fakulty
Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

ISBN 978-80-7394-795-8

Předmluva

Sborník obsahuje příspěvky, které zazněly na deváté konferenci „Užití počítačů ve výuce matematiky“, pořádané ve dnech 7. – 9. listopadu 2019 na půdě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Konference probíhala ve spolupráci se Společností učitelů matematiky JČMF a Jednotou českých matematiků a fyziků, pobočným spolkem České Budějovice.

Plenární přednášky přednesli Helmut Heugl (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra): *Visualization with technology – opportunities and dangers*, Petra Surynková (Univerzita Karlova v Praze): *Střípky z výuky geometrie: prostorová a rovinná geometrie na počítači*, Jiří Vaníček (Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích): *Počítačem podporovaná výuka matematiky v kontextu nového RVP aneb „To máme při matematice učit Excel?“* a Naďa Vondrová (Univerzita Karlova v Praze): *Kritická místa matematiky základní školy – kde mají čeští žáci problémy a lze jim předejít?* Anotace přednášek jsou spolu s prezentacemi dostupné na webové stránce konference www.pf.jcu.cz/upvm/2019.

Přednesené příspěvky se kromě tradičních témat využití systémů počítačové algebry (CAS) a dynamické geometrie (DGS) ve výuce a softwarové podpory e-learningu věnovaly také využití dalších programů a nových technologií ve výuce matematiky i dalších disciplín aplikujících matematické postupy. Celkem na konferenci kromě plenárních přednášek zaznělo 30 referátů a bylo uspořádáno 6 workshopů a jeden kulatý stůl. Příslušné články jsou ve sborníku uvedeny v abecedním pořadí podle jmen autorů. Sborník byl recenzován členy programového výboru konference.

Poděkování patří členům organizačního výboru a studentům za obětavou práci při přípravě i v době konání konference. Dík patří rovněž vedení Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích a vedení Kolejí a menz Jihočeské univerzity za velmi vstřícný přístup.

Programový výbor konference pracoval ve složení

Mgr. Roman Hašek, Ph.D.
Dr. Helmut Heugl
doc. RNDr. Helena Koldová, Ph.D.
prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
doc. RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.
doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
RNDr. Libuše Samková, Ph.D.
doc. PaedDr. Jiří Vaníček, Ph.D.
doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

V Českých Budějovicích 18. prosince 2019

Za programový výbor

Vladimíra Petrášková

Obsah

Daniela Bímová, Petra Pirklová, Kateřina Stolínová
Stereometrické rozcvičky v hodinách matematiky ... 4

Jiří Blažek
Důkaz ekvivalence dvou definic elipsy ... 16

Věra Ferdiánová, Jakub Poruba
GeoGebra nástroje pro výuku Mongeova promítání ... 17

Jan Fiala
Matematickou cestou k technice – Mechanické převody jako inspirace pro výuku matematiky ... 26

Šárka Gergelitsová, Tomáš Holan
Aritmetika a krabičky ... 38

Roman Hašek, Pavel Pech, Přemysl Rosa
Programování v JSXGraph ... 39

Jana Hnatová, Alena Prídavková
Propedeutika zlomkov v matematike s využitím hudby a počítačov ... 45

Jaroslav Hora
O faktorizaci polynomů s celočíselnými koeficienty ... 46

Patrik Klofáč
Ozobot v hodinách matematiky a fyziky ... 47

Monika Košařová, Roman Hašek
Výuka matematiky na základní škole s podporou online prostředí programu GeoGebra ... 52

Hana Mahnelová
Matematickou cestou k technice – samosvorné kleště ... 57

Zuzana Pátíková, Lubomír Sedláček
Podpora učení se limitám formou digitální hry Variant: Limits ... 58

Petra Pirklová, Daniela Bímová
Středová kolineace názorně 66

Jarmila Robová
Digitální technologie v pregraduální příprava učitelů matematiky.. 78

Yulianna Tolkunova
Postoje žáků k využívání tabletů ve výuce matematiky na druhém stupni 85

Jiří Vančura
Srovnání tří online platforem pro zadávání a hodnocení úkolů.. 97

Daniela Velichová
Povinná maturita z matematiky Pyrrhovo víťazstvo? 106

Šárka Voráčová
Užití GeoGebra appletů pro výuku těles 114

Tomáš Zadražil
Elektronické hlasování ve výuce matematiky 115

STEREOMETRICKÉ ROZCVIČKY V HODINÁCH MATEMATIKY

Daniela Bímová, Petra Pirklová, Kateřina Stolínová

Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

Abstrakt: Článek je věnován GeoGebra knihám s názvy „Stereometrické rozcvičky_učitel", „Stereometrické rozcvičky_student" a „Stereometrické rozcvičky". Všechny tři GeoGebra knihy obsahují dynamické applety stereometrických rozcviček, tj. úloh, pomocí nichž mohou žáci a studenti zajímavou a rychlou formou procvičovat a rozvíjet své geometrické myšlení a prostorovou představivost, a to nejen v hodinách matematiky. Názvy dvou GeoGebra knih přímo napovídají, komu jsou určeny, třetí GeoGebra kniha je zatím sestavena spíše pro učitele.

Klíčová slova: GeoGebra, dynamické applety, stereometrické rozcvičky, GeoGebra kniha, krychlová a základní tělesa, pohledy na tělesa, sítě těles, rovinné řezy těles, prostorové transformace.

Stereometric Warm-ups in Mathematics Lessons

Abstract: The article is dedicated to GeoGebra books called "Stereometric warm-ups_teacher", "Stereometric warm-ups_student" and "Stereometric warm-ups". All three GeoGebra books contain dynamic applets of stereometric warm-ups, it means of tasks using them students can use to train and develop their geometrical thinking and spatial imagination in an interesting and fast way, not only in mathematics lessons. The titles of two GeoGebra books directly suggest to whom they are intended, while the third GeoGebra book has been written for teachers first.

Key words: GeoGebra, dynamic applets, stereometric warm-ups, GeoGebra book, cubic and basic solids, views onto the solids, nets of the solids, planar cuts of the solids, spatial transformations.

Úvod

Geometrické myšlení a prostorová představivost patří mezi důležité schopnosti každého člověka. Představivost je v běžném smyslu slova chápána jako „schopnost vybavit si a vytvářet představy“. Na druhou stranu existuje mnoho rozličných definic představivosti, resp. prostorové představivosti. Pro příklad uveďme jednu definici představivosti z pohledu profesora psychologie a pedagogiky a jednu definici prostorové představivosti z pohledu profesora matematiky.

Polský profesor psychologie a pedagogiky Zbignew Pietrasinski, který se zabýval především kreativními procesy a teorií lidského vývoje v průběhu života, definoval představivost následujícím způsobem: „Představivost je psychický proces tvoření obrazů na základě minulých pocitů a vjemů. Je to tedy proces operování smyslovým materiálem, ne abstraktními pojmy.“ [1] Český a slovenský profesor matematiky, odborník na didaktiku matematiky Milan Hejný uvedl ve své knize definici prostorové představivosti z pohledu matematika: „Prostorová představivost je něco, co nám umožňuje vidět to, co ještě není – tedy umožňuje nám vytvořit si představy geometrických objektů a jejich rozmístění a umět v představě s těmito objekty manipulovat.“ [2]

Tradiční psychologie rozlišuje dva základní druhy představivosti:

- *rekonstrukční představivost* (Je charakteristická vybavováním si předmětů, které člověk aktuálně nevnímá. Tj. znamená „reprodukci“ předmětů ve vědomí člověka v podobě představ. Pod rekonstrukční představivostí rozumíme též vytváření představ na základě slovního popisu či schématického znázornění.)
- *konstrukční představivost* (Je to proces přinášející nové představy. Ve skutečnosti se opírá o základ předcházejících pocitů a vjemů, ale odlišuje se od nich tím, že překračuje jejich rámec, dotváří je či je úplně přetváří. Nejedná se tedy o vytváření „z ničeho“, základem je vždy naše zkušenost, vjemy a jejich reprodukce.)

Některými psychology je představivost rozdělována na základě smyslů, jejichž představy převažují nad ostatními. Slovenský univerzitní profesor psychologie Július Boroš toto rozdělení přímo definuje: „V případech, kde je schopnost vybavovat si určité zážitky ve formě představ mimořádně výrazná, hovoříme v psychologii o typu představivosti.“ [3] Podle Júlia Boroše k typům představivosti řadíme:

- zrakový typ
- pohybový (motorický typ)
- sluchový (auditivní) typ
- smíšený typ

Boroš výčet typů představivosti uzavírá konstatováním: „Výsledky výzkumů ukazují, že čisté, vyhraněné typy jsou vzácné, ale i to, že typ představivosti se může v průběhu života měnit, především pod vlivem praktické činnosti nebo systematického cvičení.“ [3]

Psycholog Jan Čáp, který se velmi intenzivně zabýval pedagogickou psychologií a styly učení, uvedl, že „Ve vývojové psychologii se pracuje také s pojmem *senzitivní stádia* (senzitivní období, senzitivní fáze): je to termín převzatý z biologie, v níž označuje období v ontogenezi, kdy je organismus vysoce přístupný vlivu určitých podnětů k rozvinutí určité funkce. Mimo toto období je působení podnětů slabší, popřípadě na ně organismus adekvátně nereaguje a příslušná funkce se nerozvine. Podobně se v psychickém vývoji označuje jako senzitivní stádium takové období, kdy jedinec je ve zvýšené míře citlivý na určitý druh podnětů (vnějších vlivů) důležitých pro vývoj některého aspektu psychiky.” [4]

Výzkumy uvádějí, že období kolem šestého, jedenáctého a šestnáctého roku života člověka jsou nejpříznivějšími obdobími pro pochopení prostorových vztahů a pro rozvíjení prostorové představivosti. V důsledku toho se jeví jako velmi vhodné prostorovou představivost v uvedených obdobích intenzivně procvičovat a rozvíjet.

Jednou z možností procvičování a rozvíjení prostorové představivosti a také geometrického myšlení je zařazování stereometrických rozcviček do hodin matematiky. Přitom stereometrickými rozcvičkami rozumíme takové úlohy, které zajímavou a relativně rychlou formou trénují prostorovou představivost či geometrické myšlení žáků či studentů. Stereometrické rozcvičky mohou být žákům či studentům zadávány jako běžné příklady, které žáci/studenti řeší „tužkou na papír“, anebo ve formě dynamických appletů vytvořených např. v programu GeoGebra. V příspěvku je představeno několik konkrétních příkladů stereometrických rozcviček, pro něž byly vytvořeny dynamické applety v programu GeoGebra. Z vytvořených dynamických appletů těchto, ale i několika dalších stereometrických rozcviček byly sestaveny tzv. GeoGebra knihy s názvem „Stereometrické rozcvičky“.

1 GeoGebra knihy „Stereometrické rozcvičky“

V rámci řešení projektu s názvem „Geometrické rozcvičky“ tzv. Studentské grantové soutěže vyhlášené Technickou univerzitou v Liberci pro rok 2019 jsme se rozhodly nejprve vyhledat vhodné příklady z tzv. spontánní stereometrie (tj. z prostorové geometrie, která pojednává o vytváření nejzákladnějších představ o tělesech a o trojrozměrném prostoru), pro něž by bylo možné vytvořit dynamické applety v programu GeoGebra a které by mohly být zařazovány do hodin matematiky jako stereometrické rozcvičky. Posléze jsme pro vybrané příklady vytvořily dynamické applety stereometrických rozcviček, a nakonec jsme z dynamických appletů sestavily tzv. GeoGebra knihy. Celkem vznikly tři GeoGebra knihy s názvy „Stereometrické rozcvičky“. Všechny tři GeoGebra knihy představíme podrobněji v dalším textu.

GeoGebra knihy s názvy „Stereometrické rozcvičky_student“ a „Stereometrické rozcvičky_ učitel“ obsahují shodné příklady, třetí GeoGebra kniha s názvem „Stereometrické rozcvičky“ je sestavena z příkladů odlišných od těch, které jsou základy dynamických appletů zařazených do prvních dvou výše uvedených GeoGebra knih.

1.1 GeoGebra kniha „Stereometrické rozcvičky_student“

GeoGebra kniha „Stereometrické rozcvičky_student“ je elektronický výukový materiál, který je určen výhradně pro studenty. [5] Obsahuje celkem 5 kapitol, v nichž jsou vloženy stereometrické rozcvičky určené k procvičování geometrického myšlení a prostorové představivosti v podobě předpřipravených dynamických appletů. GeoGebra kniha „Stereometrické rozcvičky_student“ je obsahově rozdělena následovně:

1. Zobrazení těles ve VRP

a) Vnímání krychle zobrazené ve VRP
b) Zobrazení krychle ve VRP_tangram
c) Prostorová lomená čára na krychli

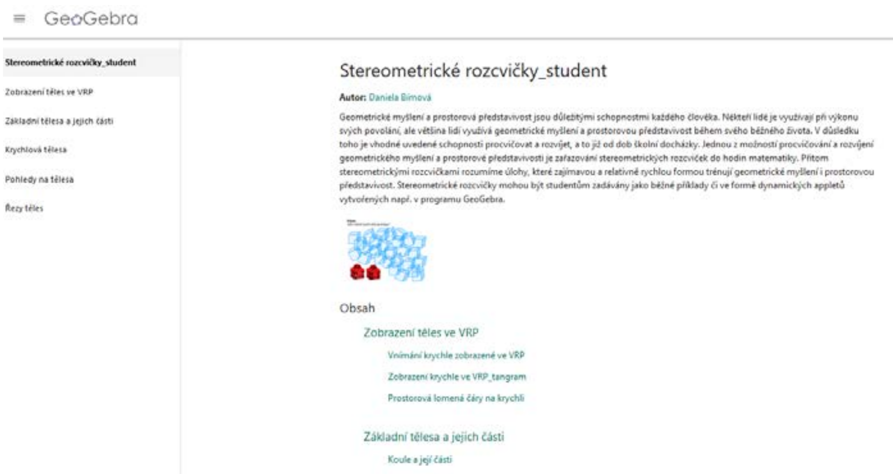
2. Základní tělesa a jejich části
   a) Koule a její části

3. Krychlová tělesa
   a) Krychlové těleso_pojmotvorný proces
   b) Krychlová stavba a kvantifikátory
   c) Krychlové těleso a jeho obarvené krychle
   d) Krychlová tělesa ze 4 krychlí
   e) Prostorový kříž 1
   f) Složení krychle ze dvou krychlových těles

4. Pohledy na tělesa
   a) Pyramidová plastika
   b) Věž ze základních těles
   c) Seskupení těles
   d) Drát na krychli 1
   e) Drát na krychli 2
   f) Drát na krychli 3
   g) Drát na krychli 4_zobrazit na krychli ve VRP
   h) Drát na krychli 5_zobrazit na krychli ve VRP

5. Řezy těles
   a) Rozřezání krychle 3x3x3 na jednotkové krychle
   b) Porcování sýru na osminy
   c) Rozřezání klínu sýru na 2 části

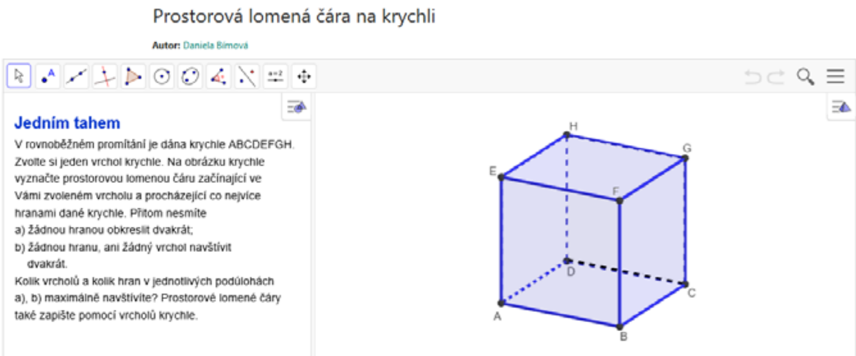
Na obr. 1 je představen náhled titulní strany GeoGebra knihy „Stereometrické rozcvičky_ student“.



Obr. 1. Náhled titulní strany GeoGebra knihy „Stereometrické rozcvičky_student“.

V současné době je při vkládání GeoGebra dynamických appletů na webové stránky GeoGebry velkou výhodou možnost zobrazení formátovacího panelu, panelu nástrojů, menu, vstupního pole, ikony pro resetování konstrukce a jiných dalších. Těchto možností bylo také využito při vkládání některých dynamických appletů stereometrických rozcviček do GeoGebra knihy „Stereometrické rozcvičky_student“. Studenti tak získají možnost řešit stereometrické rozcvičky přímo ve webovém prostředí bez nutnosti stažení appletů a následného užití programu GeoGebra. Nejsou-li studenti se sestrojeným řešením příslušných rozcviček ve webové aplikaci spokojeni, mohou využít ikony pro resetování konstrukce. Jejím stlačením se dynamický applet vrátí zpět do původního nastavení, v jakém byl do GeoGebra knihy vložen. Studenti tak mohou bez jakýchkoliv obav o provedení změny nastavení appletu zkoušet řešit stereometrické rozcvičky do té doby, dokud nebudou se svými řešeními spokojeni.

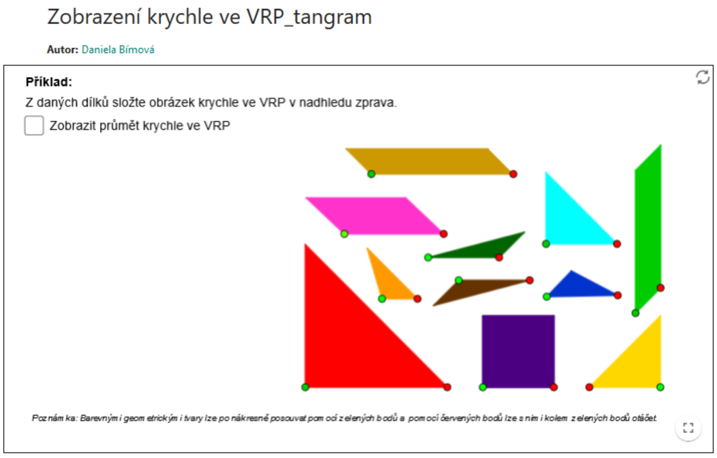
Na obr. 2 je znázorněn příklad dynamického appletu stereometrické rozcvičky s názvem „Prostorová lomená čára na krychli“ vyskytující se v GeoGebra knize „Stereometrické rozcvičky_student“. Z obr. 2 je zřejmé, že dynamický applet se skládá z vloženého formátovacího panelu a panelu nástrojů, ze 2D nákresny, v níž je uvedeno slovní zadání stereometrické rozcvičky, a ze 3D okna se zobrazeným grafickým zadáním rozcvičky.



Obr. 2. Zadání stereometrické rozcvičky „Prostorová lomená čára na krychli“ vložené v GeoGebra knize „Stereometrické rozcvičky_student“.

Další výhodou dynamických appletů vložených ve webovém rozhraní je, že studenti mohou stereometrické rozcvičky řešit ve 3D okně aplikace programu GeoGebra, tj. mohou si prostorovou scénu natočit pod takovým úhlem pohledu, který je pro ně samotné názorný. Tato skutečnost mnohým studentům pomůže s lepším viděním prostorové situace.

Některé stereometrické rozcvičky jsou stereometrické pouze svým obsahem. Jedním takovým příkladem je např. rozcvička s názvem „Zobrazení krychle ve VRP_tangram“. Na obr. 3 je zobrazeno zadání této rozcvičky. Dynamický applet této rozcvičky je zobrazen pouze ve 2D okně aplikace programu GeoGebra. Nejsou u něj vloženy ani formátovací panel, ani panel nástrojů, protože je k řešení studenti nepotřebují. Studenti mohou rozcvičku řešit pouze pomocí předpřipravených objektů a bodů s nimi spojených. Pohybem zelených bodů lze posouvat barevnými geometrickými tvary po nákresně a pohybem červených bodů je možné otáčet barevnými geometrickými tvary po 2D nákresně. Pokud je nalezení správného řešení pro studenty komplikované, mohou si studenti aktivováním zaškrtávacího tlačítka „Zobrazit průmět krychle ve VRP“ nechat ve 2D nákresně zobrazit průmět odpovídající krychle ve volném rovnoběžném promítání. Zobrazením průmětu krychle ve VRP se obtížnost úlohy snižuje.

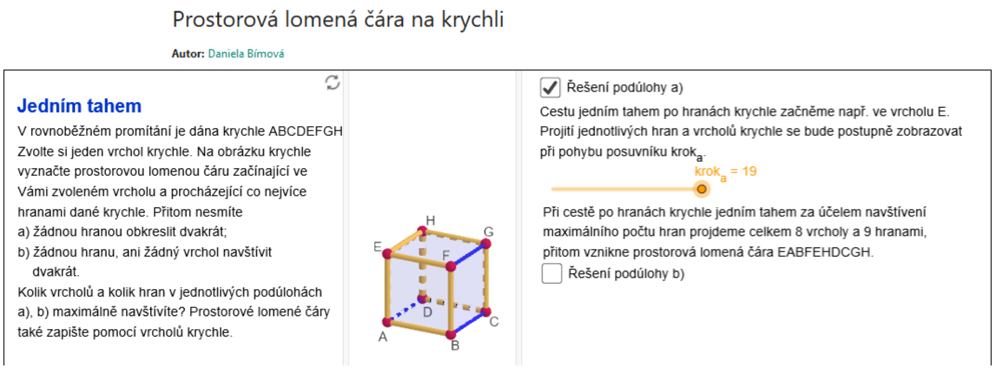


Obr. 3. Zadání stereometrické rozcvičky „Zobrazení krychle ve VRP_tangram“ vložené v GeoGebra knize „Stereometrické rozcvičky_student“.

1.2 GeoGebra kniha „Stereometrické rozcvičky_učitel“

GeoGebra kniha „Stereometrické rozcvičky_učitel“ je analogickou knihou ke GeoGebra knize „Stereometrické rozcvičky_student“. Rozdíl mezi oběma GeoGebra knihami je v tom, že dynamické applety stereometrických rozcviček v GeoGebra knize ve verzi pro učitele jsou rozšířeny o další 2D nákresnu. V této další 2D nákresně jsou buď sepsány slovní komentáře k řešení příslušné rozcvičky, nebo je v ní vložen dynamický nástroj programu GeoGebra – posuvník, s nímž jsou spojeny jednotlivé kroky řešení. Ty se v grafické podobě postupným pohybem posuvníku zobrazují ve 3D okně programu a ve slovním komentáři pak v téže 2D nákresně.

Na obr. 4 se nachází ukázka dynamického appletu stereometrické rozcvičky s názvem „Prostorová lomená čára na krychli“ ve verzi pro učitele.



Obr. 4. Ukázka zadání a řešení stereometrické rozcvičky „Prostorová lomená čára na krychli“ vložené v GeoGebra knize „Stereometrické rozcvičky_učitel“.

V jiných dynamických appletech GeoGebra knihy ve verzi pro učitele jsou užita tlačítka, která spouští či zastavují animace vybraných geometrických objektů nebo těles. Aktivováním tlačítka pro spuštění animace je možné zobrazení řešení rozcvičky v dynamické podobě. To je pro některé studenty názornější než pouhá ukázka statického řešení rozcvičky, viz obr. 5.

Obr. 5. Ukázka zadání a řešení stereometrické rozcvičky „Rozříznutí klínu sýru na 2 části “ vložené v GeoGebra knize „Stereometrické rozcvičky_učitel“.

Obě výše uvedené GeoGebra knihy vznikly jako výsledek společné práce vyučující z KMD FP TUL a studentky FP TUL, obou zapojených do projektu s názvem „Geometrické rozcvičky“, řešeného v rámci tzv. Studentské grantové soutěže vyhlášené TUL pro rok 2019. Třetí sestavená GeoGebra kniha s názvem „Stereometrické rozcvičky“ je na druhou stranu převážně dílem studentky zapojené do zmíněného projektu, vyučující geometrických předmětů z KMD FP TUL byly pouze poradkyněmi a supervizorkami této její GeoGebra knihy.

V několika dynamických appletech GeoGebra knihy „Stereometrické rozcvičky“ je třeba ještě doladit některé drobnosti, ale jako celek se tato GeoGebra kniha jeví jako zdařilá. Obsahuje zajímavé úlohy, které jsou převážně vlastními nápady studentky. Nyní ve stručnosti představíme i tuto GeoGebra knihu.

1.3 GeoGebra kniha „Stereometrické rozcvičky“

GeoGebra kniha „Stereometrické rozcvičky“, která je dostupná na webovém linku [7], obsahuje tři kapitoly. V každé z nich jsou vloženy čtyři dynamické applety různých stereometrických rozcviček na dané téma:

1) Pohledy na tělesa
   a) Procházka po krychli U
   b) Barevné plochy U
   c) Barevné těleso U
   d) Doplnění krychlového tělesa U

2) Sítě těles
   a) Kabel v síti krychle U
   b) Hrací kostka U
   c) Linie na krychli U
   d) Lomené čáry na krychli

3) Prostorové transformace
   a) Rotace hranolu

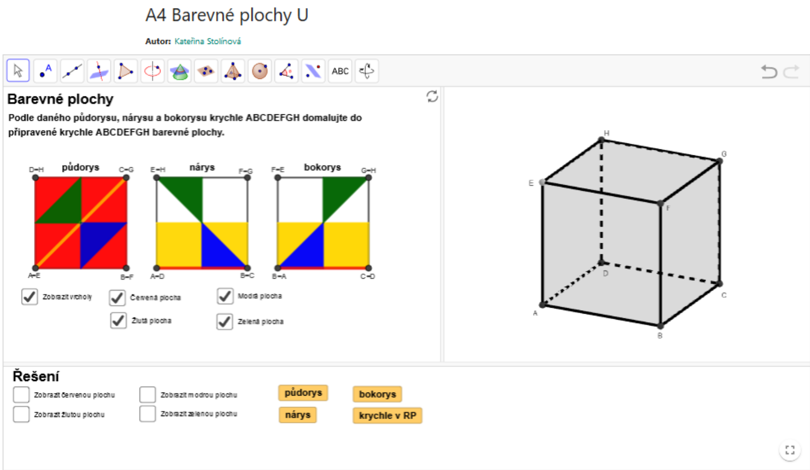
b) Středová souměrnost
c) Barevná krychle
d) Odvalování kvádru

Písmeno „U“ u názvů stereometrických rozcviček znamená, že jsou do GeoGebra knihy vloženy dynamické applety těchto rozcviček ve verzi pro učitele, tzn. tyto applety obsahují 2D nákresnu s řešením příslušné rozcvičky.

Na obr. 6 je zobrazen náhled čtyř stereometrických rozcviček vložených do kapitoly „Pohledy na tělesa“.

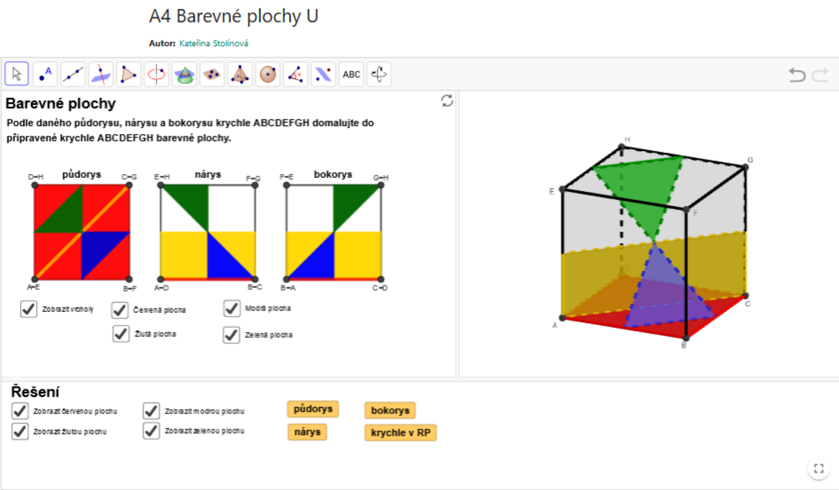
Obr. 6. Ukázka přehledu stereometrických rozcviček zařazených do kapitoly „Pohledy na tělesa“ v GeoGebra knize „Stereometrické rozcvičky“.

Jedním z vlastních námětů studentky je stereometrická rozcvička pojmenovaná „Barevné plochy“. Úkolem této rozcvičky je zobrazit do připravené krychle ve 3D okně aplikace programu GeoGebra barevné plochy takovým způsobem, aby současně odpovídaly zobrazenému půdorysu, nárysu a bokorysu. Zadání této rozcvičky je znázorněno na obr. 7.



Obr. 7. Ukázka zadání stereometrické rozcvičky „Barevné plochy U“ v GeoGebra knize „Stereometrické rozcvičky“.

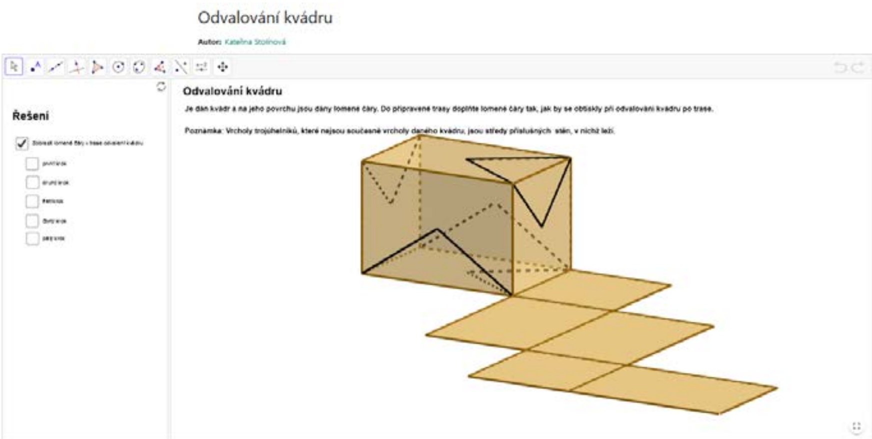
K nalezení správného řešení mohou studenti opět s výhodou užít vložených nástrojů webové aplikace programu GeoGebra a především také možnosti otáčení se scénou ve 3D okně. Některým studentům může zpočátku činit potíže skutečnost, že se některé plochy nachází uvnitř krychle a ne na jejím povrchu. Pokud se od této skutečnosti studenti oprostí, věříme, že správné řešení této rozcvičky brzy objeví. Správné řešení rozcvičky je ukázáno na obr. 8.



Obr. 8. Ukázka řešení stereometrické rozcvičky „Barevné plochy U“ v GeoGebra knize „Stereometrické rozcvičky“.

Pro ověření správnosti výsledného řešení jsou do 2D nákresny vložena také tlačítka, jejichž aktivováním se krychle ve 3D okně nastaví do příslušných pohledů dle názvů tlačítek. Pokud by se stalo, že by se krychle např. místo pohledu shora zobrazila z pohledu zespoda, pak stačí tlačítko „půdorys“ stisknout ještě jednou a krychle se nastaví do polohy shora. Analogicky to platí i pro další přednastavená tlačítka. Problém může vzniknout v nastavení krychle ve směru opačného vektoru, než který je pro dané tlačítko definován. Jedná se o chybu programu GeoGebra, která by měla být jeho autory odstraněna.

Na závěr ještě uveďme stereometrickou rozcvičku s názvem „Odvalování kvádru“ zařazenou v kapitole „Prostorové transformace“. Viz obr. 9.



Obr. 9. Ukázka zadání stereometrické rozcvičky „Odvalování kvádru“ vložené v GeoGebra knize „Stereometrické rozcvičky“.

Mezi běžné stereometrické rozcvičky lze zařadit např. úlohy na odvalování hrací kostky. Studentka tento typ rozcvičky upravila tak, že krychli pozměnila za kvádr a na jeho povrch zakreslila lomené čáry. Do předpřipravené trasy (sítě daného kvádru) nechala studenty zakreslovat příslušné lomené čáry. Pro nalezení správného řešení této rozcvičky je třeba, aby si studenti ve svých představách vybavovali jednotlivé polohy kvádru při jeho postupném odvalování, anebo aby si v představách složili síť kvádru a na základě těchto svých představ zobrazili do příslušných obrazců trasy (obdélníků a čtverců sítě) správné umístění lomených čar. Ve 2D nákresně dynamického appletu je vloženo mj. pět zaškrtávacích políček pro zobrazení správných jednotlivých lomených čar v příslušných obrazcích připravené trasy.

2 Zařazení stereometrických rozcviček v hodinách matematiky

Vytvořené stereometrické rozcvičky v podobě dynamických appletů ze všech tří výše uvedených GeoGebra knih byly zařazovány studentkou do hodin matematiky během její souvislé pedagogické praxe, kterou vykonávala ve třídách osmiletého a čtyřletého gymnázia v Lounech.

Ještě před zadáváním rozcviček v hodinách matematiky studentka otestovala úroveň geometrického myšlení a prostorové představivosti žáků nižšího gymnázia a studentů vyššího gymnázia pomocí první části srovnávacího testu vytvořeného speciálně za účelem zjišťování úrovně geometrického myšlení a prostorové představivosti žáků a studentů. Výsledky prvního testu byly u většiny žáků uspokojující, ale bylo z nich zřejmé, že vhodným trénováním by mohly být ještě lepší.

I přes počáteční technické potíže (ne ve všech třídách, ve kterých zpočátku probíhala výuka hodin matematiky vedená studentkou, byla umístěna potřebná technika – především chyběl dataprojektor) se studentce podařilo alespoň v některých hodinách stereometrické rozcvičky v podobě dynamických appletů vytvořených v programu GeoGebra zařazovat. Při aplikování vytvořených dynamických appletů stereometrických rozcviček v hodinách matematiky studentka postupně zjišťovala, jak by mohly být některé části appletů upraveny, aby lépe vyhovovaly potřebám studentů či učitele. V důsledku toho jsme dynamické applety příslušných stereometrických rozcviček průběžně vylepšovaly a upravovaly.

Soustavné trénování geometrického myšlení a prostorové představivosti studentů pomocí zařazování stereometrických rozcviček mohlo být jedním z důvodů, že výsledky týchž žáků a studentů ve druhé části srovnávacího testu byly již zdařilejší. Mnozí testovaní žáci a studenti dokázali ve druhé části testu správně řešit i obtížnostně náročnější úlohy, než které chybně řešili v méně obtížné podobě v první části srovnávacího testu. Úlohy obou částí srovnávacího testu i podrobnější výsledky obou testů představíme v některém z našich dalších příspěvků.

Stereometrické rozcvičky jsme zadávali také v průběhu září 2019 během tzv. přípravného kurzu určeného pro studenty 1. ročníku bakalářského studia Fakulty strojní Technické univerzity v Liberci a též v říjnu a v listopadu 2019 při výuce předmětu Geometrie 2 určeného pro studenty 3. ročníku bakalářského studia studijního oboru „Matematika se zaměřím na vzdělávání“ Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické TUL. Lze konstatovat, že nalezení správného řešení některých stereometrických rozcviček nebylo jednoduché ani pro vysokoškolské studenty technického a přírodovědného zaměření. Nejvíce chybovali u úloh zaměřených na pohledy na tělesa.

Závěr

Lze shrnout, že v článku byly stručně představeny tři GeoGebra knihy s názvy „Stereometrické rozcvičky_učitel“, „Stereometrické rozcvičky_student“ a „Stereometrické rozcvičky“. Všechny tři GeoGebra knihy jsou rozčleněny do několika kapitol, které odpovídají tematickým zaměřením stereometrických rozcviček. Přitom GeoGebra knihy „Stereometrické rozcvičky_ učitel“ a „Stereometrické rozcvičky_student“ jsou analogické, tj. obsahují shodné kapitoly i shodné stereometrické rozcvičky. Rozdíl mezi nimi je pouze v tom, že v dynamických appletech stereometrických rozcviček GeoGebra knihy ve verzi pro studenty jsou obsaženy pouze texty a případně i odpovídající grafická zadání rozcviček, oproti tomu v dynamických appletech stereometrických rozcviček GeoGebra knihy ve verzi pro učitele je navíc otevřeno další 2D okno, ve kterém je zobrazeno řešení příslušné rozcvičky ať už pomocí slovního komentáře či nějakým jiným způsobem (jednotlivé kroky řešení jsou propojené s posuvníkem, řešení se zobrazuje aktivováním zaškrtávacích políček či přednastavených tlačítek).

Výhodou umístění dynamických appletů stereometrických rozcviček ve webovém prostředí aplikace programu GeoGebra je možnost jejich řešení kdekoliv v dostupnosti internetu. A protože webové prostředí programu GeoGebra v současné době dovoluje při vkládání appletů také zobrazování formátovacího panelu, panelu nástrojů, menu, vstupního pole, ikony pro resetování konstrukce a jiných dalších nástrojů programu GeoGebra, mohou studenti stereometrické rozcvičky řešit přímo ve webovém prostředí. Existuje zde též možnost resetu konstrukce (není-li řešení provedeno správně), aniž by se původně vložený dynamický applet jakkoliv přenastavil.

Všechny tři výše uvedené GeoGebra knihy jsou tedy dostupné na internetu. Nejsou však zatím veřejně přístupné, lze je otevřít pouze s použitím odkazů [5], [6] a [7]. Po dalším plánovaném pilotování a po provedení následných případných oprav počítáme s jejich zveřejněním.

Odkazy na vytvořené GeoGebra knihy „Stereometrické rozcvičky“ jsme již poskytly několika středoškolským, ale i vysokoškolským kolegům. Jejich ohlasy byly dosud velmi pozitivní, s nadšením nám prozatím všichni oznamovali, že budou rádi zařazovat stereometrické rozcvičky v podobě dynamických appletů ve svých hodinách matematiky. Toto jejich nadšení nás motivuje do další práce, tedy do vytváření nových dynamických appletů pro další stereometrické rozcvičky a tedy do následného doplňování a rozšiřování již vytvořených GeoGebra knih „Stereometrické rozcvičky“.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za podpory projektu Studentské grantové soutěže vyhlášené Technickou univerzitou v Liberci pro rok 2019, tj. za podpory projektu SGS č. 21263.

Literatura:

[1] Pietrasinski, Z.: *Tvorive myslenie*, Bratislava, Obzor, 1972.

[2] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990.

[3] Boroš, J.: *Psychologie pro mladé*, Praha, Mladá fronta 1986.

[4] Čáp, J.: *Psychologie výchovy a vyučování*, Praha, Karolinum, 1993.

[5] URL, https://www.geogebra.org/m/k6cf8ssz

[6] URL, https://www.geogebra.org/m/k5vymdym

[7] URL, https://www.geogebra.org/m/njqabzdm3

[8] BÍMOVÁ, D. – PIRKLOVÁ, P. – JEŘÁBKOVÁ, M. – STOLÍNOVÁ, K.: *Stereometric Warm-ups for Developing Spatial Imagination.* In: Proceedings of the 45th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE´19). Book Series: AIP Conference Proceedings. Volume number: 2172. Article Number: 040001, pp. 040001-1 – 040001-9. USA, AIP Publishing, American Institute of Physics, 2019. ISBN: 978-0-7354-1919-3. Dostupné z: https://doi.org/10.1063/1.5133511

Daniela Bímová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 01 Liberec 1
e-mail: daniela.bimova@tul.cz

Petra Pirklová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 01 Liberec 1
e-mail: petra.pirklova@tul.cz

Kateřina Stolínová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 01 Liberec 1
e-mail: katerina.stolinova@tul.cz

DŮKAZ EKVIVALENCE DVOU DEFINIC ELIPSY

Jiří Blažek

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta

Abstrakt: Dynamická geometrie otevřela zcela nový přístup k řešení geometrických problémů. Díky jejím rysům je možné experimentovat a získat tak fakta, která významně pomohou při řešení problému. Tento článek je případovou studií, v níž autor, vybaven znalostmi softwaru, synteticky dokazuje ekvivalenci dvou definic elipsy – jako množiny bodů s konstantním součtem vzdáleností od ohnisek a jako množiny bodů s konstantním poměrem vzdáleností od ohniska a řídící přímky.

Klíčová slova: DGS, problem solving, elipsa, ekvivalence definic, řídící kružnice, řídící přímka

Proof of equivalence of two ellipse definitions

Abstract: Dynamic geometry software opened completely new approach to processing and solving geometrical problems. Due to its features it is possible to experiment and attain facts, significantly facilitating solution processes. This article presents a case study, in which author uses the means of dynamic geometry to prove the equivalence of two ellipse definitions – as a locus of points having constant sum of distances from two fixed points, and as a locus of points having constant ratio of distances from a fixed point and directrix line.

Key words: DGS, problem solving, ellipse, equivalence of two definitions, directrix circle, directrix line

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2019_Blazek.pdf

GEOGEBRA NÁSTROJE PRO VÝUKU MONGEOVA PROMÍTÁNÍ

Věra Ferdiánová, Jakub Poruba

Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita

Abstrakt: GeoGebra patří mezi software široce užívaný v rámci vzdělávacího procesu. Její výhodou možnost propojení dvourozměrného a trojrozměrného prostoru, čímž se nabízí možnost jejího využití při výuce Mongeova promítání, jehož cílem je převést trojrozměrný objekt do roviny. GeoGebra však v základu nemá implementovány základní konstrukční nástroje a prvky, které se v Mongeově promítání využívají. Nicméně je rámci GeoGebra možné vytvořit vlastní konstrukční nástroje. Příspěvek proto představuje tvorbu vybraných nástrojů. .

Klíčová slova: GeoGebra, Mongeovo promítání, tvorba nástrojů

GeoGebra tools for teaching Monge Projection

Abstract: GeoGebra is a software widely used in educational process. Its advantage is an option of connecting two and three-dimensional space, which is beneficial for using this software in teaching Monge projection, which aim is to transfer a three-dimensional object into plane. However, basic tools and elements used in Monge projection are not implemented in GeoGebra in its core. But GeoGebra offers an option of creating own tools. The contribution thus introduces creation of selected tools.

Key words: GeoGebra, Monge projection, creation of tools

Úvod

Mongeovo promítání představuje jednu z prvních složitějších zobrazovacích metod, s nimiž se se studenti středních a vysokých škol v rámci studia setkávají buď v rámci povinných, či povinně volitelných předmětů. Převod trojrozměrného objektu do podoby rovinného rysu jim však v mnoha případech působí problémy a studenti si často neuvědomují vazby, které při tomto převodu platí. Důvodem může být skutečnost, že u studentů byl zaznamenán pokles schopnosti prostorové představivosti, což je podloženo např. výzkumem prof. Molnára, který se prostorou představivostí u studentů dlouhodobě zabývá.[2]

Při výuce Mongeova promítání stále převladá standardní podoba výuky v podobě konstrukce rysu na tabuli. V současném digitálním světě však existuje mnoho grafických software a editorů, které je možné využít i v rámci výuky Mongeova promítání. V současné době nejrozšířenějším software je GeoGebra, která našla nezastupitelnou pozici napříč všemi druhy a typy škol nejen v celé Evropě, ale například také v USA. V rámci výuky zobrazovacích metod však existuje také silná česká komunita, která se tvorbě materiálů věnuje - např. Roman Hašek z Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, Daniela Bímová a Petra Pirklová z Technické univerzity v Liberci, či Jana Volná z Vysoké školy báňské - Technické univerzity v Ostravě. Ukázku jejich tvorby lze nalézt přímo na stránkách geogebra.org. [4] V základu se však jedná o hotové konstrukce, nikoliv univerzální nástroje, které by mohly ulehčit konstrukci. Proto jsme se zaměřili na tvorbu nástrojů, které by mohly ulehčit práci zejména vyučujícím v rámci příprav, čímž získají více času pro práci se studenty. Část tvorby nástrojů byla již prezentována na konferenci APLIMAT 2017 [1], v tomto případě jsme je však rozšířili a jejich strukturu upravili tak, aby měly nástroje širší využití.

GeoGebra jako pomůcka do výuky deskriptivní geometrie

GeoGebra v současné době disponuje mnoha nástroji, které ulehčují geometrické konstrukce, v základu však nemá implementovány základní konstrukční nástroje a prvky, které se v Mongeově promítání využívají. Nicméně je rámci GeoGebra možné vytvořit vlastní konstrukční nástroje, které jsou založeny na reálných konstrukcích a které tak propojení trojrozměrného a dvourozměrného prostoru umožňují. Tyto nástroje je pak také možné exportovat a importovat napříč tímto softwarem. Nevýhodou však je to, že při použití nástroje dochází k defaultnímu nastavení popisu bodů, čímž není dodržován standart pro popis pomocí indexace užívané jak v půdorysně, tak v nárysně. [3]

Při samotné tvorbě nástroje je třeba také vzít v potaz skutečnost, že vynášíme-li požadované body (resp. ostatní konstrukční prvky) od základnice, je zvykem pod základnici vynášet kladné y-ové souřadnice a záporné z-ové souřadnice, nad základnici kladné z-ové souřadnice a záporné y-ové. Použijeme-li však 2D nákresnu v GeoGebře, musíme si uvědomit, že je zde defaultně nastaveno zobrazování záporných y-ových hodnot pod osu x (tedy základnici), tudíž je nutno pro zadávání y-ových souřadnic zadávat hodnoty s inverzním znaménkem. Navíc musíme myslet také na to, že z-ové souřadnice zadáváme do 2D nákresny na pozici souřadnice y-ové.

Tvorbá nástroje probíhá tak, že nejdříve musíme mít vytvořenou samotnou konstrukci, která by měla být jednoduchá a co nejvíce univerzální. Dále musíme vědět, které prvky budou vstupními a které výstupními. V posledním kroku vybereme v menu GeoGebry položku *nástroje* a *vytvořit nový nástroj.* Protože v našem případě vytváříme rovinný rys, musíme vytvářet nástroj v rámci 3D nákresny, neboť vycházíme ze souřadnic trojrozměrného prostoru. Detailní popis postupu při tvorbě nástroje jsme publikovali zde [1].

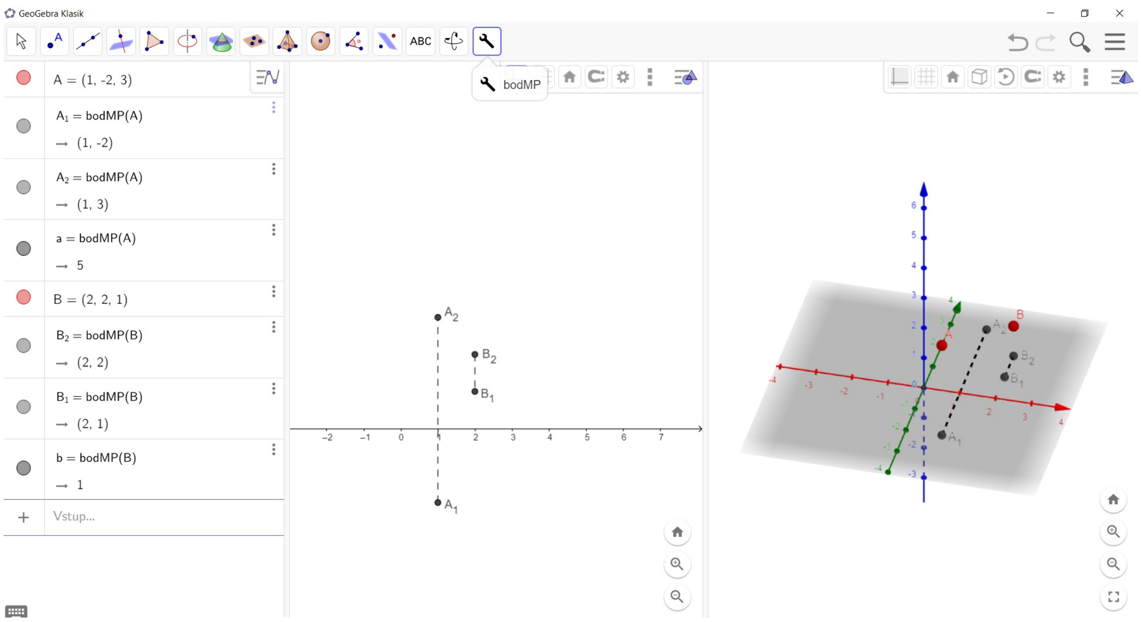
Nástroj pro zobrazení průmětů bodů

Nástroj pro zobrazení bodů patří mezi základní nástroj, který se využívá také v dalších konstrukcích. Jeho tvorba je popsána následujícím algoritmem, ve kterém potřebujeme vstupní bod, průměty daného bodu a ordinálu.

Vstup: Bod A v grafickém náhledu 3D
Výstup: Příslušné nárysné a půdorysné obrazy, ordinála
Konstrukce:

```
A_1=(x(A),-y(A))

A_2=(x(A),z(A))

a=Usecka[A_1,A_2]
```

V nastavení je potom samozřejmě možné změnit vzhled ordinály a bodů. Na následujícím obrázku je nástroj pro zobrazení bodů v Mongeově promítání, konkrétně ukázka zobrazení bodů $A[1; , 2; 3]$, $B[2, -2, 1]$. Jak bylo popsáno výše, y-ové souřadnice zadáváme inverzně.



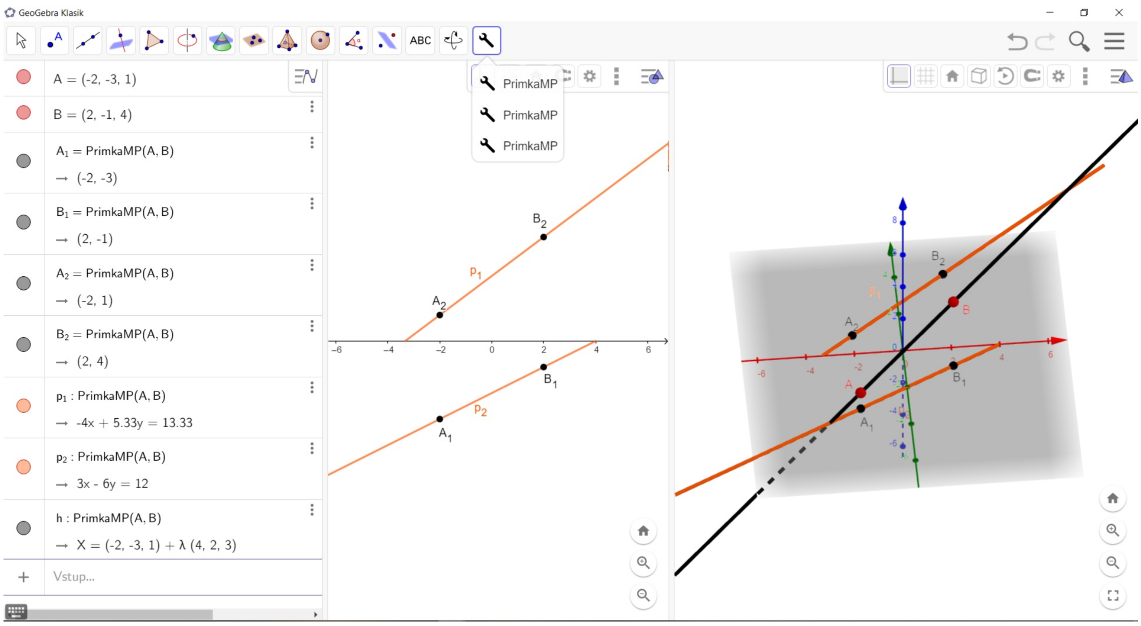
Obrázek 1: Nástroj pro zobrazení bodů v Mongeově promítání

Nástroj pro zobrazení přímky

Nástroj pro zobrazení přímky vychází z nástroje pro průmět bodů, neboť přímku obvykle zadáváme pomocí dvou bodů. Pro zobrazení jejího půdorysného a nárysného obrazu však tento nástroj musíme rozšířit o další konstrukční prvky, v tomto případě o přímky a polopřímky. Nástroj pro zobrazení přímky také funguje univerzálně, nicméně v této podobě je vytvořen zejména pro situace, kdy je přímka zadána pomocí bodů v I. kvadrantu, neboť zejm. pro tento případ je garantováno správné vykreslení „skutečně viditelných“ půdorysných a nárysných obrazů přímky.

Vstup: Body A, B v grafickém náhledu 3D
Výstup: Průměty bodů A, B, přímka AB, průměty p_1, p_2 přímky p.
Konstrukce: První část příkazů lze nahradit nástrojem pro bod.

```
A_1=(x(A),-y(A))

A_2=(x(A),z(A))

B_1=(x(B),-y(B))

B_2=(x(B),z(B))

p=primka[A, B]

p_1=Poloprimka((x(Prusecik(Primka(A,B),Rovina(OsaX,OsaZ))),0),A_1)

p_1=Poloprimka((x(Prusecik(Primka(A,B),Rovina(OsaX,OsaY))),0),B_2)
```



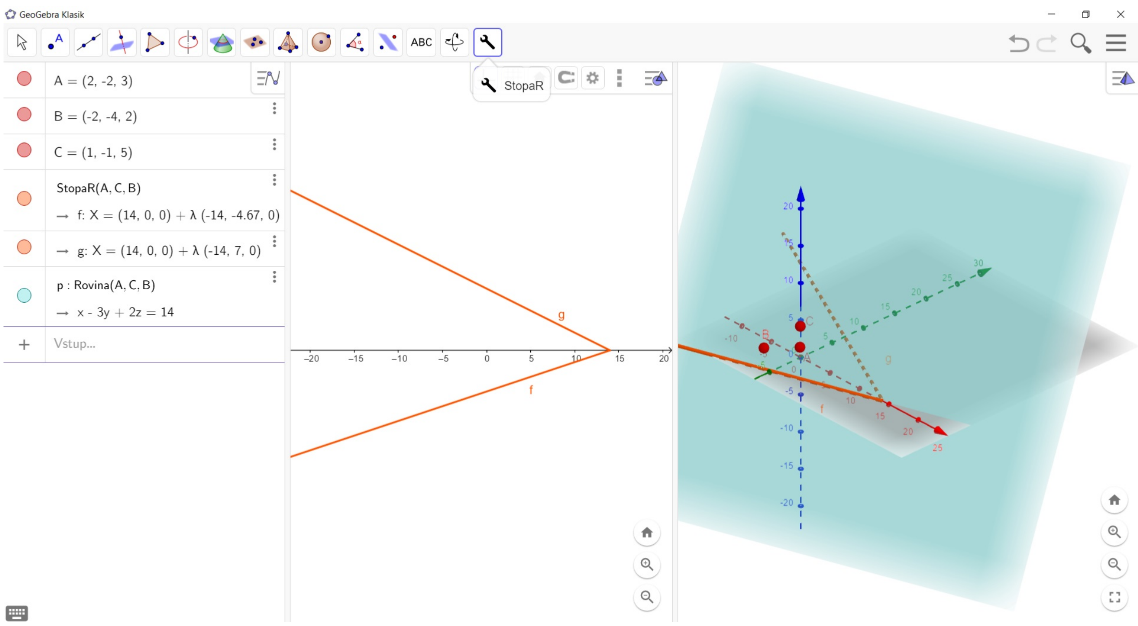
Obrázek 2: Nástroj pro zobrazení přímky v Mongeově promítání

Nástroj pro zobrazení stopy roviny

V Mongeově promítání často zadáváme rovinu pomocí trojice čísel, které znamenají, že rovina je zadána třemi body A,B,C, které leží na souřadnicových osách a mají tyto souřadnice $A[a;0;0]$, $B[0;b;0]$, $C[0;0;c]$. Tento nástroj však umožňuje zadat rovinu pomocí tří libovolných bodů roviny. V našem případě jsme se omezili opět na I. kvadrant, neboť zde lze opět garantovat správné vykreslení stopy roviny, pro dobrou názornost také požadujeme, aby bod s nejvyšší hodnotou z-ové souřadnice měl nejnižší hodnotu y-ové souřadnice (a analogicky, aby bod s nejvetší hodnotou y-ové souřadnice měl nejnižší hodnotu z-ové souřadnice). Stopy roviny jsme potom definovali jako průsečnice roviny ρ s příslušnými souřadnicovými rovinami.

Vstup: Body A, B, C v grafickém náhledu 3D
Výstup: Rovina $\rho = p$, stopy příslušné roviny $p_1^\rho = f$, $n_2^\rho = g$.
Konstrukce:

```
p=Rovina(A,B,C)

f=Polopримka(Prusecik(p ,OsaX),Prusecik(p ,OsaY))

g=Polopriмka(Prusecik(p,OsaX),(0,z(Prusecik(p,OsaZ))))
```

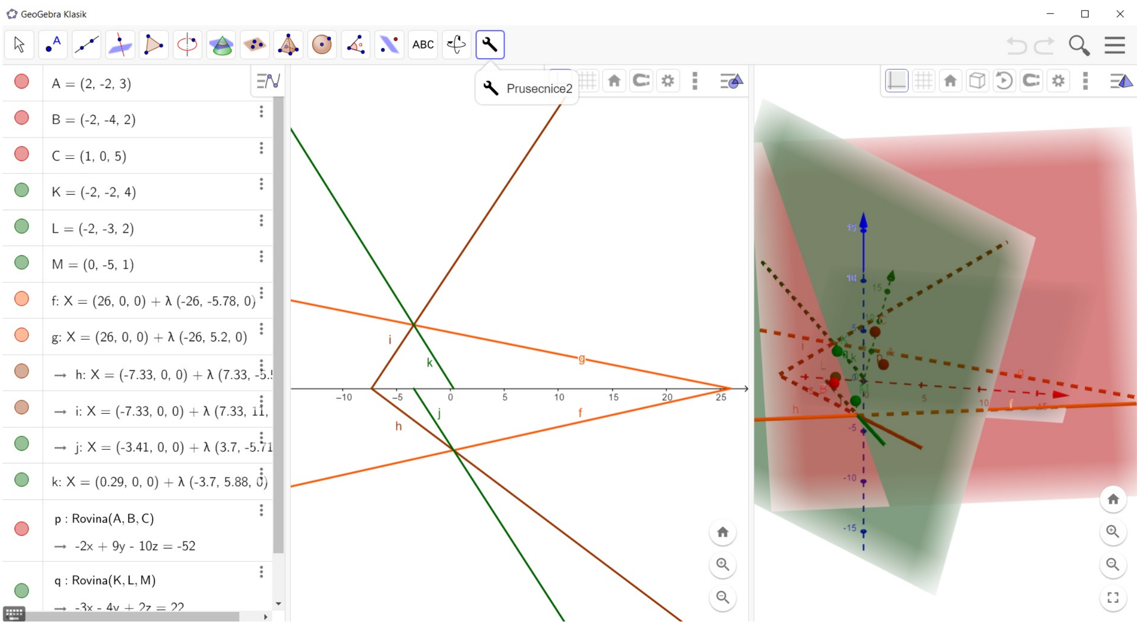


Obrázek 3: Nástroj pro zobrazení stopy roviny v Mongeově promítání zadané pomocí tří bodů

Nástroj pro zobrazení průsečnice rovin

Nástroj pro zobrazení průsečnice dvou rovin vychází z nástroje pro zobrazení stopy roviny, a tudíž ze zadání šesti konkrétních bodů. Při používání nástroje však nelze body vybírat náhodně, neboť nástroj je nastaven tak, že první tři body tvoří jednu rovinu, další tři body druhou rovinu. Nástroj je vytvořen tak, aby byl funkční opět v I. kvadrantu a fungoval pro roviny, které mají obdobnou polohu jako ty, jež jsou znázorněny níže na obrázku.

Vstup: Body A, B, C, K, L, M v grafickém náhledu 3D
Výstup: Příslušné roviny, stopy rovin a průměty průsečnice
Konstrukce:



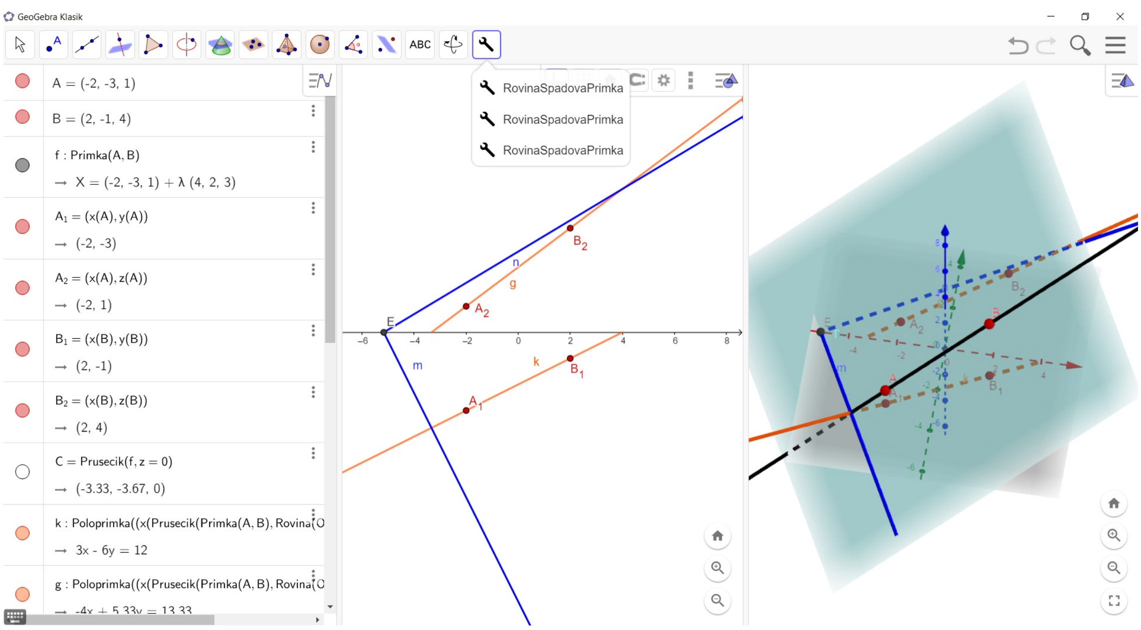
Obrázek 4: Nástroj pro zobrazení průsečnice dvou rovin

```
p=Rovina(A,B,C)

q=Rovina(K,L,M)

f=Poloprimka(Prusecik(p,OsaX),Prusecik(p,OsaY))

g=Poloprimka(Prusecik(p,OsaX),(0,z(Prusecik(p,OsaZ))))

h=Poloprimka(Prusecik(q,OsaX),Prusecik(q,OsaY))

i=Poloprimka(Prusecik(q,OsaX),(0,z(Prusecik(q,OsaZ))))

j=Poloprimka(Prusecik(Kolmice(Prusecik(g,i),OsaX,RovinaxOy),OsaX),
Prusecik(f,h))

k=Poloprimka(Prusecik(OsaX,Kolmice(Prusecik(f,h),OsaX,RovinaxOy)),
Prusecik(g,i))
```

Nástroj pro zobrazení roviny vycházející ze spádové přímky roviny

Nástroj pro spádovou přímku roviny (v tomto případě pro spádovou přímku I. osnovy) funguje tak, že máme-li zadánu přímku, jsme pomocí ní schopni nalézt příslušnou rovinu. V základu tedy vychází z nástroje pro zobrazení průmětu přímky, kterou máme zadánu dvěma body.

Vstup: Body A, B přímky
Výstup: Rovina, k níž je přímka spádovou přímkou, stopy dané roviny
Konstrukce: Opět je možno využít nástroj pro zobrazení průmětu přímky. V následujícím popisu konstrukce jsou zapsány i prvky, které v konečném půdorysu a nárysu tohoto nástroje zobrazeny nejsou, ale ke konstrukci jsou důležité.



Obrázek 5: Nástroj pro zobrazení roviny na základě spádové přímky

```
A_1=(x(A),-y(A))

A_2=(x(A),z(A))

B_1=(x(B),-y(B))

B_2=(x(B),z(B))

f=primka[A, B]

p=Rovina(E,D,B)
```

```
k=Polopriamka((x(Prusecik(Primka(A,B),Rovina(OsaX,OsaZ))),0),A_{1})

g=Polopriamka((x(Prusecik(Primka(A,B),Rovina(OsaX,OsaY))),0),B_{2})

l=Polopriamka(Prusecik(OsaX,g),Prusecik(Primka(A,B),Rovina(OsaX,OsaY)

D=Prusecik(k,l)

E=Prusecik(Kolmice(D,k,RovinxOy),OsaX)

m=Polopriamka(E,D)

F=Prusecik(Kolmice(Prusecik(OsaX,k),OsaX),g)

n=Polopriamka(E,F)
```

Závěr

Užití (vlastních) základních nástrojů ve výuce Mongeova promítání může být téměř ve všech základních konstrukcích. Na základě zkušeností z vlastních hodin konstrukční geometrie se používání těchto nástrojů osvědčilo a vedlo k urychlení procesu výuky, díky ověření ve výuce jsme bylo také schopni prvotní sadu nástrojů inovovat a rozšířit, tak aby byly uživatelsky více přívětivější. Navíc u studentů, kteří s porozuměním Mongeově promítání nemají potíže, ale samotné vykreslení základních prvků jim trvá déle, bylo využívání těchto nástrojů přínosné, neboť tak získali více prostoru pro řešení dalších konstrukčních úloh. Celkově bylo tedy používání těchto nástrojů hodnoceno kladně jak ze strany uživatelů, tak ze strany studentů.

Poděkování

Příspěvek byl podpořen z projektu SGS01/PřF/2018-2019 Numbers, Geometry and Physics.

Literatura:

[1] FERDIÁNOVÁ, V., PORUBA, J.: *New Tools for Monge Projection in GeoGebra.* Proceedings, 16th Conference of Applied Mathematics Aplimat 2017. 1st edition. Bratislava: Slovak university of technology in Bratislava, 2017. p. 527-534. ISBN 978-80-227-4650-2

[2] MOLNÁR, J., TLÁSKAL, J.: *Prostorová představivost nejen v matematice.* Linguistica [online], 2012. [quoted 20. 11. 2019]. ISSN 1801-533 http://www.phil.muni.cz/linguistica/art/molnar-tlaskal/mot-001.pdf

[3] *GeoGebra Classic Manual.* GeoGebra. [online]. [cit. 1. 11. 2019]. Dostupné z: https://wiki.geogebra.org/en/Manual

[4] Geogebra. [online]. [cit. 1. 11. 2019]. Dostupné z: https://www.geogebra.org.

Mgr. Věra Ferdiánová, Ph.D.
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta,
Ostravská univerzita
30. dubna 22, 701 03 Ostrava
e-mail: vera.ferdianova@osu.cz

Mgr. Jakub Poruba
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta,
Ostravská univerzita
30. dubna 22, 701 03 Ostrava
e-mail: jakub.poruba@osu.cz

MATEMATICKOU CESTOU K TECHNICE – MECHANICKÉ PŘEVODY JAKO INSPIRACE PRO VÝUKU MATEMATIKY

Jan Fiala

Gymnázium V. Nováka Jindřichův Hradec

Abstrakt: Článek je příspěvkem do oblasti didaktiky matematiky. Jeho cílem je pojednat o tématu mechanických převodů jako o vhodném zdroji matematických úloh pro výuku na základní a střední škole. Příspěvek shrnuje zkušenosti s uchopením tohoto tématu a chce učitele dále motivovat v hledání vhodných aplikací různých části matematického učiva při řešení úloh inspirovaných mechanickými převody a pro vytváření matematických modelů reálných s nimi spojených jevů. V příspěvku ukážeme, jak lze k řešení konkrétních úloh využít program GeoGebra.

Klíčová slova: Matematika, mechanika, mechanický stroj, mechanický převod, převod ozubenými koly, řemenový převod, řetězový převod.

By Mathematical Way to Technic - Mechanical Transmissions as a Motivation for Mathematical Teaching

Abstract: The article contributes to the field of Didactics of Mathematics. Its aim is to deal with the topic of mechanical transmissions as a right source of mathematical tasks for Mathematics teaching in the elementary and secondary schools. The contribution summarises experience from taking this topic and wants to further motivate the teachers to search for right applications of different parts of mathematical curriculum at solving tasks inspired by mechanical transmissions and to build mathematical models of real phemomena connected with them. We show in the contribution how it is possible to use the application GeoGebra to solving concrete tasks.

Key words: Mathematics, Mechanics, mechanical machine, mechanical power, gear, belt transmission, chain drive.

Úvod

Současná výuka matematiky by měla reagovat na výzvy a požadavky vyplývající ze závěrů výzkumných šetření (např. *Zpráva o rozvoji matematické gramotnosti...*, [1]), podle kterých na školách (zvláště na středních školách) převažuje spíše průměrná úroveň matematické gramotnosti, přetrvává malý zájem žáků o matematiku, jejich nízká motivace k učení se matematice, převaha teoreticky zaměřené výuky nad praktickými aplikacemi, předimenzovanost učebních obsahů, matematické znalosti z jednotlivých partií se využívají jen separovaně, nikoliv v kombinaci při řešení komplexnějších úloh aj. Přitom podle téže studie se jako klíčová jeví vyšší korelace mezi zájmem žáků o matematiku a jejich úspěšností v matematice. Zdá se tedy, že získat žáky pro dané matematické učivo je prvořadým předpokladem pro nabytí cílových matematických kompetencí.
Článkem se snažíme přispět k nalézání vhodných témat z běžné reality žáků (zde jsou to mechanické převody) pro podnícení jejich zájmu o řešení matematických problémových úloh. Učitelům nabízíme přehled základních poznatků k tématu mechanických převodů včetně jejich fyzikálně-technických vlastností, které se staly základem pro nové matematické úlohy. V textu pojednáváme o několika konkrétních úlohách inspirovaných technickou praxí a ukazujeme, jak k řešení některých z nich (zvláště těch komplikovanějších) posloužil program GeoGebra. Téma mechanických převodů – čerpající z oblasti techniky – je vhodným zdrojem zajímavých úloh pro žáky i učitele, kteří si jimi mohou zpestřit svou výuku. Vhodnost i užitečnost zařazení těchto úloh do výuky podtrhují např. výsledky dotazníkového šetření realizovaného v projektu MatemaTech (viz [2]), z nichž vyplývá, že „žáci o důležitosti matematiky [sice] vědí, ovšem nevědí zcela přesně kdy a jak ji použít. Je tudíž nutné učit matematiku na konkrétních příkladech z technické a přírodovědné praxe a také umožnit žákům si tyto znalosti ověřit v praxi."

1 Mechanické převody

Mechanické převody jsou předmětem studia fyzikálního oboru mechanika, která se zabývá studiem především mechanického pohybu, tj. přemísťováním těles v prostoru a čase, a případně také změnami velikostí a tvarů těles. Mechanika je jeden z nejstarších oborů fyziky a již od počátku byla úzce napojena na techniku, např. při stavbě mechanických strojů. K nejčastěji používaným veličinám v mechanice patří poloha, rychlost, zrychlení, síla, energie a hybnost.
Vzhledem k potřebě jednoduchosti řešených matematických úloh v prostředí střední školy se v úvahách omezíme na kinematiku tuhého tělesa, pohyb tedy budeme zkoumat pouze z pohledu geometrie a času. Používat přitom budeme jen principy a postupy tzv. klasické, tedy Newtonovy mechaniky.

1.1 Mechanické převody v terminologickém systému mechaniky

Mechanickým strojem rozumíme zařízení, které přenáší pohyby a síly z jedné jeho části na druhou (např. ozubená kola) a mohou měnit jejich rychlost (např. otáčení či posuvu),

velikost, směr nebo smysl otáčení.
K mechanickým strojům patří především tzv. jednoduché stroje (páka, kladka, kolo na hřídeli, nakloněná rovina aj.), stroje složené z jednodušších (kladkostroje, v jedné z úloh v kapitole 2 se zabýváme tzv. diferenciálním kladkostrojem), hydraulická zařízení (využitá např. při konstrukci brzd v autě nebo v hydraulickém lisu) a pneumatická zařízení (např. potrubní pošta, pneumatické kladivo aj.) a mechanické převody, na které se dále zaměříme. Za mechanický převod zde považujeme součást mechanického stroje, která přenáší sílu mezi jeho pohyblivými částmi. Rozlišujeme tedy převodovou část hnací a část hnanou. Obě části konají nejčastěji otáčivý pohyb, jde tedy většinou o tělesa ve tvaru kol.[1] Kolo roztáčené vnější silou se nazývá hnací kolo, kolo, které je roztáčeno hnacím kolem, se nazývá hnané kolo. Kola nemají společnou osu otáčení.

1.2 Druhy mechanických převodů a historické i současné příklady jejich využití jako inspirace pro výuku matematiky

V následujícím přehledu uvádíme pouze základní druhy mechanických převodů, rovněž výčet možných využití není úplný. Mechanické převody lze rozlišit podle konstrukce na:

a) třecí převody – kola s hladkým povrchem se přímo dotýkají a síla mezi nimi se přenáší díky tření, jsou výrobně jednoduché, ale funkčně nespolehlivé kvůli možnému prokluznutí řemenu, tzv. převodový poměr je stálý, užívají se např. v třecích lisech[2], na hrnčířském kruhu, u benzinových motorek a jízdních kol, v různých kontrolních přístrojích aj.,[3]

b) převody ozubenými koly (obrázek 1) – nejčastěji používaný mechanický kontaktní převod bez prokluzu, skládá se ze dvou kol, která společně tvoří soukolí, menší z obou kol se zpravidla nazývá pastorek, rotační pohyb se přenáší mezi hnacím a hnaným kolem boky zubů ozubených kol, převodový poměr je stálý, převody ozubenými koly mají vysokou účinnost, spolehlivost a životnost, nevýhodami jsou vysoká hlučnost, netlumení rázů, konstrukční a výrobní složitost, drahá výroba, nutnost mazání (zvláště pro vyšší rychlosti), jsou vhodné jen pro malé osové vzdálenosti hřídelí, uplatní se např. v hodinářských strojcích a v převodovkách aut aj.,

c) řemenové převody – kola (tzv. řemenice) jsou propojena řemenem, který kola obepíná, využívají se řemeny různého druhu: plochý, klínový (v průřezu jde o lichoběžník), ozubený, lanový (průřezem je kruh) (obrázek 2) aj., vyrobené jsou často z různých

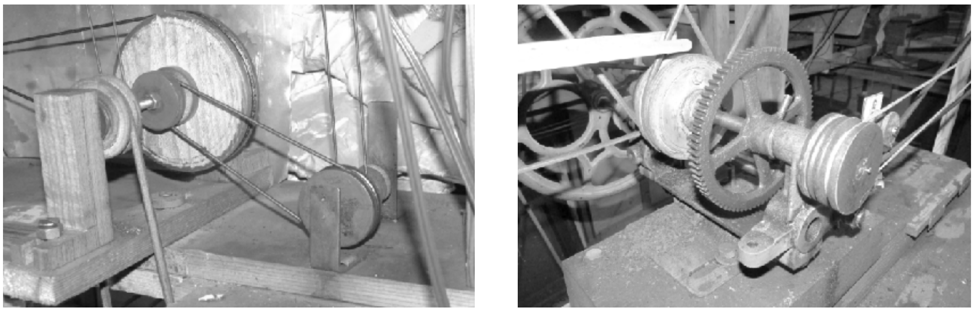
[1] Nemusí vždy jít nutně o klasická ozubená kola. Existují také převody, u nichž jsou kola v řezu ve tvaru elipsy se zuby, jde o tzv. eliptické ozubení.

[2] Třecí lis je tvářecí zařízení ze skupiny vřetenových lisů, u nichž je tzv. beran poháněn šroubovým vřetenem pomocí převodu třecími kotouči. Třecí lis má hnací hřídel s vodorovnou osou a třecími kotouči, které střídavě pohánějí setrvačník na šroubovém vřeteni. Podle směru otáčení dochází k pohybu berana dolů nebo nahoru.

[3] Převodů ozubenými koly existuje velké množství druhů, např. podle vzájemné polohy os spoluzabírajících kol rozlišíme převody s rovnoběžnými osami (uspořádání zubů kol je pak přímé, šikmé nebo šípové), převody s různoběžnými osami (kuželová soukolí) a převody s mimoběžnými osami (převody šroubové a šnekové, viz dále).

Obrázek 1: Čelní převod ozubenými koly. (Zdroj obrázku: [3])

materiálů: kůže, guma aj., síla se přenáší třením mezi řemenem a koly, řemen může být i zkřížený, řemenové převody byly dříve běžně užívány v továrnách pro spojení hřídelí strojů, dodnes jsou nenahraditelné např. při přenosu rotačního pohybu z turbíny na alternátor (obrázek 3),



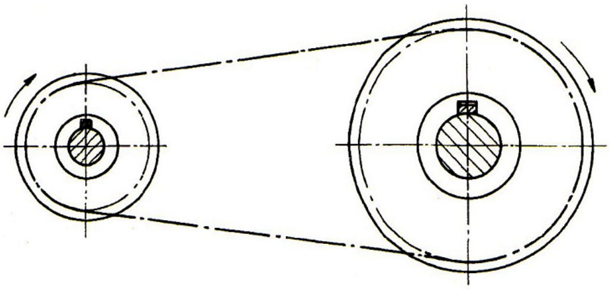
Obrázek 2: Příklad užití kombinace různých druhů převodů v technické části tzv. Krýzových jesliček, největšího pohyblivého mechanického betlému na světě v Muzeu Jindřichohradecka v Jindřichově Hradci. (Zdroj obrázku: autor příspěvku)

d) řetězové převody – dvě ozubená kola jsou propojena řetězem, který přenáší sílu působením na zuby kol, jde o přesné, ale hlučné převody, které netlumí rázy, řetězové převody je nutné mazat, historickou zajímavostí je užití řetězového převodu u tzv. řetězového parníku (například zrenovovaný řetězový parník Gustav Zeuner v Magdeburgu z roku 1894), u řetězových mostů (např. hrad Bouzov), nejznámější příklad užití jsou zřejmě řetězové a rozvodové řetězy v převodech na jízdních kolech nebo v motorech automobilů, dalé také u řetězových dopravníků, řetězových kladkostrojů a mnoho dalších,

e) hřebenové převody – slouží k převodu otáčivého pohybu na posuvný nebo naopak, zuby kola zapadají do zubů v rovné části (tzv. hřebenu), síla se přenáší vzájemným působením zubů (obrázek 5 vlevo), uplatňují se např. v mechanismech stavidel, lisů a zubaček (horských drah),

f) šnekové převody (obrázek 5 vpravo) – mají osy otáčení obou hřídelí na sebe kolmé, zuby hnaného kola zapadají do závitů hnací části, kterou je vždy šroub, který zabírá

Obrázek 3: Příklad užití řemenového převodu ve strojovně malé vodní elektrárny v mlýně na hradě a zámku v Jindřichově Hradci (vlevo), zbudované za pomoci Františka Křižíka (1847–1941), českého vynálezce, technika a průmyslníka, známého především vynálezem obloukové lampy, pomocí nichž v roce 1887 osvítil ulice a náměstí v Jindřichově Hradci, detail užití řemenového převodu (vpravo). (Zdroj obrázku: autor příspěvku)

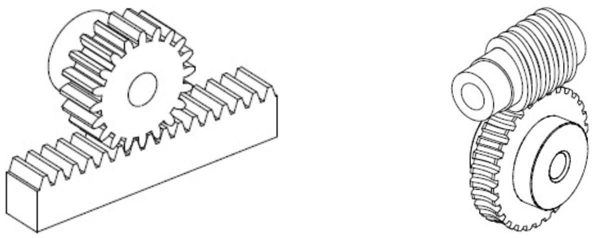


Obrázek 4: Technický náčrtek řetězového, případně také řemenového převodu (zde převod dopomala). (Zdroj obrázku: [4])

do kola se šnekovým ozubením, v opačném směru je převod zpravidla samosvorný, užívá se pro pomalé pohyby a snese velké síly; historicky se užíval např. u vinných lisů, uplatní se u vrátků, výtahů, navijáků, zvedáků, napínáků strun kytary aj.

Rozlišit lze převody také podle směru otáčení: převody souhlasné (obě kola mají se otáčejí stejným směrem, vyskytují se u řetězových a řemenových nezkřížených převodů) a převody nesouhlasné (kola se otáčejí opačným směrem, najdeme je u třecích, ozubených a řemenových zkřížených převodů).[4]
Konečně lze členit převody podle „velikosti“ převodu: tzv. převod dorychla (hnané kolo se otáčí rychleji než kolo hnací) a převod tzv. dopomala (hnané kolo se otáčí pomaleji než hnací).
Samostatnou skupinu tvoří tzv. proměnné převody, často nazývané variátory. Jejich zvláštností je to, že lze díky nim plynule měnit převod z pomala dorychla a opačně, Variátory se skládají ze dvou párů kuželů s velkým vrcholovým úhlem (např. 120°), které jsou propojeny klínovým řemenem a na společných hřídelích se posouvají k sobě a od sebe tak, aby

[4]Převody souhlasné, resp. nesouhlasné se 4asto nazývají také jako synchronní, resp. asynchronní. Geometrickým modelem asynchronního plochého řemenového převodu je každému matematikovi z topologie známá Möbiova páska. (viz [6])



Obrázek 5: Model hřebenového převodu (vlevo), model šnekového převodu (vpravo). (Zdroj obrázku: [5])

řemen zůstal napnutý. Přiblíží-li se kužely hnacího hřídele k sobě, vytlačí řemen na větší poloměr, ale kužely hnaného hřídele se musí od sebe vzdálit. Variátory se nejvíce využívají v převodovkách motocyklů.
Aby mohl učitel čerpat z tématu mechanických převodů pro tvorbu matematických úloh a appletů vhodných do výuky, je zapotřebí rozumět jedné jejich společné charakteristice, kterou je ve strojnictví tzv. převodový poměr, značený i. Ten je určen poměrem počtu otáček hnacího a hnaného kola, poměrem jejich poloměrů nebo průměrů nebo poměrem počtu zubů hnaného a hnacího kola

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}, \tag{1.1}$$

kde n_1 (n_2) je počet otáček hnacího (hnaného) kola (také frekvence otáčení), d_1 (d_2) průměr hnacího (hnaného) kola a z_1 (z_2) je počet zubů hnacího (hnaného) kola.
Pokud pro převodový poměr platí $i < 1$, jde o převod dorychla, pro $i > 1$ jde o převod dopomala.[5] U řetězového a řemenového převodu ani převodu ozubenými koly výslednou hodnotu převodového poměru i neovlivňuje vzdálenost středů ani délka řetězu či řemene, resp. řetězu. Výslednou hodnotu i tak ovlivňují pouze poloměry (resp. průměry) obou kol, nebo též počty zubů na obou ozubených kolech.
Z matematického hlediska je vzorec 1.1 krásnou ukázkou tzv. úměry, tj. rovnosti poměrů. Učivo o poměrech žáci probírají v sedmé třídě, resp. sekundě ve víceletém gymnáziu.

2 Příklady matematických úloh inspirovaných mechanickými převody

Úloha 1: Úloha o otáčení ozubených kol

Zadání úlohy: Dvě ozubená kola tvoří čelní soukolí. Větší kolo má 36 zubů, malé kolo má 9 zubů. Kolikrát je potřeba otočit malým kolem, aby se velké kolo otočilo jednou dokola?

Řešení úlohy: 36 : 9 = 4. Aby se velké kolo otočilo jednou dokola, je potřeba otočit malým kolem čtyřikrát.

[5] Ve fyzice je převodový poměr definován jako převrácený poměr, než je tomu ve strojnictví. Zde se přidržíme strojnického zavedení převodového poměru.

Didaktické poznámky: Úloha svou náročností spadá do učiva matematiky na 1. stupni základní školy, konkrétně s ní lze procvičit dělení přirozených čísel. Úloha může být formulována také obráceně: Kolikrát je potřeba otočit velkým kolem, aby se malé kolo otočilo jednou dokola? V takovém případě musí být hledaný násobek čísla 9 dělitelný 36.

Úloha 2: Úloha o ozubených kolech

Zadání úlohy: Dvě ozubená kola tvoří čelní soukolí. Větší kolo má 36 zubů, malé kolo má 10 zubů. Kolikrát je potřeba otočit malým kolem, aby se opět setkala barevná značka vyznačená na obou kolech? Kolikrát se při tom otočí velké kolo?

Řešení úlohy: Při řešení této známé úlohy žáci využijí dovednost nalézt prvočíselné rozklady přirozených čísel a nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel.
$10 = 2 \cdot 5$, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $n(36, 10) = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 180$, $180 : 10 = 18$, $180 : 36 = 5$.
S malým kolem je potřeba otočit 18krát, velké se otočí pětkrát.

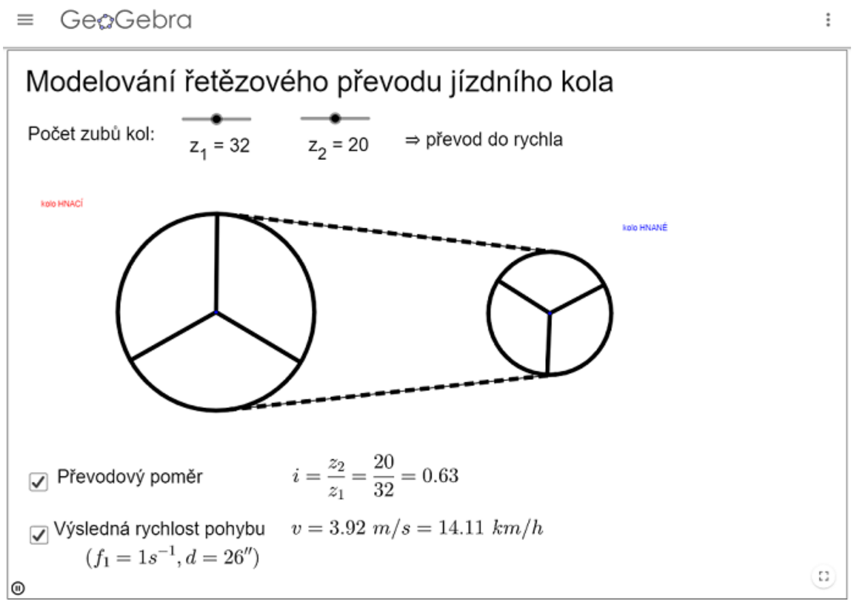
Didaktické poznámky: Učivo o dělitelnosti přirozených čísel, resp. hledání prvočíselných rozkladů a nejmenšího společného násobku dvou či více přirozených čísel je učivo 6. třídy základní školy. Tento typ úlohy lze dále rozšiřovat o úlohy, v jejichž zadání bude figurovat více ozubených kol umístěných v soukolí za sebou nebo užitím speciálních soukolí, kde na jedné hřídeli jsou dvě pevně spojená ozubená kola různých průměrů. Většinou se pak při řešení zjišťuje, kolikrát se otočí poslední kolo v sérii, jestliže se první v sérii otočí o určitý počet otáček. Podle našich zkušeností nemají žáci s řešením těchto úloh žádné zvláštní obtíže.

Úloha 3: Výsledná rychlost pohybu cyklisty

Zadání úlohy: Vypočítejte výslednou rychlost pohybu cyklisty při proměnném počtu zubů z_1 (u hnacího kola), z_2 (u hnaného kola), dané frekvenci f šlapání a dané velikosti d kola v palcích. Zapište funkční vztah mezi rychlostí pohybu a převodovým poměrem, vztah vyjádřete vzorcem. Sestavte graf funkce, která vyjadřuje závislost rychlosti pohybu na hodnotě převodového poměru. Co je grafem?

Řešení úlohy: Celé řešení bylo podrobně rozebráno v [7]. Celé řešení této komplexní úlohy je poměrně obtížné a zdlouhavé. Snadno tedy vznikne od žáků požadavek na její rychlejší řešení. K tomu účelu jsme vytvořili applet v programu GeoGebra, který nám výpočet urychlí. Díky jednoduchému dynamickému appletu lze úlohu rychle vyřešit a hned přistoupit k diskusi o vlivu převodového poměru na výslednou rychlost. Jako ukázka poslouží volně dostupný applet na internetových stránkách programu GeoGebra (viz [10]). (Obrázek 6) Jednotlivými posuvníky lze měnit počty zubů a sledovat hodnotu převodového poměru i výslednou rychlost pohybu cyklisty.

Didaktické poznámky: V rámci zadání této úlohy je možné ve výuce řešit řadu dílčích úloh, jejichž jednoduchost by ve více případech umožnila zařadit úlohy i na základní školu:



Obrázek 6: Kopie hlavní stránky appletu k modelování řetězového převodu s výslednou rychlostí v pohybu pro zvolené hodnoty z_1 a z_2. (Zdroj obrázku: [10])

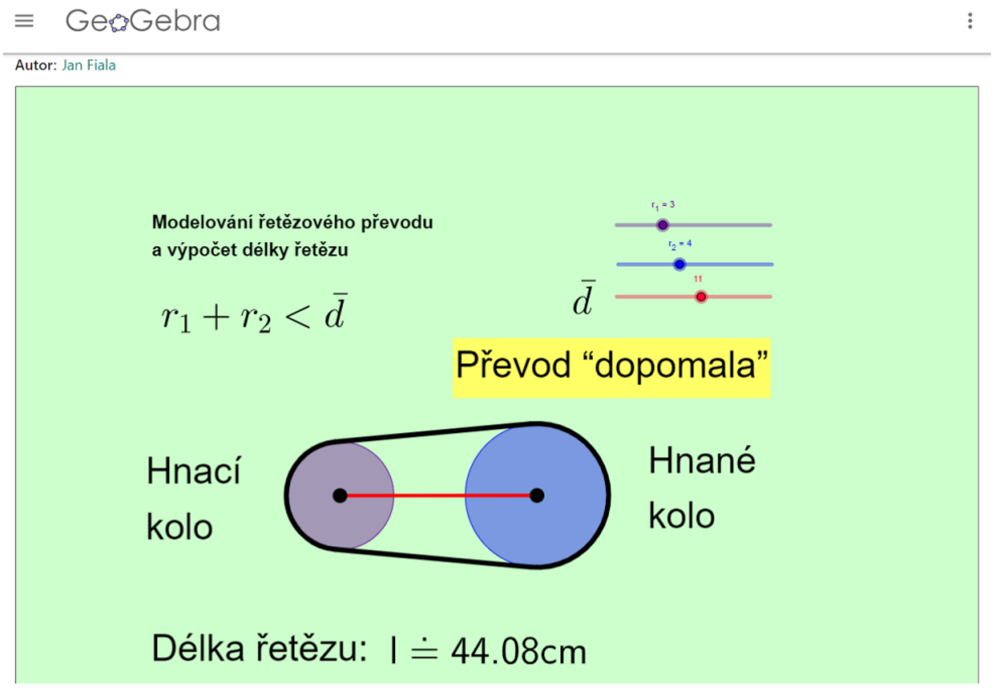
vypočítat hodnotu převodového poměru s použitím bud' průměrů (poloměrů) nebo počtu zubů, na základě hodnoty převodového poměru diskutovat, zda půjde o převod dopomala či dorychla, vyjádřit závislost výsledné rychlosti pohybu cyklisty na převodovém poměru a najít její graf (hyperbola funkce nepřímá úměrnost) aj.

Úloha 4: Délka řetězu na řetězovém převodu

Zadání úlohy: Předpokládejme užití cyklistického převodu bez přehazovačky (viz 4) tvořený kolem hnacím o poloměru r_1, $r_1 \in \{1, ..., 10\}$ [cm] a kolem hnaným o poloměru r_2, $r_2 \in \{1, ..., 10\}$, [cm]. Nejdříve odvoďte vzorec pro výpočet délky l řetězu cyklistického převodu, je-li vzdálenost os obou kol $\bar{d}$, $\bar{d} \in (0; 20\rangle$, [cm]. Vypočítejte délku l řetězu, je-li $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 7$ cm a $\bar{d} = 15$ cm. Jaká podmínka musí být splněna pro r_1, r_2, d, aby byl převod funkční? Kdy jde o převod dopomala a kdy dorychla (pro jakou hodnotu převodového poměru i)? Jak se vzorec pro výpočet délky řetězu změní pro $r_1 = r_2 = r$?

Řešení úlohy: Úlohou jsme se podrobně zabývali v [7]. Také tuto úlohu lze rychle řešit pomocí připraveného appletu programu GeoGebra (viz [11]). (Obrázek 7) Třemi posuvníky se nastavují poloměry obou převodových kol a vzdálenost hřídelí obou kol. Aby byl převod funkční, musí platit $r_1 + r_2 > \bar{d}$. Je-li $r_1 < r_2$, oznámí zvýrazněný button, že jde o převod dopomala, pro $r_1 > r_2$ jde naopak o převod dorychla. Sestavení appletu není zvlášť obtížné, zvládl by to jistě i žák, který projevuje o podobné programy jako je GeoGebra zájem.

Didaktické poznámky: Úloha svou obtížností spadá již na střední školu, speciálně do druhého ročníku, kde se (většinou) probírá učivo o funkcích a podobných zobrazeních.



Obrázek 7: Kopie stránky appletu pro výpočet délky řetězu na řetězovém převodu. (Zdroj obrázku: [11])

Rozbor situace totiž dovede žáky nutně k úkolu sestrojit společnou tečnu dvou kružnic, což se naučí v rámci podobných zobrazení, resp. stejnolehlosti dvou kružnic. Na tuto úvodní úvahu pak může navázat vyjádření celkové délky řetězu, která je součtem délek dvou oblouků a délek dvou shodně dlouhých částí společných tečen s krajními body, které jsou dotykovými body obou tečen na kružnicích modelujících kola. Tato úloha je dobrou odpovědí na častou otázku studentů, k čemu se učivo o společné tečně dvou kružnic dá v praxi využít.

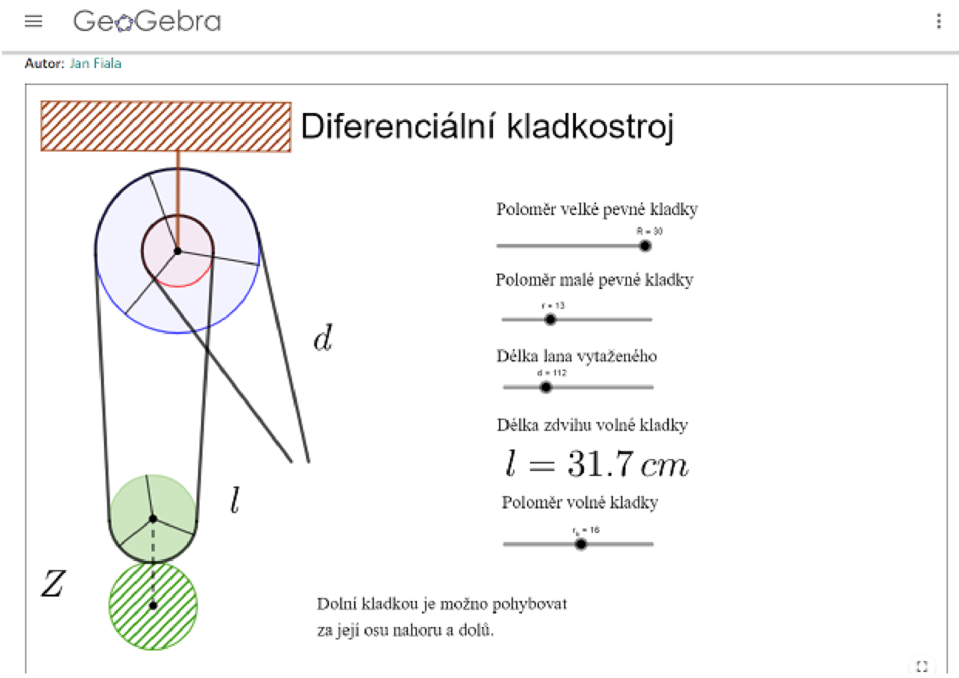
Úloha 5: Délka zdvihu diferenciálního kladkostroje

Zadání úlohy: O jakou délku l se zvedne břemeno Z, jestliže zatáhneme za řetěz tak, že se velká pevná kladka otočí jednou dokola?

Řešení úlohy: K řešení využijeme sestavený applet v programu GeoGebra. (Obrázek 8) V appletu je možné třemi posuvníky nastavovat poloměry celkem tří kol, která tvoří kladkostroj, což ovlivňuje délku výsledného zdvihu.

Didaktické poznámky: Tvorba appletu s diferenciálním kladkostrojem už vyžaduje určité pokročilejší zkušenosti uživatele programu GeoGebra, zabývat by se jím však mohli žáci se zájmem o informatiku.

Na závěr kapitoly připojme poznámku ke geometrii ozubených kol, která jsou součástí nějakého mechanického převodu. Jednoduchost prvotního pohledu na situaci, kdy zuby



Obrázek 8: Kopie stránky s appletem diferenciálního kladkostroje. (Zdroj obrázku: [14])

dvou ozubených kol v převodu do sebe správně zapadají , je pouze zdánlivá. Geometrický tvar zubu na ozubeném kole je komplikovaná otázka, která svou náročností spadá do kompetence vysokých škol. Aby zuby kol do sebe správně zapadaly, musí být ve tvaru cykloid (více k cykloidám např. v [12]), častěji však tzv. evolvent (viz např. v [13]).[6] Evolventu si lze představit jako křivku, kterou opíše bod přímky, která se odvaluje po dané kružnici. Přestože bychom zde cítili zdroj pro další úlohy, doporučujeme ponechat toto téma pro žáky středních škol jako jednoznačně nadstavbové, nad rámec základního učiva. Doporučit jej lze na úrovni střední školy snad jen talentovaným žákům v matematice.

Závěr

V článku jsme ukázali, jaké úlohy je možné vytvořit, pokud se necháme inspirovat mechanickými převody. U některých z těchto úloh jsme sestavili applet, který posloužil především rychlejšímu nalezení výsledku, rovněž však ke kontrole správnosti písemného řešení. Zvlášť vděčným tématem jsou převody řemenové a řetězové a převody ozubených kol, neboť mají v realitě aplikace, se kterými se žáci každodenně setkávají. Klasifikace mechanických převodů nám poskytla možnost tematické motivace pro tvorbu matematických úloh. Mechanické převody se odpradávna vyskytují v blízkosti člověka jako výtvor jeho důmyslného technického a matematického umu, jsou proto podle našeho názoru vhodným tématem do výuky. Úlohy inspirované mechanickými převody přispějí k naplňování cílů zaměření vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace podle RVP ([8], s. 22): řešit problémy z re-

[6] V programu GeoGebra jsme sestavili dynamický applet na tvorbu evolventy (viz [15]).

ality, využívat ICT technologie, sestavovat matematické modely a kriticky posuzovat výsledky z nich plynoucí vzhledem k realitě, využít více různých matematických poznatků při řešení úloh aj. Matematická úloha o výsledné rychlosti pohybu cyklisty a úloha na výpočet délky řetězu cyklistického převodu jsou vhodné spíše do výuky matematiky (případně fyziky) až na střední škole. U obtížnějších úloh je zřejmá mezipředmětovost i značná komplexnost a složitost. Doporučit tak lze obtížnější úlohy především jako rozšíření základního učiva v hodinách matematiky a do hodin pro talentované žáky.

Literatura:

[1] *Rozvoj matematické gramotnosti na základních a středních školách ve školním roce 2017/2018.* Tematická zpráva. Praha: ČŠI, 2019. Dostupné na URL: https://www.csicr.cz/cz/Aktuality/Tematicka-zprava-Rozvoj-matematicke-gramotnosti-na.

[2] *Vyhodnocení dotazníku „Spojitost matematiky s technickými obory".* Dostupné na URL: https://www.matematech.cz/spojitost-matematiky-s-technickymi-obory.

[3] Čelní převod ozubenými koly. Dostupné na URL: https://www.proskutry.cz/gallery/products/middle/31605.jpg.

[4] Řetězový převod. Dostupné na URL: https://eluc.kr-olomoucky.cz/verejne/lekce/1903.

[5] Hřebenový a šnekový převod. Dostupné na URL: https://www.ludwigmeister.de/technische-informationen/zahnraeder.

[6] Möbiova páska. Dostupné na URL: https://cs.wikipedia.org/.

[7] Fiala, J. Mechanické převody ve výuce matematiky. *South Bohemia Mathematical Letters*, 27(1), 2019, 10–20. Dostupné na: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2019_Fiala.pdf

[8] Kol. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* Praha: VÚP v Praze, 2007. ISBN: 978-80-87000-11-3.

[9] Voráčová, Š. et al. *A*tlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná, Academia Praha, 2012.

[10] Řetězový převod. Applet. Dostupné na: https://www.geogebra.org/m/eTS426C7.

[11] Délka řetězu. Applet. Dostupné na: https://www.geogebra.org/m/fdjtupq6.

[12] Cykloida. https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid

[13] Evolventa. https://en.wikipedia.org/wiki/Involute

[14] Model diferenciálního kladkostroje. Dostupné na URL: https://www.geogebra.org/m/HYGwKaAM.

[15] Evolventa kružnice. Applet. Dostupné na URL:
https://www.geogebra.org/m/p9yyjcjn.

Jan Fiala
Gymnázium V. Nováka Jindřichův Hradec
Husova 333
377 01, Jindřichův Hradec
e-mail: fiala@gvn.cz

ARITMETIKA A KRABIČKY

Šárka Gergelitsová[1], **Tomáš Holan**[2]

[1]Gymnázium Benešov, [2]MFF UK Praha

Abstrakt: Článek představuje možnosti systému ATest, zaměřeného na podporu aritmetických dovedností žáků, který autoři představili na konferenci „Užití počítačů ve výuce matematiky“. Prostředí napomáhá nejen automatizovat provádění základních aritmetických operací, ale vyžaduje (a tím cvičí) schopnost hledat možné konstrukce daného cíle-výsledku. ATest jednak přispívá k částečné gamifikaci výuky, jednak využívá konstruktivistický přístup.

Klíčová slova: gamifikace, konstrukce, aritmetika, on-line aplikace.

Arithmetic and Boxes

Abstract: The paper is based on the presentation of the ATest system that was given by the authors at the 9th conference “The use of computers in mathematics education”. The ATest system is focused on supporting arithmetic skills of pupils. It not only helps pupils to automate performing of arithmetic operations but, moreover, it utilizes their abilities to look for possible constructions of a given result. ATest application helps to gamify a classroom. It brings elements of constructivist teaching.

Key words: gamification, constructions, arithmetic, on-line application.

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2019_Gergelitsova_Holan_2.pdf

PROGRAMOVÁNÍ V JSXGraph

Roman Hašek, Pavel Pech, Přemysl Rosa

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta

Abstrakt: Programovací jazyk JSXGraph, nadstavba JavaScriptu, je určen pro tvorbu interaktivních dynamických obrázků, například geometrických konstrukcí nebo grafů funkcí, které jsou, jako součást obsahu webových stránek nebo online kurzů v Moodle, zobrazitelné v libovolném webovém prohlížeči. Článek představuje užití JSXGraphu jako efektivního nástroje tvorby materiálů jak pro podporu výuky předmětů STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics), tak i pro přípravu učitelů těchto předmětů.

Klíčová slova: Programování, dynamický applet, JavaScript, výuka matematiky.

Programming JSXGraph

Abstract: The JSXGraph programming language, a cross-browser JavaScript library, is designed to create interactive dynamic figures, such as geometrical constructions or graphs of functions, which, as part of web content or online courses in Moodle, can be viewed in any web browser. The paper presents the use of JSXGraph as an effective tool for development of materials both for the support of teaching STEM subjects (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) and for the preparation of teachers of these subjects.

Key words: Programming, dynamic applet, JavaScript, mathematics education.

Úvod

Dynamické obrázky, například geometrické konstrukce, grafy funkcí nebo grafická znázornění dat, jejichž obsah se mění bezprostředně se změnami vstupních podmínek prováděnými uživatelem, jsou významným prvkem moderních digitálních vzdělávacích online materiálů. Nejedná se přitom zdaleka jenom o sofistikované ilustrace příslušných jevů. Plní také roli prostředí, v němž může uživatel provádět experimenty se sledovanými jevy, řešit dané úkoly a ověřovat si správnost těchto řešení. Při implementaci do vhodného LMS (Learning Management System) [8], například Moodle, pak mohou být dynamické obrázky i zdrojem dat pro hodnocení účastníka kurzu.

Existují různé cesty, jak dynamické applety s takovýmito obrázky vytvářet. Můžeme použít třeba GeoGebru [2], zdarma dostupný program pro studium a výuku matematiky. Jemu příslušná webová stránka geogebra.org slouží mimo jiné jako prostor pro ukládání a online sdílení materiálů v něm vytvořených. Ke každému uloženému materiálu lze přitom vygenerovat kód, odkazující na jeho uložení na geogebra.org, kterým lze materiál ve formě dynamického obrázku vložit do libovolné webové stránky. Stejně tak lze dynamické applety GeoGebry použít v Moodle. Pro mnohé uživatele je tento způsob vytváření dynamických appletů výhodný, protože není třeba psát jejich kód. Stačí vytvořit samotný obrázek v GeoGebře a uložit ho na stránku geogebra.org, kód je poskytnut automaticky jako jedna z variant sdílení. Tato zjevná uživatelská přívětivost je však vykoupena omezením „operačního nasazení" appletů. Mohou se vyskytnout problémy s jejich načítáním a s fungováním v různých prohlížečích nebo v režimu offline. Z tohoto úhlu pohledu se potom jako praktičtější jeví přímé programování dynamických appletů. Ne každý ale touží po detailním studiu všech zákoutí syntaxe příslušného jazyka. S tím se ovšem dá do značné míry vypořádat srozumitelností kódu a dostupností velké zásobárny ukázkových příkladů, které lze buď přímo použít, nebo nejprve mírně modifikovat a potom použít, případně je použít nepřímo, jako stavební materiál pro tvorbu originálních appletů. Takovýto režim tvorby appletů nabízí programovací jazyk JSXGraph [4]. Uživatel s ním na jedné straně získá prostředí pro smysluplné rozvíjení svých dovednosti programovat, na druhé straně pak širokou podporu ve formě konkrétních příkladů a návodů k tvorbě všech podstatných komponent dynamických appletů [4], [9].

Programovací jazyk JSXGraph [4], nadstavba JavaScriptu, byl vytvořen pod vedením prof. Alfreda Wassermanna z Univerzity Bayreuth jako jednoduchý nástroj pro tvorbu dynamických appletů zobrazitelných v libovolném webovém prohlížeči, se zvláštním zřetelem k dotykovým zařízením [1]. Šíři možností tohoto nástroje dokládá velké množství konkrétních příkladů, které jsou uvedeny na stránce jsxgraph.org. Že se jedná o opravdu silný prostředek tvorby dynamických obrázků dosvědčuje i fakt, že v JSXGraphu je naprogramován svébytný program dynamické geometrie Sketchometry [10], určený primárně pro dotyková zařízení jako jsou mobilní telefony, tablety nebo interaktivní tabule [5], [7].

Komunita uživatelů JSXGraphu není početná, je ale rozprostřena po celém světě, s výraznými centry v Německu, Slovinsku, Španělsku a v Indii. Ačkoliv má JSXGraph v mezích svého určení napříč touto komunitou rozličné využití, jako velmi perspektivní se jeví jeho spojení s LMS Moodle k tvorbě moderních výukových kurzů. Proto je především tímto směrem, s důrazem na tvorbu materiálů a kurzů pro STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) vzdělávání, zaměřen mezinárodní projekt ITEMS (Improving Tools for E-assessment in Maths and Science) řízený Univerzitou Bayreuth, ve kterém na tvorbě konkrétních aplikací a kurzů a na zkoumání cest dalšího vývoje JSXGraphu spolupracují odborníci z Německa, Španělska, Slovinska, Finska a České republiky [3]. Významným výsledkem této spolupráce je vícejazyčná příručka JSXGraphu [9], dostupná i v češtině, aktuálně v rozpracované verzi.

V článku si nejprve přiblížíme cíle projektu ITEMS, potom se prostřednictvím konkrétního příkladu stručně seznámíme s tvorbou dynamického appletu v JSXGraphu a naznačíme si postup publikování takového appletu na webu, nakonec si ukážeme možné použití programu dynamické geometrie Sketchometry ve výuce matematiky.

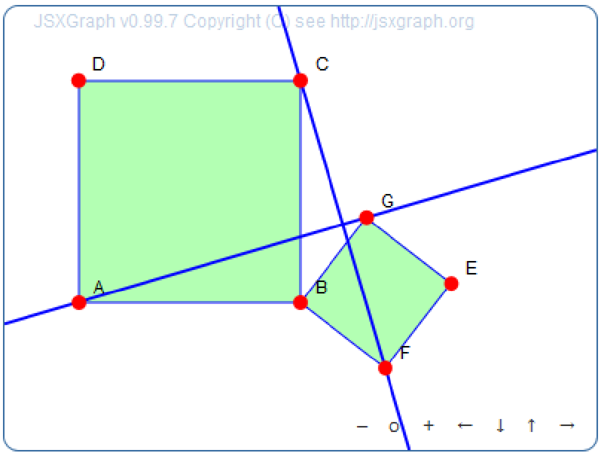
1 Projekt ITEMS

Hlavním cílem projektu *Improving Tools for E-assessment in Maths and Science* (ITEMS) [3], spolufinancovaného Evropskou unií v rámci programu Erasmus+, je návrh a podpora aplikace inovativních metod vytváření výukových materiálů použitelných především ve vyučovacích předmětech zaměření STEM , jak na středních, tak i na vysokých školách. Cesta k tomuto cíli je realizována prostřednictvím vytváření e-learningových materiálů kombinujících interaktivní zadání úkolů a hodnocení jejich řešení, hledání efektivních forem využití JSXGraphu pro výuku a hodnocení, které by byly zároveň přitažlivé pro studenty, monitorování vzdělávací účinnosti materiálů pomocí nástrojů Learning Analytics a podpora přípravy učitelů zapojených do tvorby a správy vytvořených vzdělávacích materiálů. Vytvořené materiály jsou průběžně distribuovány formou otevřených vzdělávacích zdrojů (OER) a hromadných otevřených online kurzů (MOOC).

2 Programování v JSXGraph

2.1 Tvorba dynamického appletu

Programovací jazyk JSXGraph [4] je nadstavbou JavaScriptu, speciálně vytvořenou knihovnou pro kreslení dynamických interaktivních materiálů vhodných pro všechny webové prohlížeče. Základní pravidla zápisu kódu v tomto jazyce, spolu s detailními popisy obsahu a tvorby dynamických appletů se základními objekty a funkcemi jsou uvedena v multilingvní *Příručce pro práci v JSXGraphu*, [9], dostupné i v češtině. Zájemce o detailní informace o programování v JSXGraphu proto odkazujeme na tuto příručku. Zde pro ilustraci uvádíme jenom jeden příklad, dynamický obrázek ilustrující následující problém: *Pro libovolné čtverce ABCD a BFGH se společným vrcholem B jsou přímky AG a FC vždy vzájemně kolmé.*



Obrázek 1: Přímky AG a FC jsou vždy vzájemně kolmé – vytvořeno v JSXGraph

Dynamický obrázek je zachycen na Obr. 1, červené body jsou pohyblivé. Jeho kód je zde:

```
<div id="jxgbox" class="jxgbox" style="width:400px; height:300px;"></div>
 <script>
   var board = JXG.JSXGraph.initBoard('jxgbox', {boundingbox: [-4, 3, 4, -3]});
   var A = board.create('point',[-3,-1]);
   var B = board.create('point',[0,-1]);
   var F = board.create('point',[1,-2], {name:'F'});
   var square1 = board.create('regularpolygon',[A, B, 4],{name:"Square 1"});
   var square2 = board.create('regularpolygon',[B, F, 4],{name:"Square 2"});
   var C = square1.vertices[2];
   var H = square2.vertices[3];
   var p = board.create('line', [A, H]);
   var q = board.create('line', [F, C]);
 </script>
```

Obrovskou zásobárnu příkladů různých obtížností najdeme na stránce JSXGraphu, konkrétně zde jsxgraph.uni-bayreuth.de. O možnostech využití tohoto jazyka svědčí například applet *Turtle-bot*, viz jsxgraph.uni-bayreuth.de.

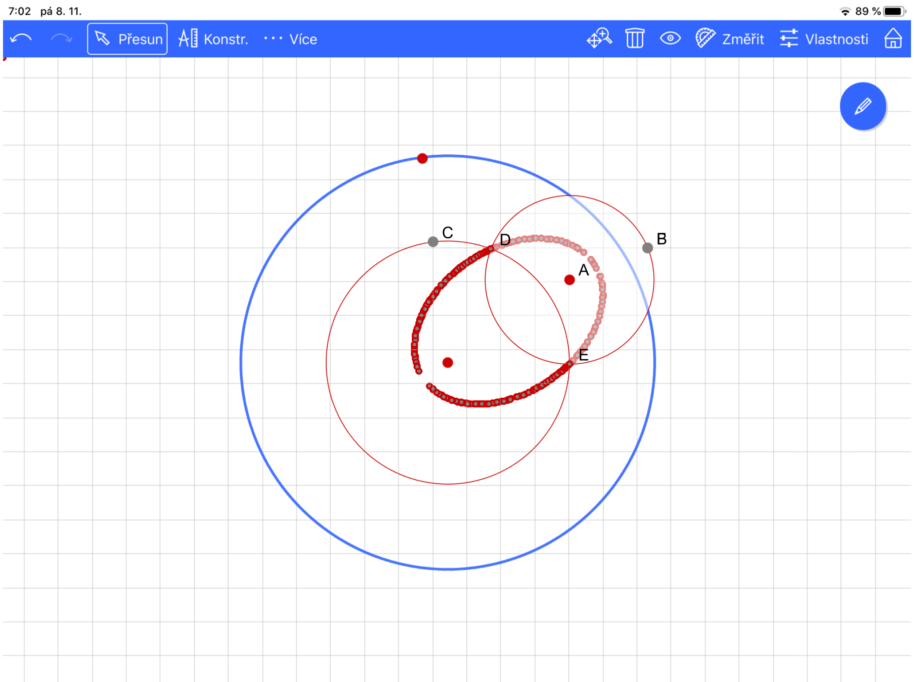
Pro testování tvorby kódu doporučujeme prostředí jsfiddle.net/, v němž je možno pohodlně psát kód appletu a zároveň sledovat výsledek této práce, viz například experimentování se znázorněním kružnice opsané trojúhelníku jsfiddle.net/0hdt3aLn/1/.

2.2 Prezentace appletu na webu

Applety vytvořené v JSXGraphu lze prezentovat na webu, začleněné do html prostředí. JSXGraph je možné propojit i s platformami jako je Moodle, MediaWiki, WordPress či Drupal. Veškeré informace o jednotlivých pluginech naleznete na stránce jsxgraph.uni-bayreuth.de. Konkrétně v případě Moodle je pro fungování knihovny JSXGraph nezbytné nainstalovat do Moodle plugin dostupný na stránce moodle.org. JSXGraph lze potom vkládat napříč všemi moduly činností a typy studijních materiálů kurzu, např. do testu, popisku apod.

3 Sketchometry

Program dynamické geometrie Sketchometry [10] představuje komplexní aplikaci vytvořenou v JSXGraphu primárně určenou pro dotyková zařízení. Jeho hlavním účelem je poskytovat prostředí pro sofistikované dynamické geometrické konstrukce v rovině a pro vykreslování grafů funkcí. Geometrické konstrukce jsou v něm vytvářeny tahem prstu po dotykové ploše, prostřednictvím unikátního systému gest. Je ideální pro vytváření rychlých ale přesných náčrtků geometrických konstrukcí a pro operativní řešení problémů a aplikačních úloh v hodině matematiky nebo při jejím studiu. Program Sketchometry je kompletně lokalizovaný do češtiny a je volně dostupný na stránce sketchometry.org. Návody na práci s jeho prostředím i konkrétní příklady jeho využití ve výuce jsou k dispozici v pracích [5], [6] a [7]. Pro ilustraci užití programu je na Obr. 2 zachycen náčrtek k řešení následujícího problému: *Je dána kružnice k se středem A a poloměrem r. Zvolte* *libovolný pevný bod B uvnitř kružnice k a určete množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodu B i kružnice k.*



Obrázek 2: Množina bodů dané vlastnosti – sestrojeno ve Sketchometry

4 Závěr

Dosavadní zkušenosti s JSXGraphem potvrzují, že se jedná o pozoruhodný nástroj, který má velký potenciál pro uplatnění především při tvorbě e-learningových kurzů a online testů. Uživatelé oceňují jeho flexibilitu a univerzálnost použití v rámci rozličných webových platforem. Věříme, že díky české verzi příručky [9] ocení praktičnost tohoto programovacího jazyka i více českých uživatelů. Rádi zodpovíme případné dotazy k jeho užití a uvítáme jakékoliv připomínky a podněty pro jeho další vývoj. Velmi inspirující a poučná bude bezesporu první mezinárodní konference věnovaná JSXGrapu, která se bude konat počátkem října roku 2020 v Bayreuthu, viz [4].

Literatura:

[1] Ehmann, M., Gerhäuser, M., Miller, C., Wassermann, A. Sketchometry and JSX-Graph – Dynamic geometry for mobile devices. *South Bohemia Mathematical Letters*, Volume 21, No. 1, 2016, pp. 1-7. Dostupné z: home.pf.jcu.cz

[2] *GeoGebra – Dynamická matematika pro studium a výuku* [online]. [29. listopad 2019]. Dostupné z: www.geogebra.org

[3] *ITEMS Improving Tools for E-assessment in Maths and Science* [online]. [29. listopad 2019]. Dostupné z: itemspro.eu

[4] *JSXGraph; Dynamic Mathematics with JavaScript* [online]. [29. listopad 2019]. Dostupné z: jsxgraph.uni-bayreuth.de/wp/index.html

[5] Padrtová (Košinová), M. *Program Sketchometry ve výuce matematiky.* (Bakalářská práce). Katedra matematiky, Pedagogická fakulta JU v Českých Budějovicích, 2016. Dostupné z home.pf.jcu.cz/ upvm/2017/index.php/program-konference

[6] Košinová, M. *Dynamická geometrie na dotykových zařízeních ve výuce matematiky.* (Diplomová práce). Katedra matematiky, Pedagogická fakulta JU v Českých Budějovicích, 2019. Dostupné z https://wstag.jcu.cz

[7] Košinová, M., Hašek, R. Sketchometry - dynamická geometrie pro dotyková zařízení. *Sborník příspěvků 8. konference Užití počítačů ve výuce matematiky 9.–11. listopadu 2017 České Budějovice.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2017, 59–63.

[8] Learning management system [online]. *Wikipedia, the free encyclopedia.* [29. listopad 2019]. Dostupné z en.wikipedia.org

[9] *Příručka pro práci v JSXGraphu* [online]. [29. listopad 2019]. Dostupné z: ipesek.github.io/jsxgraphbook

[10] *Sketchometry; in touch with geometry* [online]. University Bayreuth [29. listopad 2019]. Dostupné z: sketchometry.org

Roman Hašek, Pavel Pech, Přemysl Rosa
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
37115 České Budějovice
e-mail: hasek@pf.jcu.cz, pech@pf.jcu.cz, rosapr00@pf.jcu.cz

PROPEDEUTIKA ZLOMKOV V MATEMATIKE S VYUŽITÍM HUDBY A POČÍTAČOV

Jana Hnatová, Alena Prídavková

Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta,

Katedra matematickej edukácie, Slovenská republika

Abstrakt: Na primárnom stupni vzdelávania sa v slovenskom kontexte pojem zlomok zavádza len na propedeutickej úrovni. V príspevku je prezentovaný návrh auditívneho modelu tohto pojmu, ktorý využíva prepojenie matematiky, hudobnej výchovy a práce s interaktívnou zostavou podporovanou softvérom SmartNotebook. Tvorba aktivít v tomto programe je súčasťou pregraduálneho vzdelávania študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity v Prešove vo výberovom predmete Matematika a počítač.

Klíčová slova: auditívny model pojmu zlomok, matematika, hudobná výchova.

Propedeutic of fractions in mathematics using music and computers

Abstract: The concept of fraction is introduced in the Slovak context only at the propedeutic level in the primary stage of education. The paper presents proposal of an auditory model of the term which uses mathematics, music education and set of interactive equipment. The set is supported by SmartNotebook software. Creating activities in this program is a part of the undergraduate teacher training at Faculty of Education, University of Preshov, in the subject Mathematics and Computer.

Key words: audio model of the concept fraction, mathematics, music education.

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z:
http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2019_Hnatova_Pr%C3%ADdavkova.pdf

O FAKTORIZACI POLYNOMŮ S CELOČÍSELNÝMI KOEFICIENTY

Jaroslav Hora

KMT FPE ZČU Plzeň

Abstrakt: Článek obsahuje ukázku užití klasického algoritmu pro faktorizaci polynomu s celočíselnými koeficienty, který objevil Theodor von Schubert. Dále je uveden příklad na užití Kroneckerova triku, redukujícího faktorizaci polynomů více neurčitých na faktorizaci celočíselného polynomu o jediné neurčité. Nakonec je stručně popsán algoritmus pro faktorizaci polynomu s koeficienty v tělese Z_p, p – prvočíslo.

Klíčová slova: Polynomy s celočíselnými koeficienty, faktorizace, algoritmy pro faktorizaci.

About Factorization of Polynomials with Integer Coefficients

Abstract: The article contains an example of the use of classical algorithm for factorization of polynomial with integer coefficients, which was discovered by Theodor von Schubert. The following is an example of using the Kronecker trick, reducing the factorization of polynomials in more indeterminates to factorization of integer polynomials in one indeterminate. Finally, the algorithm for factorization of a polynomial with coefficients in the field Zp, p - prime number is briefly described.

Key words: Polynomials with integer coefficients, factorization, algorithms for factorization of polynomials.

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2019_Hora.pdf

OZOBOT V HODINÁCH MATEMATIKY A FYZIKY

Mgr. Patrik Klofáč

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta

Abstrakt: V tomto příspěvku demonstrujeme využití robotické hračky Ozobot v hodinách matematiky a fyziky. Žáci si pomocí jednoduchých, a zároveň atraktivních úloh získají dovednosti hravou formou. Téma může být motivující pro mezipředmětové vztahy matematiky, fyziky a informatiky.

Klíčová slova: robot, Ozobot, matematika, fyzika

Ozobot in teaching mathematics and physics

Abstract: In the paper, we demonstrate the use of the Ozobot robotic toy in math and physics classes. With the help of simple but attractive tasks, pupils will acquire and repeat their skills in a playful form. The topic can be motivating for intersubject relationships of mathematics, physics and computer science.

Key words: robot, Ozobot, mathematics, physics

Úvod

Z vlastní zkušenosti vím, že se v matematice nevyskytuje mnoho pomůcek, které by vyučovací hodinu dokázaly zpestřit zábavnou formou, a zároveň žákům poskytovaly potřebné znalosti. Avšak Ozobot je právě tou pomůckou, která svými vlastnostmi žáky zaujme a přitáhne jejich pozornost. V současné době jsou snadno dostupné hračky, které se mohou naprogramovat, a díky tomu se používají jako roboti. Domnívám se, že je vhodné začlenění těchto pomůcek do učebního procesu. Žák nejenom, že sleduje jejich pohyb, ale podílí se i na samotném ovládání, to podpoří jeho zájem o předměty jako matematika, fyzika a informatika.

V příspěvku představujeme základní početní, geometrické a fyzikální úlohy (rychlost, síla, tření), které se dají snadno modifikovat od lehkých až po těžší varianty.

1 Ozobot

Úlohy, o kterých hovoříme lze demonstrovat pomocí robotické hračky Ozobot. Jedná se o menšího robota, ten dokáže sledovat černou čáru nebo barevný kód nakreslený na papíře. Ovládá se různobarevnými kódy, ty se skládají ze čtyř barev (modrá, zelená, červená a černá). Ozobot dokáže měnit své zbarvení podle toho, po které barvě se zrovna pohybuje.

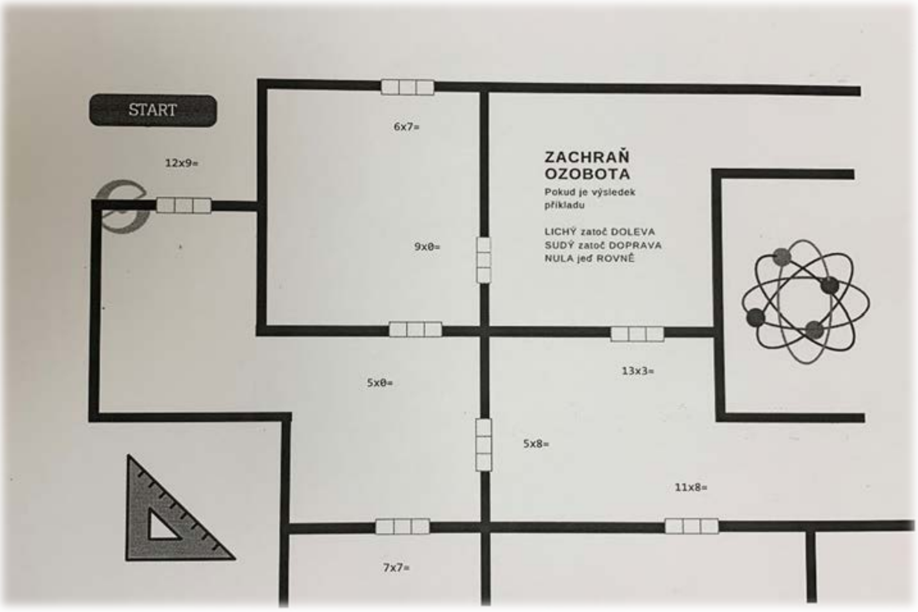
Obrázek 1: Ozobot.

2 Ozobot v hodinách matematiky

Připravili jsme si dva typy úloh (početní, geometrickou).

2.1 Početní úloha

Tato úloha je převzatá z materiálů skupiny Czechitas. Do prázdných čtvercových polí doplňujeme barevný kód na základě správně vypočteného příkladu. Úlohy lze využívat pro všechny ročníky, pouze stačí modifikovat příklady na právě probírané učivo v hodinách matematiky. Po doplnění barevných kódů spustíme Ozobota, ten ovšem dorazí do cíle jen v případě správného výpočtu zadaných příkladů.

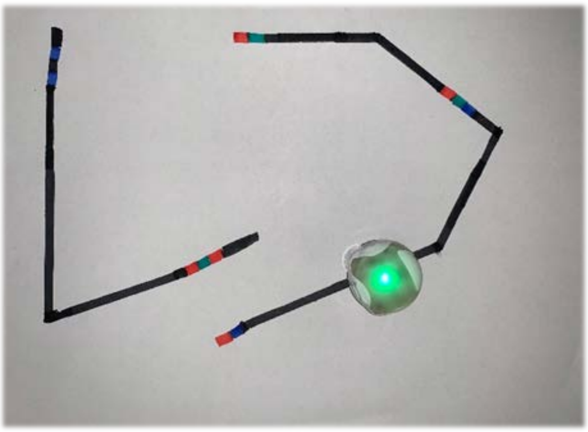


Obrázek 2: Mapa s příklady pro Ozobota.[1]

2.2 Geometrická úloha

Tento konkrétní příklad geometrické úlohy lze modifikovat na různé stupně obtížnosti.
Zadání:

- dráha měří nejméně 50 cm
- dráha bude umístěna na papíře velikosti A4
- na dráze budou minimálně 3 zatáčky 40°, 80°, 110°
- na dráze je použito 5 různých ozokódů
- dráha musí být v jednom místě přerušena
- v cíli je umístěn kód „konec hry"



Obrázek 3: Možné řešení geometrické úlohy.

3 Ozobot v hodinách fyziky

Ozobota využijeme i v hodinách fyziky, například pro demonstraci trajektorie, průměrné rychlosti, okamžité rychlosti, zrychlení nebo zpomalení. Pokud máme k dispozici 3D tiskárnu, vytiskneme si doplňky na Ozobota. S těmito doplňky můžeme Ozobota použít i na demonstraci síly a tření.

Obrázek 4: Ozobot s doplňkem.[2]

3.1 Rychlost (průměrná, okamžitá)

Ozobot oplývá výjimečnou vlastností, zvládne udržet konstantní rychlost. Video níže nám ukazuje demonstraci průměrné rychlosti v jednom pruhu, a zároveň zrychlení či zpomalení v druhém pruhu. Zrychlení či zpomalení Ozobota způsobují barevné kódy, které jsou zvoleny tak, aby na každém úseku jel Ozobot jinou rychlostí.

Video: https://www.youtube.com/watch?v=ZqDJrZIRtz0&feature=youtu.be

3.2 Trajektorie

Druhé video nám ukazuje křivočarou trajektorii posuvného pohybu a pohyb otáčivý opět za pomoci kódu „tornádo." Z mé učitelské praxe vím, že žáci si snadněji zapamatují probíranou problematiku díky možnosti vyzkoušet si prakticky teoretické znalosti.

Video: https://www.youtube.com/watch?v=_9tLoyKUOyE&feature=youtu.be

Závěr

Z představených příkladů je zřejmé, že robotická hračka Ozobot má v sobě potenciál pro efektivní využití ve výuce fyziky i matematiky, a zároveň se domnívám, že by své místo mohla objevit i v jiných předmětech.

Literatura:

[1] Czechitas. *Czechitas* [online]. [cit. 2019-12-20]. Dostupné z: https://www.czechitas.cz/cs/

[2] Ozobot Forklift. *Thingiverse* [online]. 2016 [cit. 2019-12-20]. Dostupné z: https://www.thingiverse.com/thing:1599171

Mgr. Patrik Klofáč
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: pklofac@pf.jcu.cz

VÝUKA MATEMATIKY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE S PODPOROU ONLINE PROSTŘEDÍ PROGRAMU GEOGEBRA

Monika Košařová, Roman Hašek

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta

Abstrakt: Zdarma dostupný program pro podporu výuky a studia matematiky GeoGebra je doplněn online prostředím geogebra.org, jehož prostřednictvím mohou uživatelé uchovávat a sdílet v programu vytvořené materiály i jejich kolekce. Prostředí disponuje funkcemi uplatnitelnými v moderně pojaté výuce matematiky. Příspěvek přibližuje konkrétní postupy využití tohoto prostředí ve výuce matematiky na základní škole, které první autorka aplikuje a ověřuje při své výuce na ZŠ Horní Planá.

Klíčová slova: Výuka matematiky, GeoGebra, online výukové prostředí.

Teaching mathematics at lower secondary school with the support of the GeoGebra online environment

Abstract: GeoGebra, a free software to support the teaching and learning of mathematics, is accompanied by an online geogebra.org environment where users can store and share the dynamic materials created, either individually or as a collection. The environment has various functions applicable in modern mathematics teaching. The paper will show particular methods of the use of this environment in mathematics teaching at lower secondary school, which the first author applies and verifies in her teaching at the Primary School in Horní Planá.

Key words: Mathematics instruction, GeoGebra, online educational environment.

Úvod

Článek přináší poznatky získané tvorbou a následným praktickým ověřováním dynamických výukových materiálů vytvořených ve zdarma dostupném programu pro podporu výuky a studia matematiky GeoGebra [2]. Zvláštní pozornost je při tom věnována reálnému využití funkcí online výukového prostředí, které je uživatelům programu k dispozici na stránce geogebra.org. Stejně jako program je i toto online prostředí dostupné zdarma, pro plné využití jeho funkcí je akorát třeba vytvořit si na stránce svůj osobní profil. První autorka článku studuje učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, zároveň již druhým rokem učí matematiku na Základní škole Horní Planá. Tuto svou pedagogickou praxi zúročila jak ve své bakalářské práci *Tvorba a užití materiálů pro výuku matematiky základní školy v prostředí programu GeoGebra* [7], tak i nyní, při tvorbě navazující diplomové práce *Výuka matematiky na ZŠ s podporou online prostředí programu GeoGebra*. Konkrétní materiály i poznatky z jejich použití, které jsou uváděny v tomto článku, tak vycházejí především z této autorčiny učební praxe.

1 Online prostředí programu GeoGebra

Na stránce geogebra.org najde uživatel programu GeoGebra celou infrastrukturu nástrojů a funkcí, které spolu s vlastním programem vytvářejí prostředí pro efektivní počítačovou podporu výuky matematiky. Z této stránky lze v online režimu prostřednictvím libovolného prohlížeče spustit i samotný program GeoGebra, bez nutnosti jeho instalace. V něm vytvořené soubory pak lze ukládat a dále používat jak v počítači, tak i v cloudovém prostředí stránky, pokud na ní máme vytvořený profil. Uživatel se pak sám může rozhodnout, zda materiály takto na stránce uložené zpřístupní dalším uživatelům, všem nebo jenom pozvaným, nebo je před nimi skryje. V současné době je na stránce geogebra.org veřejně dostupných, k volnému používání i modifikaci, přes jeden milion materiálů od autorů z celého světa. Prostřednictvím online prostředí je tak program GeoGebra se všemi svými funkcemi i s obrovským množstvím materiálů v něm vytvořených bezprostředně dostupný na každém zařízení s připojením na internet a s prohlížečem webových stránek, bez ohledu na operační systém.

Již bylo zmíněno, že každý uživatel získá bezplatným vytvořením svého profilu na stránce geogebra.org přístup ke všem jejím službám. Jedná se především o možnost ukládat zde své materiály a sdílet je s ostatními uživateli, buď prostřednictvím odkazu, nebo veřejně, prostřednictvím vyhledávání. Materiály ostatních uživatelů pak lze volně používat, stahovat, případně dále modifikovat. Učitel tak má své materiály vždy dostupné prostřednictvím připojení k internetu a pomocí odkazů je může sdílet se svými žáky. Materiály lze ukládat izolovaně, nebo formou jejich strukturovaných kolekcí, tzv. GeoGebra knih [3], v kombinaci s textem, obrázky, videi, testovými otázkami a dalšími prvky. Pro učitele velmi užitečná možnost přípravy materiálů a jejich ucelených souborů pro výuku rozličných témat, viz například [8], [9], [6].

Další pro učitele velmi užitečnou službou portálu geogebra.org je možnost formování skupin uživatelů [4], jakýchsi uzavřených diskusních fór, v jejichž rámci lze sdílet materiály. Učitel může tento režim využít pro distribuci materiálů mezi žáky třídy nebo studijní skupiny. Zpětnou vazbu od žáků získá v rámci diskuse, sdílení materiálů nebo prostřednictvím do skupiny zadaných testů. Materiály mohou mít různé formy, nemusí se jednat jenom o dynamické geometrické obrázky. Jednou z forem je právě testová otázka, otevřená i uzavřená. Sdružením více otázek pak vznikne online test. Prostředí skupiny poskytuje přehlednou evidenci pro správu odevzdávání a hodnocení těchto testů. Na Obr. 1

je zachyceno zadání konkrétního úkolu z matematiky ZŠ využívající kombinaci textu, obrázku a testové otázky, které je převzaté z GeoGebra knihy [8] doplňující bakalářskou práci [7]. V této práci autorka uvádí návody na tvorbu různých aktivit v GeoGebře, jak

Obrázek 1: Zadání úlohy; kombinace text, obrázku a testové otázky, [8]

v offline verzi programu, tak i v online prostředí. Konkrétně se věnuje například tvorbě online pracovních listů, jejich sdružování do GeoGebra knih [3] a distribuci žákům konkrétní třídy prostřednictvím skupiny [4].

2 Využití online prostředí ve výuce na ZŠ

Ověřování možností využití online prostředí GeoGebry provádí první autorka již druhým rokem v rámci své výuky matematiky na ZŠ Horní Planá. Nejprve začala program používat v hodinách geometrie. Pracovala s předem připravenými applety s dynamickými animacemi postupů konstrukcí vybraných úloh, například konstrukce obrazu v osové či středové souměrnosti, které poskytovala žákům jako oporu jejich práce. To jí dovolovalo věnovat se individuálním potřebám jednotlivých žáků. Hojně také využívala materiály ve formě pracovních listů, při jejichž použití kombinovala vytisknuté listy s dynamickými applety a formuláři zobrazenými na interaktivní tabuli. Použité materiály jsou uvedeny v [8], komentáře k jejich tvorbě a použití pak zájemce najde v [7].

Ve druhém roce práce s online prostředím GeoGebry autorka začala využívat prostředí skupin. Své žáky s prostředím nejprve podrobně seznámila, vedla je k založení osobních profilů a naučila je, jak vytvářet a ukládat strukturované materiály s využitím dynamických appletů, obrázků, textu, případně PDF souboru. Založila skupinu uživatelů, „virtuální třídu“, do které se přihlásili všichni žáci příslušné třídy. Další distribuce materiálů, vytvořených vyučující i žáky, pak probíhala v rámci této skupiny. Skupina funguje jako jednoduchá „sociální síť“. Žáci mají možnost komentovat jednotlivé příspěvky, případně mohou do skupiny vkládat vlastní materiály. Učitel, jako správce skupiny, má možnost komentáře spravovat a reagovat na ně. Tak je možné také přispět ke kultivaci chování žáků na sociální síti. Pro učitele velmi praktickou funkcí je hodnocení práce žáků. Prostředí skupiny poskytuje administrátorovi jednoduchý systém správy řešení úkolů, kde se eviduje stupeň rozpracovanosti, datum odevzdání a splnění úkolů. Učitel má samozřejmě možnost odevzdané úkoly žákům okomentovat a poskytnout jim tak potřebnou zpětnou vazbu. Profil člena skupiny je možné propojit s e-mailovou schránkou. Žáci tak mají o novém úkolu nebo o komentáři a hodnocení toho odevzdaného okamžitou informaci.

3 Závěr

Dle dosavadních zkušeností s programem GeoGebra a jeho online prostředím geogebra.org lze říci, že se jedná o efektivní prostředek podpory výuky a studia matematiky. Funkce programu, jeho obsluha i nabídka služeb jeho webového prostředí odpovídají současnému stavu vývoje digitálních technologií i potřebám vzdělávání v matematice. Žákům program se svým online prostředím poskytuje komplexní pohled na studované matematické téma, přináší jim možnost experimentovat a objevovat v matematice a napomáhá jim v lepším pochopení některých partií učiva. Důležitým efektem jeho použití je, díky komplexnosti online služeb, i kultivace a rozvoj žákovy digitální gramotnosti [1]. Učitelům pak program spolu s online prostředím přináší nástroj pro „dělání“ matematiky s žáky i pro organizaci jejich práce, ve škole i doma. Poznatky z praktického použití ve výuce, učiněné autorkou, zároveň poukazují na skutečnost, že pro efektivní využití těchto prostředků je důležité jejich promyšlené a cílevědomé použití, nikoliv jako prostředků jediných, ale v kombinaci s tradičními postupy jako jsou například psaní, rýsování, manipulace s reálnými objekty nebo autentická diskuse a kolektivní či individuální řešení problému.

Literatura:

[1] *Podpora rozvoje digitální gramotnosti* [online], 2020.
Dostupné na `https://digigram.cz`

[2] *GeoGebra matematické aplikace* Dostupné na `https://www.geogebra.org`

[3] GeoGebra Docu Team: *GeoGebra Book Editor* [online], 2015. Dostupné na `https://www.geogebra.org/m/P5ZrjOSu`

[4] GeoGebra Docu Team: *GeoGebra Groups* [online], 2015. Dostupné na `https://www.geogebra.org/b/rQrbooeq#chapter/0`

[5] Hašek, R. Dynamická geometrie online. In D. Velichová, M. Lávička, & S. Tomiczková, *Proceedings of the Slovak—Czech conference on geometry and graphics*. Bratislava: SCHK, 2017, str. 77-82.

[6] Hašek, R. *Dynamická geometrie online* [online], GeoGebra Book, 2017. Dostupné na `https://www.geogebra.org/m/mDUCf25K`

[7] Košařová, M. *Tvorba a užití materiálů pro výuku matematiky základní školy v prostředí programu GeoGebra* (bakalářská práce), Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2018.

[8] Košařová, M. *Ukázka možnosti využití programu GeoGebra na ZŠ* [online], GeoGebra Book, 2019. Dostupné na `https://www.geogebra.org/m/Ysqtpc8C`

[9] Košařová, M. *Výuka matematiky na ZŠ s podporou online prostředí GeoGebry* [online], GeoGebra Book, 2019. Dostupné na `https://www.geogebra.org/m/wg3an9pm`

Monika Košařová
Jihočeská univerzita v Č. B.
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
37115 České Budějovice
e-mail: kosarm01@pf.jcu.cz

Roman Hašek
Jihočeská univerzita v Č. B.
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
37115 České Budějovice
e-mail: hasek@pf.jcu.cz

MATEMATICKOU CESTOU K TECHNICE – SAMOSVORNÉ KLEŠTĚ

Hana Mahnelová

Gymnázium Dr. Josefa Pekaře, Mladá Boleslav

Abstrakt: Samosvorné kleště jsou četně využívaný důmyslný nástroj, na kterém lze ukázat aplikovanou matematiku. V několika úlohách určených středoškolákům vysvětlíme podstatu jejich fungování na základě znalostí z učiva geometrická místa bodů, vlastností mocninné funkce, funkce druhá odmocnina, funkce kosinus v daném intervalu, řešení pravoúhlého a obecného trojúhelníka. Ukážeme, jak je možné využít počítačového modelování. Součástí textu jsou formulace úkolů (včetně řešení) přímo použitelných ve výuce. Příklady jsou rozšířeny o odvození kinematické rovnice kleští.

Klíčová slova: Samosvorné kleště, aplikovaná matematika, geometrická místa bodů, mocninné funkce, funkce druhá odmocnina, funkce kosinus, kinematická rovnice.

Mathematical way to technology –The self-locking pliers

Abstract: The self-locking pliers are an example of a mechanical linkage with one degree of freedom. Two of its four joints move along circular trajectories, one of them, the so-called driving point, affects the distribution and transmission of force. Using a dynamic computer model, it is possible to demonstrate the rate of change of length with which the size of the lever, transmission and the gripping of the pliers change. The example can conveniently be used to demonstrate the practical application of mathematical concepts such as locus of points, power function properties, square root function, cosine function at a given interval, properties of a right and general triangle. In the paper, the kinematic equation of the pliers will be derived.

Key words: Kinematics, linkage, self-locking pliers, geometry model.

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2019_Mahnelova.pdf

PODPORA UČENÍ SE LIMITÁM FORMOU DIGITÁLNÍ HRY VARIANT: LIMITS

Zuzana Pátíková, Lubomír Sedláček

Fakulta aplikované informatiky, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Abstrakt: Vzdělávací hry jsou v dnešní době moderní a rychle se rozvíjející oblastí vzdělávání. Jako prostředek ke snižování neúspěšnosti při studiu matematické analýzy vyvinula firma *Triseum* při Texas A&M University počítačovou hru *Variant: Limits* zaměřenou na konceptuální porozumění základním pojmům kalkulu. *Variant: Limits* propojuje prostředí klasických počítačových her se světem matematiky, čímž dochází ke vzdělávání studentů zábavnou, avšak sofistikovanou formou, která vede k hlubšímu pochopení jednotlivých konceptů kalkulu.

Klíčová slova: Variant: Limits, počítačové hry, Game Based Learning, funkce, limita funkce

Support of learning limits with the use of the digital game Variant: Limits

Abstract: Educational games are nowadays a modern and rapidly developing area of education. As a means of reducing study failures in mathematical analysis, the company Triseum in cooperation with Texas A&M University has developed a computer game Variant: Limits, aimed at conceptual understanding of the basic concepts of the calculus. Variant: Limits connects the classical computer games environment with the world of mathematics, which leads to the education of students in a fun but sophisticated way, providing a deeper understanding of the various concepts of the calculus.

Key words: Variant: Limits, computer games, Game Based Learning, functions, limit of function

Úvod

Podpora implementace digitálních technologií do výuky je mimo jiné aktuálním tématem podporovaným ministerstvem školství. Zároveň jsou digitální technologie se zaměřením na vzdělávání jednou z rychle se rozvíjejících oblastí posledních let. Tzv. *Smart games*, tedy hry, jejichž hlavním cílem není jen zábava, ale spíše kombinace cílů motivačních a výchovně vzdělávacích, mají již několik let svůj odborný časopis [1], konferenci [2] a žebříček oceněných her. Jsou publikovány dokonce i monografie (např. [3]).

Toto je stav, za jehož počátek se svým způsobem dá označit kniha *Keitha Devlina* [4] z roku 2011, ve které prorokoval rozvoj využití digitálních technologií pro vytvoření herních prostředí vhodných pro konceptuální pochopení matematických témat.

Skutečně, v posledních letech došlo k uvedení her zaměřených na konkrétní matematické oblasti, z nichž některé v žebříčcích vzdělávacích digitálních podpor zaujímají přední místa. Většina z nich je adresována žákům základních škol, což je jistě dáno povahou věci i náročností matematických témat, která takto mohou být zpracována.

Jednou z prvních vlaštovek, která míří až do posledního ročníku středních škol a na školy vysoké, je 3D videohra *Variant: Limits*, kterou vyvinula firma *Triseum* [5], spolupracující s akademickými pracovníky Texas A&M University. Za zmínku stojí, že hra získala v roce 2017 zlatou medaili *International Serious Play Awards*. Cílem tohoto článku je představit ji čtenářům.

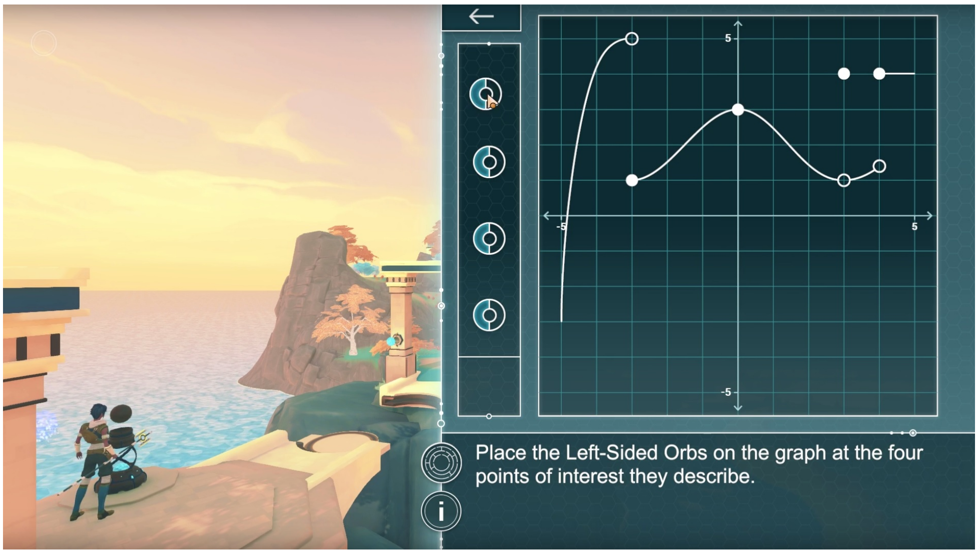
Charakteristika hry

Prostředím hry je graficky propracovaný virtuální 3D svět typu science fiction. Hlavní hrdinka se snaží svým konáním zabránit dalším elektromagnetickým bouřím a tak pomoci již částečně poničené planetě. Hru lze hrát na počítačích se systémy Windows nebo Apple, je nutný stálý přístup k Internetu. Vlastní hra má čtyři zóny, vzdělávací složka každé z nich

Obrázek 1: Ukázka grafického prostředí hry *Variant: Limits*.

je zaměřena převážně na jiné matematické téma, v průběhu hry však dochází i k opakování a kombinaci schopností dříve nabytých. Hra je první z plánované kolekce her pro výuku kalkulu a pokrývá téma funkce, limit a spojitosti.

- **Zóna 1** je zaměřena na chování funkce v bodě. Hráč se naučí v grafu určit, ve kterých bodech existuje limita jednostranná, limita funkce jako taková, funkční hodnota a kde limita neexistuje. Pro funkci zadanou grafem hráč určí, je-li funkce v daném bodě spojitá.

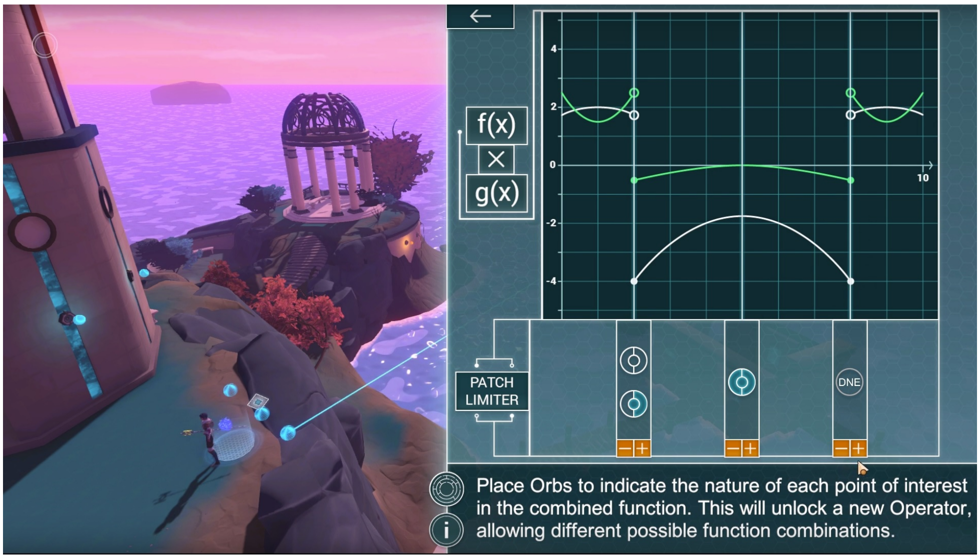


Obrázek 2: Ukázka úkolu ze Zóny 1.

- **Zóna 2** pracuje s pojmem funkce, s funkčními hodnotami a pravidly pro limity funkcí v bodě. Hráč se naučí dosáhnout chtěné výsledné hodnoty limity nebo hodnoty funkce na základě pravidel pro počítání s limitami.

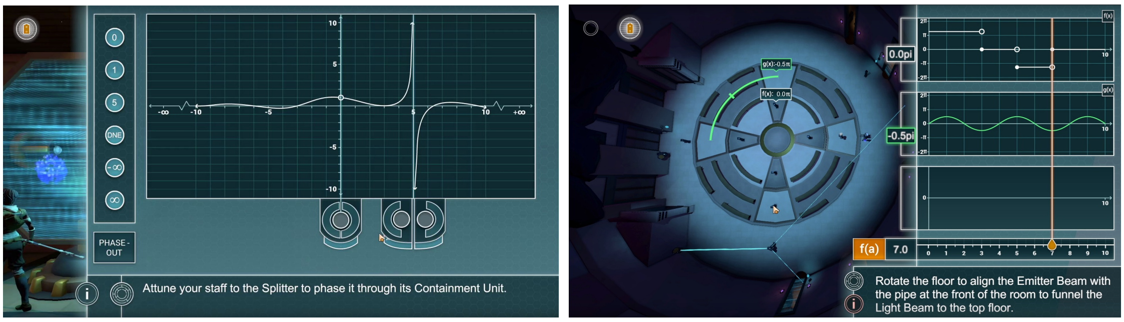
Obrázek 3: Ukázka úkolu ze Zóny 2.

- V **Zóně 3** je tématem vztah limit a spojitosti. Hráč zvládne odvodit chování součtu, součinu a podílu dvou funkcí v jejich bodech nespojitosti a aplikovat větu o nabývání mezihodnot pro spojité funkce.



Obrázek 4: Ukázka úkolu ze Zóny 3.

- **Zóna 4** se zabývá nevlastními limitami pro neznámou jdoucí do plus-mínus nekonečna i limitami v nevlastních bodech. Hráč zvládne identifikovat vertikální asymptoty.



Obrázek 5: Ukázka úkolů ze Zóny 4.

Hlavní postavou hry je Equa, dívka, která se probudí v hlavní základně hry s názvem Centroid. Zde se naučí ovládat svůj pohyb a interagovat s potřebnými herními prvky, jako jsou například krystaly uchovávající zvukový záznam z dob minulých. Equu hrou doprovází hlasy z Centroidu (Celare a Preceptor), které jí vysvětlují stav věcí a radí jí, co je potřeba udělat. Hra se odehrává na virtuální planetě poničené z důvodu slunečních erupcí a magnetických bouří. Hlavní hrdinka se pohybuje liduprázdnou krajinou a poničeným městem a následuje pokynů Preceptora s cílem udělat, co se dá, pro zamezení dalších pohrom. O tom, co se na planetě stalo a jaké osudy potkaly původní obyvatele, se Equa dozvídá průběžně ze záznamů uchovaných ve speciálních krystalech.

Equiným úkolem je nejprve zprovoznit záložní vysílače energie pro opětovné vysunutí mostů, uvést do chodu napájení transmaterializační platformy nebo odstranit překážky z cesty. Dochází k dalším slunečním erupcím a magnetických bouřím, které ohrožují život na planetě. Pro zastavení bouří se Equa snaží nejprve dostat k Rozvodně, hlavní monitorovací jednotce planety, a přivést energii do záložního uzlu pro stav nouze. Poté je cílem Equy přesun do Archivária, centra učení a historie ve městě. Proto musí přivést energii do určené transmaterializační platformy za pomocí speciálních krystalů, které jsou rozptýlené po přilehlé oblasti. V Archiváriu Equa pomalu obnovuje proud energie vedoucí k centrálnímu generátoru, který přerozděluje energii a ukončuje magnetické bouře. K tomu je potřeba strategicky rozmístit rozbočovače, které přesměrovávají energetický tok na správná místa.

Ověřovací studie

Hra *Variant: Limits* byla uvedena na trh na jaře roku 2017. Vzápětí došlo na Texas A&M University k vytvoření čtyřtýdenního praktického herního kurzu, který byl nabídnut převážně studentům STEM jako doplněk k tradičním kurzům vyučujícím kalkulus. Jeho účelem není nahradit klasickou výuku tohoto tématu, ale spíše poskytnout flexibilní a dynamické prostředí, ve kterém lze zkoušet a testovat praktické dopady manipulace s matematickými objekty a koncepty. Tento pilotní kurz dopadl úspěšně, zúčastnění studenti dosáhli v tradičních kurzech nadprůměrných výsledků [6]. V sebehodnocení 72-85 % studentů uvedlo například, že hra přispěla ke zvýšení jejich znalostí, že hlavní koncepty učiva lze ze hry pochopit, že herní aktivity byly relevantní vzhledem k učivu, že zvládli zůstat koncentrovaní na hru, že se jejich znalosti a schopnosti v průběhu hry zlepšovaly. Z osobních komentářů je zřejmé, že hra byla vnímána jako velmi dobrý motivační prvek. Celkově studie ukázala, že zařazování herních prvků do vyučování má velký potenciál, a to zejména co se týká motivace studentů, jejich aktivního zapojení do učebního procesu i upevňování znalostí.

Pro hlubší ověření účinku hry byl v období červenec 2017 až červen 2018 organizacemi European Schoolnet, *Triseum* a Universität Würzburg realizován mezinárodní projekt, do kterého bylo zapojeno 20 učitelů z Řecka, Itálie, Norska, Polska a Portugalska. Dvoufázový dotazníkový výzkum prokázal silný motivační efekt hry *Variant: Limits* [7]. Učitelé potvrdili po zařazení hry jako doplňku výuky větší zájem a aktivnější zapojení studentů. Různí učitelé volili k práci s hrou různé přístupy, většina z nich dala přednost kombinaci domácích i školních aktivit. Studenti byli podporováni v různých formách týmové spolupráce. Pro potřeby zařazení hry do školního vyučování došlo k vytvoření různých implementačních scénářů vyučovacích jednotek. Hlavním výsledkem šetření je potvrzení pozitivního vlivu na osvojování vědomostí a souvislostí mezi pojmy a objekty v daném tématu a silného motivačního efektu.

Naše zkušenosti

O hře *Variant: Limits* jsme se dozvěděli z internetových zdrojů a protože u technicky zaměřených oborů vnímáme potřebu podporovat výuku matematiky všemi možnými prostředky, požádali jsme firmu *Triseum* o demo verzi hry. Demo zahrnuje úvod do hry a necelé dvě zóny. Hra nás zaujala a z komunikace s *Triseem* vyplynulo, že učitelům poskytují zdarma plnou verzi hry na omezenou dobu 14 dnů. Využili jsme tuto možnost, abychom byli schopni na základě vlastní zkušeností zhodnotit rozsah implementovaných témat a případně vhodnost pro zařazení do našich aktivit.

V našich kurzech matematiky pro první ročníky různých oborů se limity probírají, ale pozornost je spíše zaměřena na procedurální počítání limit daných funkcí než na hlubší pochopení konceptů. Na druhou stranu se dá předpokládat, že student, který projde hrou posilující porozumění souvislostem a jejich grafické reprezentaci, bude na základě lepšího vhledu lépe zvládat i konkrétní výpočty. Nakonec jsme se rozhodli pro pilotní testování zájmu o hru našimi studenty. Vzhledem k tomu, že u nás hru nelze z časových důvodů zařadit jako součást běžného kurzu, rozhodli jsme se pro nabídnutí hry zájemcům z řad studentů jako nepovinné součásti domácí přípravy. Překvapil nás velký zájem z řad studentů Fakulty aplikované informatiky, naopak na Fakultě technologické byl znatelný ostych z neznámého zejména u slabších studentů. V zimním semestru akademického roku 2019/20 tak probíhá první pokus zpřístupnit studentům hru *Variant: Limits.*

Zakoupili jsme celkem 50 licencí (jedna je v ceně cca 800 Kč), s tím jsme získali neomezený přístup ke hře pro skupinu zapojených vyučujících a také možnost spravovat virtuální třídu a sledovat pokroky jednotlivých studentů. Ve webovém rozhraní máme k dispozici i zdroje pro učitele – videa a texty mimo jiné s návrhy zařazení aktivit do vyučovacích jednotek. Po ukončení tohoto semestru dojde k vyhodnocení zkušeností a k rozhodnutí o případné další spolupráci s firmou *Triseum.* Vzhledem k tomu, že firma do budoucna plánuje pokrýt i další témata kalkulu, je pro nás zajímavé sledovat novinky pocházející z její produkce.

Jsme si vědomi toho, že překážkou v hraní hry *Variant: Limits* mohou být jazykové schopnosti studentů. Hra je zatím v angličtině (a čínštině) a původní názor firmy *Triseum* na možný překlad byl spíše nerozhodný. Ze závěrů mezinárodního projektu vyplynula i vhodnost překladu do rodné řeči zapojených studentů, ale tento požadavek nevzešel od většiny zapojených skupin. Někteří učitelé naopak kladně hodnotili souběžné vzdělávání studentů i v angličtině. Naše zkušenost s hrou nás nakonec motivovala k překladu do češtiny. Důvodem je to, že angličtina sci-fi příběhu je srozumitelná jen velmi pokročilým studentům a byla by škoda, kdyby z důvodu neporozumění jazyku hráči ztratili možnost sledovat příběhovou linii hry. Momentálně jsou překlady přístupné na webových stránkách Maths Support Centra [8] při Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně a doufáme, že pro příští akademický rok se podaří domluvit implementaci českých titulků přímo do hry.

Závěr

Jestliže existuje oblast matematiky, která se jeví jako málo vhodná pro použití *Game Based Learning* (vzdělávání hraním digitálních her), pak je to právě infitezimální počet. Přesto se společnosti *Triseum* podařilo vytvořit skvělou hru, která promění, pro studenty obecně komplikované téma kalkulu, ve fantastické dobrodružství. Studenti jsou vtaženi do přesvědčivého, esteticky příjemného, virtuálního 3D světa, ve kterém zažívají stejně euforické pocity jako při hraní běžné mainstreamové videohry, i když takové, kde nepřáteli nejsou žádní trolové, nýbrž matematické funkce, jejich limity, asymptoty a další matematické pojmy. Díky tomu je hráč schopen udržet pozornost i několik hodin a hra se stává účinným aktivačním nástrojem i mocnou motivační silou, kterou při výuce matematiky tak často hledáme a ne vždycky nacházíme. Výhodou je také zpětná vazba, která je hráči poskytnuta okamžitě, možnost individuálního tempa při hře a jeho aktivní role, díky níž se stává aktivním účastníkem procesu učení, čímž získává potřebné znalosti a dosahuje lepších výsledků.

Z formulací jednotlivých matematických úkolů je patrné, že firma *Triseum* spolupracovala velmi úzce s matematickým oddělením Texas University. Jejich plnění skutečně usnadňuje porozumění základním pojmům kalkulu, vizuálním způsobem snáze seznamuje s jeho složitými koncepty a nutí je okamžitě aplikovat v daných situacích. Hra však neposkytuje vysvětlení pro žádný z těchto konceptů, doporučujeme ji proto používat jako doplňkovou aktivitu k základnímu kurzu kalkulu.

Vytvoření počítačové hry *Variant: Limits* považujeme za skvělý počin v oblasti *Game Based Learning* a jsme přesvědčeni, že její použití v procesu vzdělávání může učinit cestu za získáváním vědomostí a dovedností snazší, názornější a hlavně zábavnější.

Literatura:

[1] *International Journal of Serious Games.* [online], 2002. Dostupný na www: http://journal.seriousgamessociety.org.

[2] *The Serious Play Conference.* [online], 2019. Dostupný na www: http://seriousplayconf.com.

[3] LOWRIE, T., JORGENSEN (ZEVENBERGEN), R. *Digital Games and Mathematics Learning.* Springer, 2015. ISBN 978-94-017-9516-6.

[4] DEVLIN, K. *Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning.* 1. vyd. CRC Press, 2011. ISBN 978-15-688-1431-5.

[5] *Triseum.* [online], 2019. Dostupný na www: https://triseum.com/

[6] *Triseum Game-BasedLearning Validation Study, Evaluation Report.* [online], 2018. Dostupný na www: http://storage.eun.org/eun-form-submission/1226/Triseum_Pilot

[7] TIEDE, J., GRAFE, S. *Triseum Game-Based Learning Validation Study Evaluation Report.* 2018, European Schoolnet, Brussels.

[8] *Math Support Centre. Český překlad Variant: Limits.*[online], 2019. Dostupný na www: http://msc.utb.cz/materialy/variant-limits/

Zuzana Pátíková
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
Nad Stráněmi 4511
760 05 Zlín
e-mail: patikova@utb.cz

Lubomír Sedláček
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
Nad Stráněmi 4511
760 05 Zlín
e-mail: lsedlacek@utb.cz

STŘEDOVÁ KOLINEACE NÁZORNĚ

Pirklová Petra, Bímová Daniela

Technická univerzita v Liberci, Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Abstrakt: Středová kolineace v rovině i v prostoru je nedílnou součástí řešení úloh o řezech na „špičatých“ tělesech a plochách. Samotná kolineace v prostoru a její převod do kolineace v rovině je náročný na představu. V tomto ohledu dobře poslouží 3D geometrické programy jako např. GeoGebra, ve kterých lze zavádění a definování středové kolineace v prostoru dobře znázornit, stejně jako její vlastnosti. Přechod z prostorové kolineace do rovinné, v prostředí 3D programu, snadno ukáže zachování podstatných vlastností středové kolineace v rovině.

Klíčová slova: Kolineace, GeoGebra, prostorová představivost, pohyblivý, geometrie.

Central collineation illustratively

Abstract: Central collineation in plane and in space is integral part of the section problems of the solids „with peak“. Collineation in space and its transfer to collineation in plane is very difficult to imagine in space. Therefore 3D software, e.g. GeoGebra, can help with this. Definition and introduction of the collineation can be well illustrated in GeoGebra. Also transfer from space collineation to plane collineation in GeoGebra visibly shows the preservation of the essential properties of the collineation.

Key words: Collineation, GeoGebra, spatial imagination, moveable, geometry.

Úvod

Středová kolineace, ať už v rovině nebo v prostoru, se většinou na školách nevyučuje. Je však důležitou součástí deskriptivní geometrie, které využíváme například při sestrojování řezů těles.

Na Technické univerzitě v Liberci se vyučuje středová kolineace v rovině v rámci předmětů Deskriptivní geometrie 1 na Fakultě architektury a předmětu Geometrie 1 na Fakultě přírodovědně-humanitní a pedagogické. Navazující předmět Geometrie 2 na téže fakultě pak obsahuje středovou kolineaci v prostoru. Tedy rovinná středová kolineace předchází středové kolineaci v prostoru.

Toto zobrazení, ačkoliv má pouze několik vlastností, je pro studenty velice těžké a neprůhledné. Už jen ten fakt, že středová kolineace je zobrazení v projektivně rozšířeném prostoru. Tedy rovnoběžky mají, na rozdíl od projektivně nerozšířeného prostoru, průsečík, s čímž se do té doby studenti nesetkali.

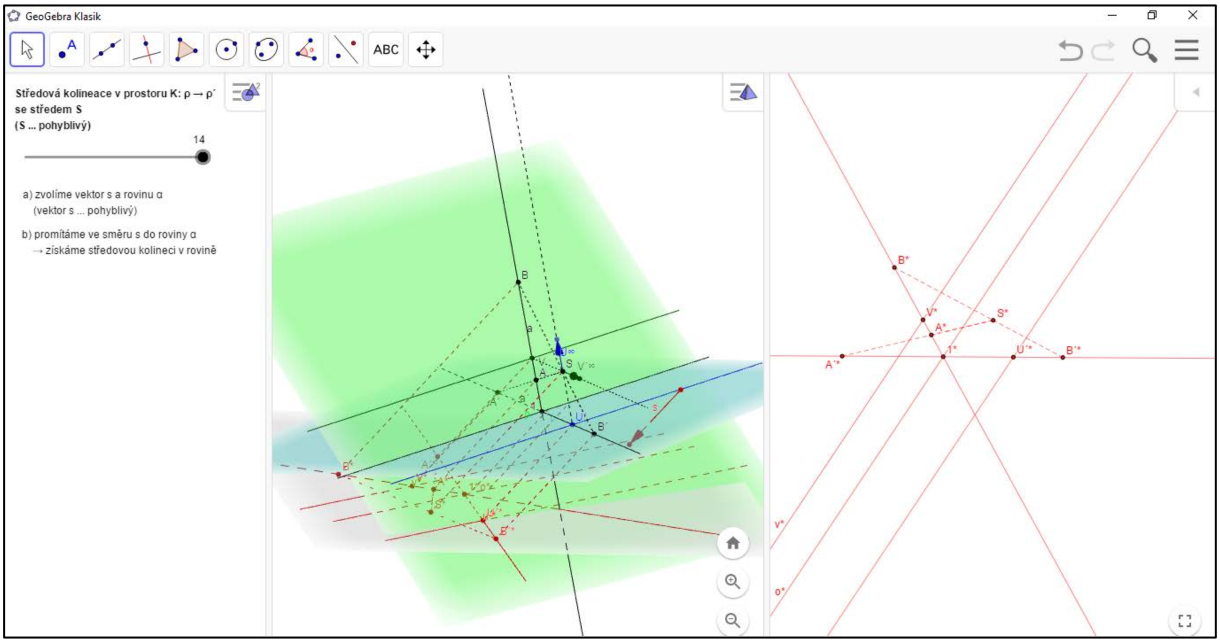
Jak je napsáno výše, vždy se začíná se středovou kolineací v rovině a až posléze přijde na řadu kolineace v prostoru, jako např. v [3]. Tento postup od roviny k prostoru je obvykle považován za přirozený a souvisí samozřejmě s lidským vývojem. Dle našich zkušeností však u středové kolineace toto pořadí není vhodné a při výuce se příliš neosvědčilo. Naopak, pokud studentům nejdříve ukážeme princip středové kolineace v prostoru. Tedy, že zobrazujeme body z jedné roviny do roviny jiné a teprve poté přejdeme k tomu, jak se získá rovinná středová kolineace pomocí rovnoběžného promítání, dokáží si studenti lépe představit zadanou situaci a danou úlohu snadněji vyřešit.

Rovněž jsou ve středové kolineaci v prostoru snáze vidět vlastnosti středové kolineace, kde získáme osu kolineace, proč se přímky, které si v kolineaci odpovídají, protínají právě na ose, jaké prvky jsou samodružné a proč a v neposlední řadě jak vznikají úběžníky a úběžnice. To činí studentům obzvláště velké potíže.

K zavedení prostorové kolineace ve výuce deskriptivní geometrie jsme využili geometrický software GeoGebra. V tomto programu je možné ve 3D okně ukázat celou prostorovou situaci, nahlížet na ni z různých úhlů a tím názorně předvést vlastnosti středové kolineaci v prostoru. V neposlední řadě můžeme také ukázat, jak celou prostorovou situaci promítneme do roviny a jak tedy získáme středovou kolineaci v rovině. GeoGebra také umožňuje umístit vedle sebe v jednom appletu 3D okno s řešením v kolineaci v prostoru a 2D okno s jeho rovnoběžným průmětem ve zvoleném směru do vhodné roviny. Je tedy možné souběžně sledovat řešení úlohy v prostorové a rovinné kolineaci, což studentům velmi pomáhá [5].

1 Applety pro základní úlohy středové kolineace

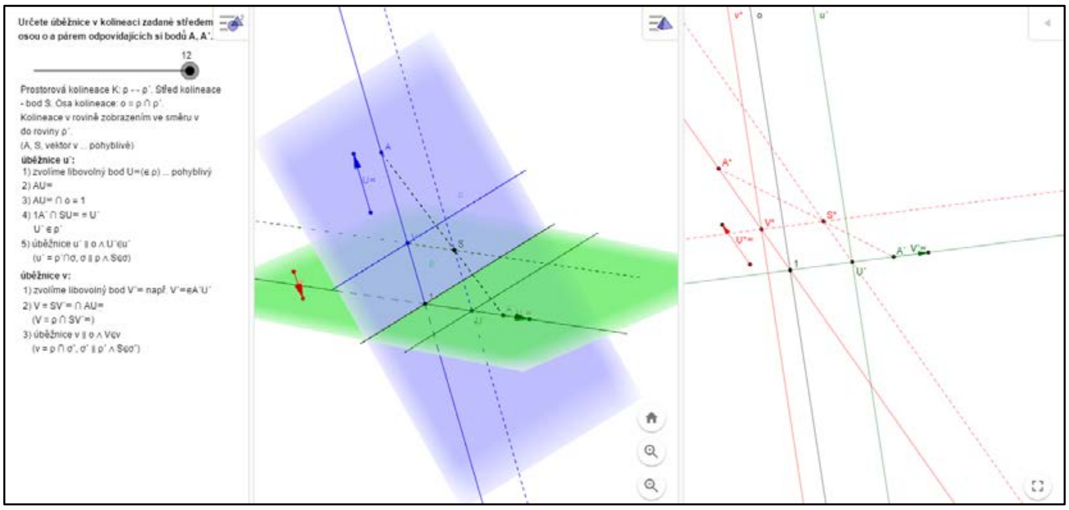
Jednotlivé úlohy na středovou kolineaci jsou uvedeny a řešeny v appletech programu GeoGebra. Applet je tvořen třemi okny. Ve 3D okně je řešena úloha v prostoru, ve 2D okně je pak zobrazen průmět celé úlohy do zvolené roviny a v posledním pomocném okně, je pak uvedeno zadání úlohy, postup konstrukce a jiné potřebné náležitosti konstrukce a také posuvník, díky kterému je celé řešení úlohy krokováno (viz Obrázek 1).



Obrázek 1: Rozvržení oken appletu

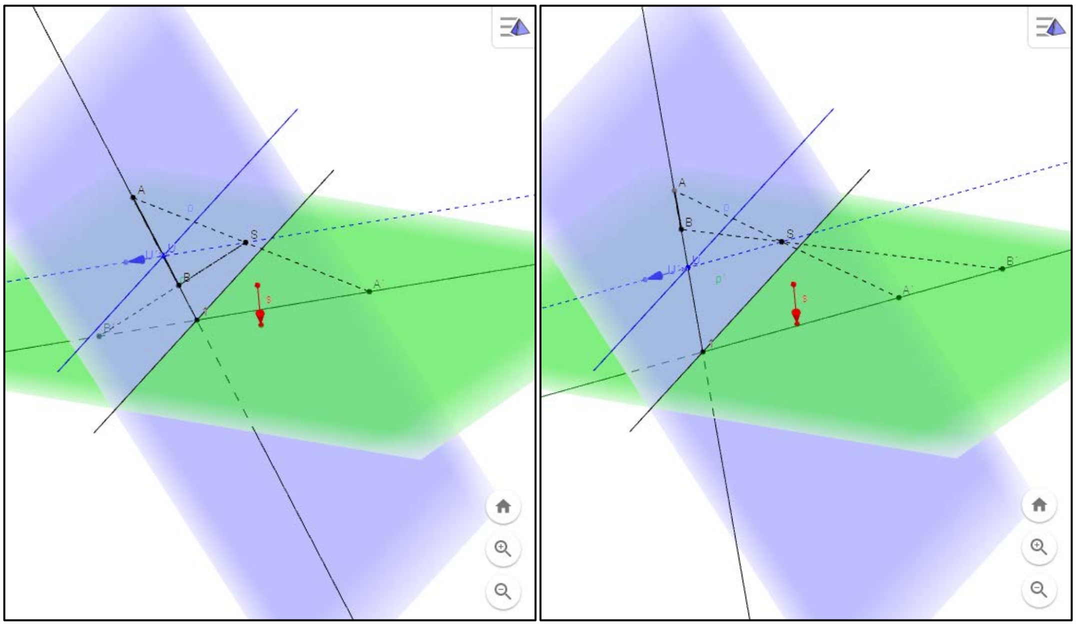
Úlohy jsou zadány nejdříve obrázkem v prostoru, ten se následně zobrazí pomocí vektoru promítání do zvolené roviny. Prostorovou situaci ve většině úloh zobrazujeme do jedné ze zadaných rovin v prostorové kolineaci, aby nebyla potlačena názornost řešení.

Řešení úlohy je uvedeno po jednotlivých krocích, mezi kterými se přepíná pomocí posuvníku. V každém kroku konstrukce se zobrazí část řešení úlohy ve 3D okně (v prostorové kolineaci) a zároveň také ve 2D okně (v kolineaci v rovině). Ve 3D okně však se již nezobrazují jednotlivé konstrukce rovinné kolineace (promítnuté do jedné z rovin), opět kvůli tomu, aby se nesnížila názornost a přehlednost řešení (viz Obrázek 2).



Obrázek 2: Propojení konstrukce v oknech appletu

V jednotlivých appletech lze také většinou se zadanými prvky pohybovat, aby bylo možné studentům předvést, jak se při různém zadání úlohy změní řešení a jaký to má vliv na následnou kolineaci v rovině (viz Obrázek 3). Kterými prvky lze pohybovat je vždy napsáno v pomocném okně appletu, např. v zadání, v příslušném kroku konstrukce atd. Vždy lze také pohybovat s vektorem promítání, pomocí kterého je převáděna prostorová kolineace do rovinné.



Obrázek 3: Změna zadání úlohy

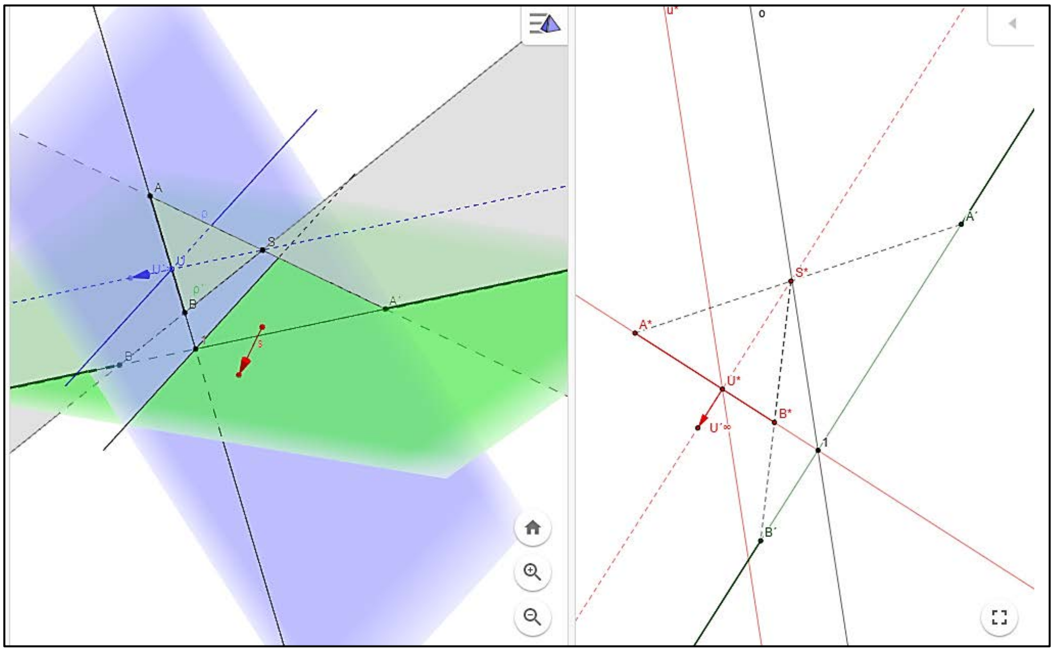
Právě možnost pohybování s body v konstrukci je nedocenitelným prostředkem pro získání představy např. o bodech v nekonečnu. Pokud je nevlastní bod znázorněn vektorem a lze s ním pohybovat, pak při pohybu tohoto vektoru je přímo vidět, jak se mění přímka, která tímto bodem prochází.

Velkým problémem pro studenty je také představa o zobrazování útvaru v kolineaci, pokud je tento útvar proťat úběžnicí. Obraz takového útvaru v kolineaci se „rozpadne“, tedy obrazy některých bodů se zobrazí do nekonečna a obraz celého útvaru prochází nekonečnem. V následujícím textu popíšeme některé úlohy, které se snaží tuto problematiku přiblížit.

1.1 Úsečka v kolineaci

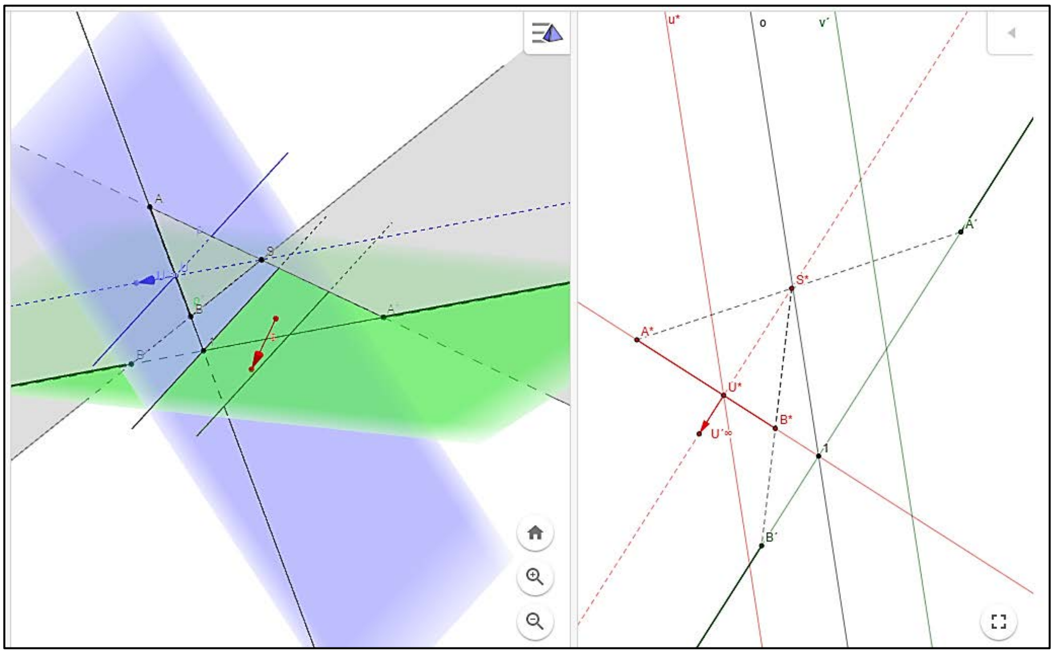
Jednou takovou úlohou, nejjednodušší, je obraz úsečky AB v kolineaci mezi rovinami ρ a ρ' se středem S. Na této úloze můžeme demonstrovat, jak se změní řešení úlohy, pokud úsečka protíná nebo neprotíná úběžnici. Nejdříve je v řešení znázorněna úběžnice, zobrazení přímky AB a bodů A, B.

Následně je nutné správně určit obraz $A'B'$ oné úsečky AB. V appletu je využito, kvůli vyšší názornosti, části roviny, která je vymezena přímkami SA, SB. Tato část roviny tvoří dva rovinné klíny se společným vrcholem S (středem kolineace). Průnik těchto klínů s rovinou ρ' je pak obraz úsečky AB (viz Obrázek 4). Pokud pohybujeme body A, B mění se také řešení podle toho, zda úsečka AB protíná či neprotíná úběžnici u a studenti vidí ve 3D okně názorně z jakého důvodu.



Obrázek 4: Zobrazení úsečky v kolineaci

U této úlohy se zmíníme také o velkém problému studentů při řešení úloh v kolineaci a sice o tom, že příliš nerozlišují, která ze dvou úběžnic protíná daný útvar. Tedy pokud je dána úsečka AB, tápou, zda hledáme její průsečík s úběžnicí u nebo v'. A právě i zde je výhodnější středová kolineace v prostoru, protože v prostorovém obrázku je nejlépe vidět průsečík, s kterou úběžnicí je důležitý, a také to, že druhá úběžnice v' v prostoru danou úsečku protínat nemůže, jelikož leží v jiné rovině než úsečka AB. Ve středové kolineaci v rovině to však patrné není (viz Obrázek 5).



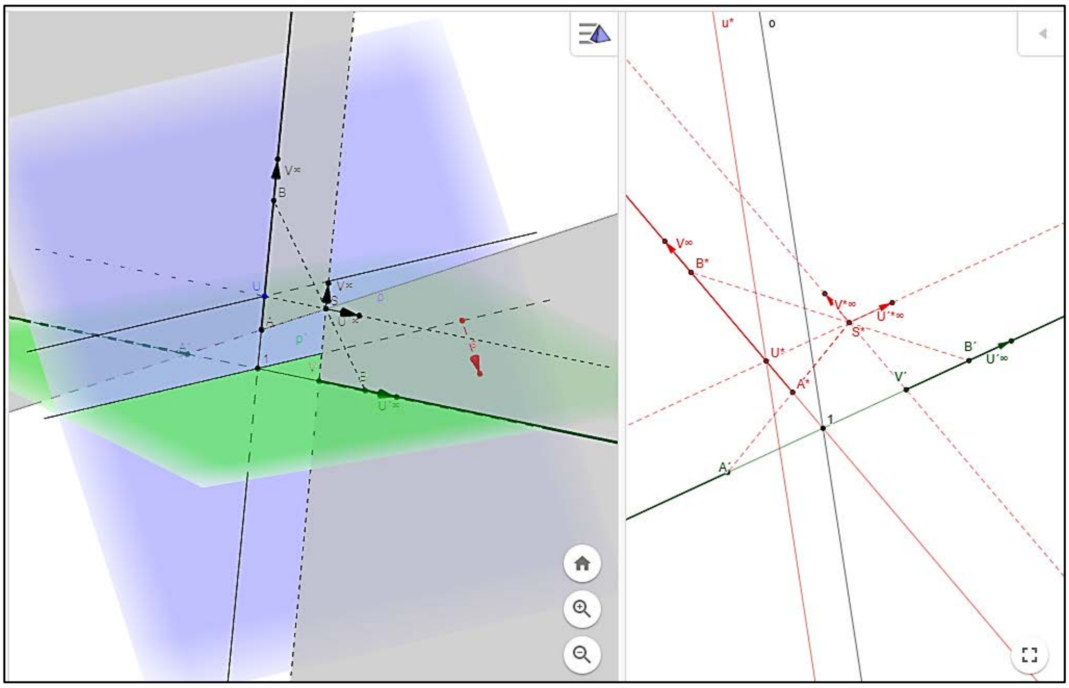
Obrázek 5: Průsečík úsečky s úběžnicí

1.2 Polopřímka v kolineaci

Další úloha, která pomáhá studentům s uchopením představy o nevlastních bodech je zobrazení polopřímky AB ve středové kolineaci. Z klasického Euklidovského prostoru víme, že polopřímka má počáteční bod A a míří do nekonečna. V projektivně rozšířeném prostoru však i tento nevlastní bod V_∞ v nekonečnu existuje a v kolineaci má svůj obraz ve vlastním bodě V.

Tedy můžeme na této úloze ukázat, že obrazem polopřímky AB s nevlastním bodem V_∞, která je vlastně úsečkou AV_∞ v projektivně rozšířeném prostoru, je úsečka $A'V'$, která však může procházet nevlastním bodem, pokud polopřímka AB protíná úběžnici u.

Lepší představu o obrazu polopřímky zajistí jeho znázornění jako řezu roviny ρ' s částí prostoru, která vznikne sjednocením přímek spojujících všechny body polopřímky se středem kolineace S (viz Obrázek 6).

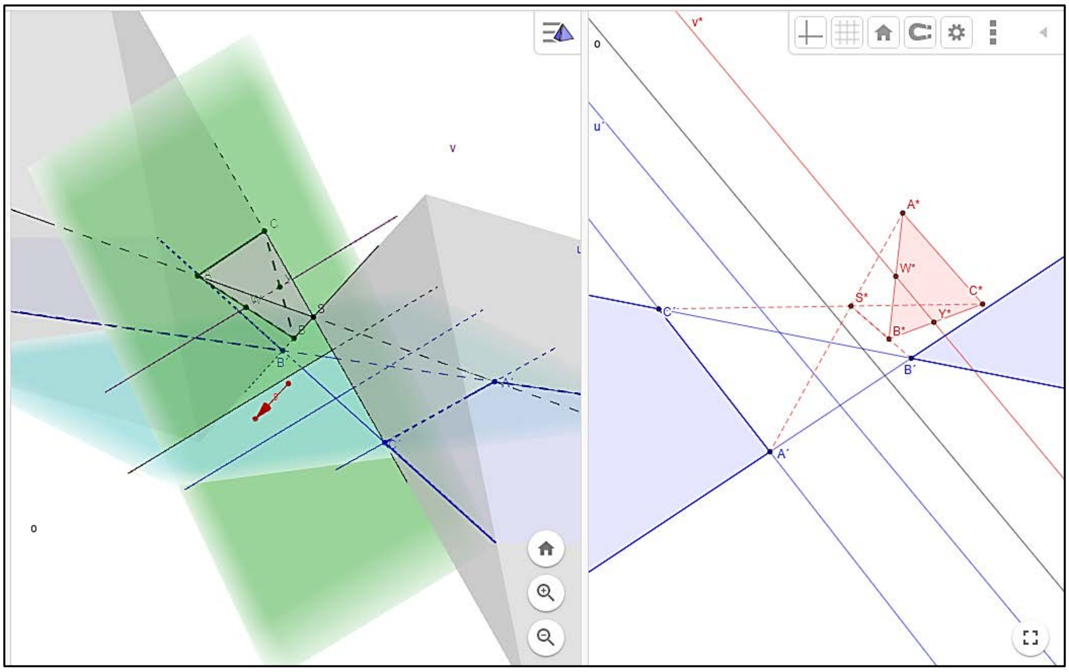


Obrázek 6: Polopřímka v kolineaci

1.3 Mnohoúhelníky v kolineaci

Následujícími příklady na řešení úloh ve středové kolineaci může být již zobrazení mnohoúhelníků jako je trojúhelník, rovnoběžník atd. Studenti již chápou, jakou úběžnici je nutné sestrojit, aby zjistili, zda některé body útvaru nejsou úběžníky a tedy, zda se nezobrazí do nevlastních bodů a zda se obraz útvaru „rozpadne“ či nikoliv.

Při výkladu si lze k lepší názornosti pomoci faktem, že daný např. trojúhelník a jeho obraz ve středové kolineaci jsou řezy trojboké jehlanové plochy dvěma rovinami, což je také zkonstruováno a uvedeno v appletu. Vrchol této jehlanové plochy je středem prostorové kolineace a osou kolineace je průsečnice rovin těchto řezů (viz Obrázek 7).



Obrázek 7: Mnohoúhelník v kolineaci

2 Zobrazení kuželoseček ve středové kolineaci

Pokud studenti zvládnou předchozí základy pro zobrazování v kolineaci následuje zobrazování kuželoseček v kolineaci. Nejčastěji je samozřejmě, kvůli jednoduchosti, ve středové kolineaci zobrazována kružnice.

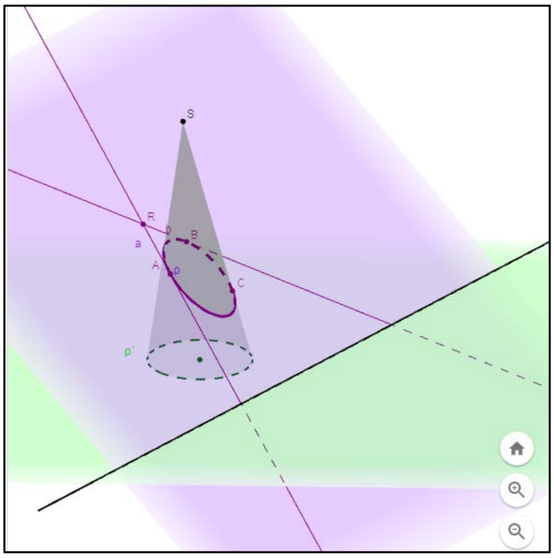
Problémem při zobrazování kružnice pouze pomocí středové kolineace v rovině, je pro studenty těžké pochopit, proč se zobrazuje kružnice na elipsu, hyperbolu nebo parabolu, kdy jednotlivé případy nastávají a jak se tyto kuželosečky pomocí kolineace sestrojují.

Pokud však zdůrazníme, že kružnice a její obraz jsou řezy kuželové plochy, jejíž vrchol je střed kolineace a kolineace v prostoru je mezi rovinou kružnice a rovinou kuželosečky, pak se představa stává jasnější, protože téma kuželoseček vždy tématu středové kolineace v sylabech předmětů, ve kterých se tato témata probírají, předchází.

Zobrazování kuželoseček v kolineaci se také užívá k sestrojování kuželoseček, nemůžeme-li používat ohniskové vlastnosti kuželoseček. Například pokud je kuželosečka zadána tečnami, body atd. V takovém případě je třeba určit vhodnou kolineaci, která hledanou výslednou kuželosečku zobrazuje v ideálním případě na kružnici. Postup je takový, že pomocí daných prvků kuželosečky zvolíme buď střed kolineace nebo osu kolineace. Pokud je zvolen střed kolineace, pak je nutné sestrojit osu kolineace pomocí vzniklých samodružných prvků a pokud je zvolena osa kolineace je nutné sestrojit střed kolineace. U každé úlohy tohoto typu je možné volit jak osu kolineace, tak střed kolineace pomocí různých kombinací zadaných prvků.

Nyní popíšeme některé tyto úlohy řešené v GeoGebra appletech. Jednou z vhodných úloh je např. „Sestrojte kuželosečku, je-li dána její tečna a s bodem dotyku A, tečna b s bodem dotyku B a obecným bodem C.“

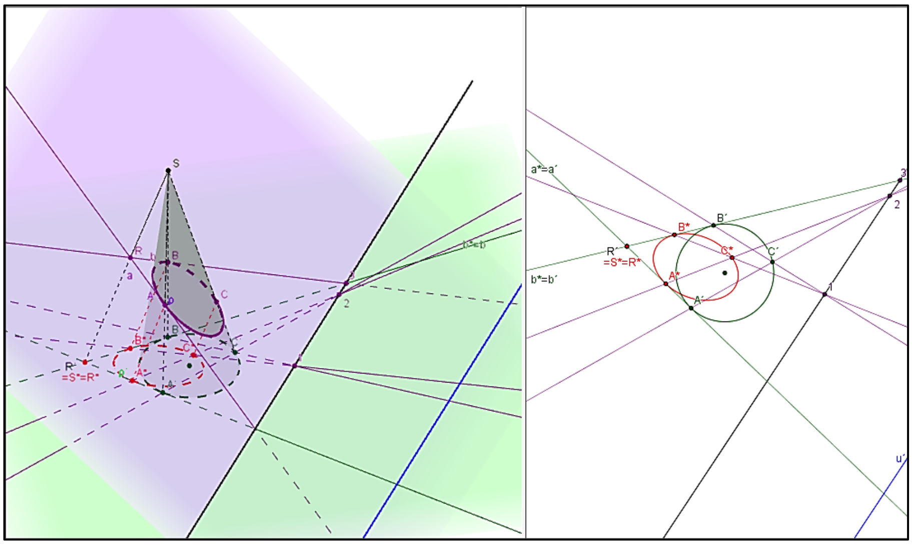
Jednou z vhodných voleb kolineace je např. určení středu kolineace S v průsečíku přímek $R = a \cap b$. V appletu, který tuto úlohu řeší, je kvůli vytvoření správné prostorové představy nejdříve znázorněna kosá kuželová plocha, resp. kosý kužel, protože v programu GeoGebra nelze zobrazit kuželovou plochu, na kterém je hledaná elipsa řezem a také kružnice řezu, která elipse odpovídá v kolineaci se středem ve vrcholu kužele (viz Obrázek 8).



Obrázek 8: Kolineace mezi kružnicí a elipsou

Pomocí této kolineace zobrazíme všechny zadané tečny a body na elipse na tečny ke kružnici a body na kružnici. Tím znázorníme kolineární vztah mezi těmito prvky a zmíněnými kuželosečkami. V appletu je také znázorněna úběžnice, která svou polohou určí typ výsledné kuželosečky.

Dalším krokem appletu je zobrazení prostorové kolineace do roviny (pro jednoduchost do roviny ρ' kružnice). Zde však záleží na zvoleném vektoru promítání, protože na začátku řešení jsme požadovali, aby byl zvolen v rovinné kolineaci střed kolineace v průsečíku tečen $R = a \cap b$. Proto směr promítání musí být právě směr $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SR'}$.



Obrázek 9: Kolineace mezi kružnicí a elipsou – volba středu kolineace

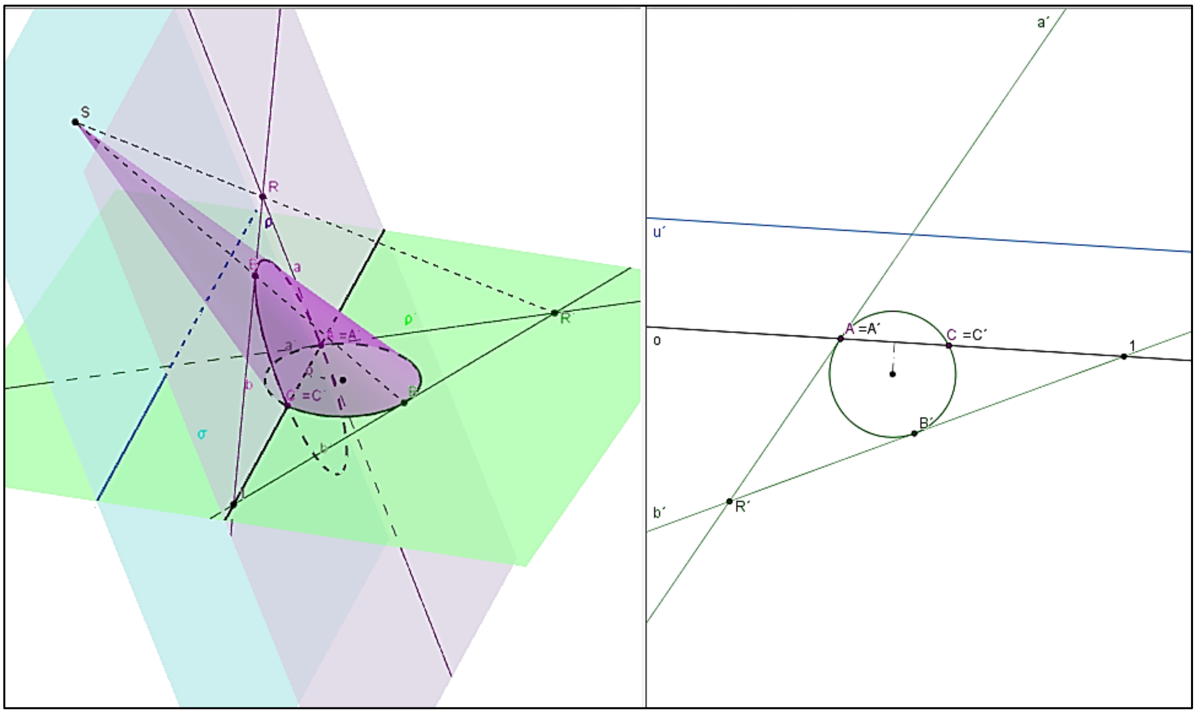
V appletu lze pohybovat s vrcholem kužele, tím se kužel mění a tím se také mění řez plochy v prostoru. Je však stále požadováno, aby druhým řezem byla kružnice, a také se nesmí měnit rovnoběžný průmět řezu do roviny.

Při sestrojování kružnice v rovinné kolineaci je vždy určitá volba, většinou v poloze středu kružnice. Častý dotaz studentů, pak zní, zda tato volba nezapříčiní rozdílné řešení úlohy. Díky prostorovému appletu, kde lze se středem kružnice pohybovat, je názorně vidět, že sice se mění kužel, tím také řez, ale po jeho zobrazení do roviny pomocí rovnoběžného promítání získáme stále stejnou kuželosečku.

Jak již bylo napsáno, lze volit při řešení střed kolineace nebo osu kolineace. Řešení volbou středu kolineace je popsáno výše a nyní uvedeme řešení stejné úlohy, kdy je volena osa kolineace $o = AC$.

Výsledná kuželosečka je vyobrazena už v zadání úlohy. V prvním kroku řešení se objeví kosý kužel s vrcholem S, ve které je výsledná kuželosečka řezem a řezem jinou rovinou je kružnice. Protože však volíme osu kolineace $o = AC$, musí rovina kružnice také obsahovat přímku AC, jelikož osa kolineace je průsečnicí roviny kuželosečky a roviny kružnice. Střed kružnice lze volit libovolně na ose úsečky AC, tím lze měnit poloměr kružnice, tedy také vrchol kuželové plochy, ale kuželosečka řezu se tím nemění.

V dalším kroku je zkonstruována úběžnice $u´$ pomocí roviny rovnoběžné s rovinou kuželosečky vedené středem kolineace S. Tím ověříme typ hledané kuželosečky, jejíž prvky máme zadané (viz Obrázek 10). Posledním krokem je pak zobrazení výsledné kuželosečky pomocí libovolného směru promítání do roviny kružnice (pro jednoduchost).

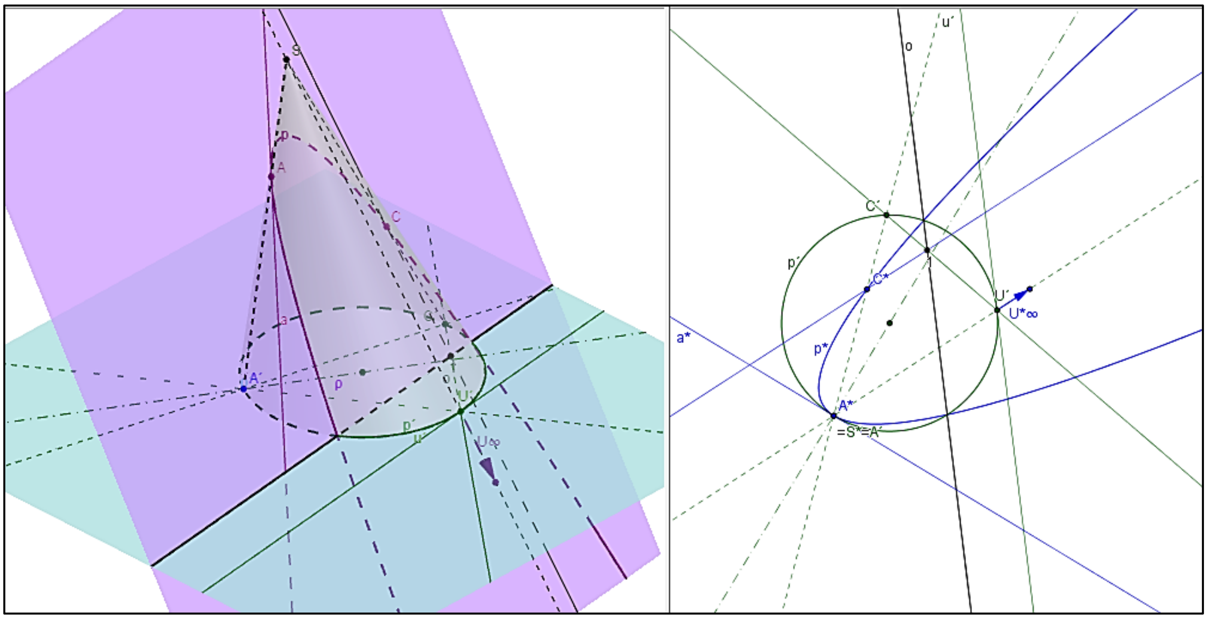


Obrázek 10: Kolineace mezi kružnicí a elipsou – volba osy kolineace

Jiným typem úloh je sestrojení kuželosečky přesného typu ze zadaných prvků např. „Sestrojte parabolu, jsou-li dány dvě její tečny s body dotyku $U_\infty \in u_\infty, A \in a$ a bod C." Tedy jednou tečnou je nevlastní přímka u_∞ a bod dotyku na této tečně je dán směrem U_∞.

V zadání appletu je znázorněna výsledná parabola se zadanými prvky (pro utvoření představy studentů). V dalším kroku se objeví kužel s parabolickým řezem v rovině ρ a podstavnou kružnicí v rovině ρ'. Zde je volen střed kolineace S v bodě A. Tedy v prostoru je volen vrchol kužele S a směrem promítání prostorové kolineace do roviny je směr SA, aby se zachovala samodružnost bodu $A = A'$. Je však samozřejmě možné zvolit střed kolineace v jiném bodě, příp. lze zvolit osu kolineace.

V následujících krocích je konstruována osa kolineace pomocí zvolené kružnice. Tato kružnice má střed na kolmici k přímce a' procházející bodem A'. Opět volíme kružnici s libovolným poloměrem. Snadno v appletu předvedeme, že volba poloměru nemá vliv na průmět paraboly do roviny ve zvoleném směru. Při konstrukci využíváme také velice podstatné vlastnosti, že úběžnice u' musí být tečnou kružnice, aby obrazem kružnice v kolineace byla parabola. Tento krok konstrukce je velice podstatný a je nutné a potřebné jej při výuce zmínit a pomocí appletu předvést (viz Obrázek 11).

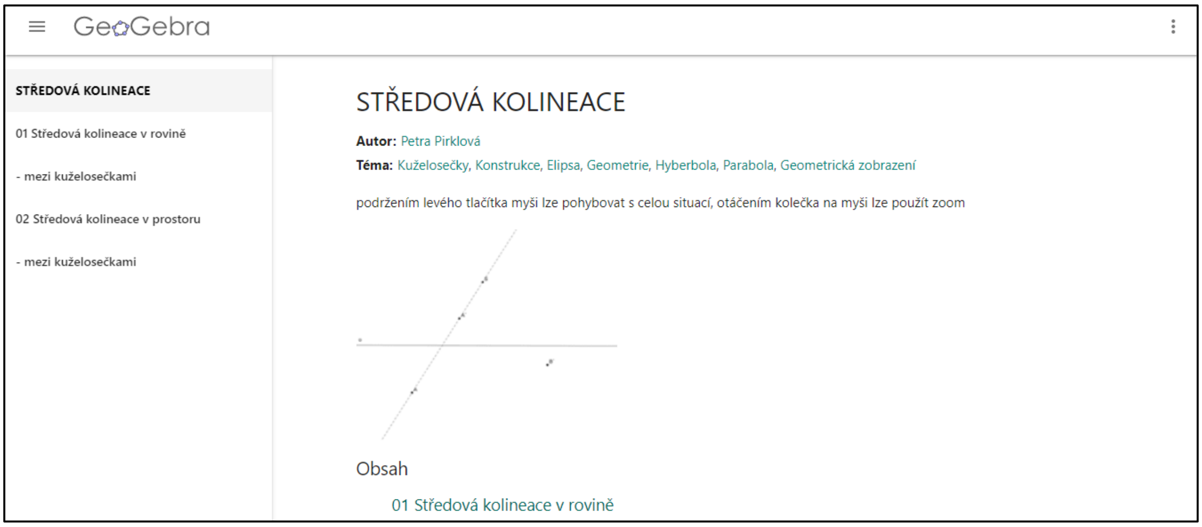


Obrázek 11: Kolineace mezi kružnicí a parabolou

3 GeoGebra kniha „Středová kolineace“

Nejen výše zmíněné úlohy byly pro potřeby studentů i jiných pedagogů vloženy do veřejně přístupné GeoGebra knihy „Středová kolineace“ [1].

V této GeoGebra knize jsou uvedeny jak úlohy v prostorové kolineaci, tak také úlohy řešené pouze v rovinné kolineaci pro porovnání obou přístupů. Případně také proto, aby si čtenář mohl vybrat způsob, který mu více vyhovuje (viz Obrázek 12).



Obrázek 12: GeoGebra kniha

Každý applet v této GeoGebra knize je opatřen posuvníkem, pomocí kterého se postupně objevují kroky konstrukce i s popisem. Také je povolen zoom a otáčení ve všech oknech appletu a v každém appletu je tlačítko na restart konstrukce do původní polohy. Byla snaha vše v appletech nastavit tak, aby jejich obsluha byla jednoduchá a aby úlohy a jejich řešení byly co nejnázornější.

Závěr

V textu popsaný postup od prostorové situace k rovinné při výuce středové kolineace se v hodinách deskriptivní geometrie osvědčil díky názornosti dynamického 3D geometrického softwaru GeoGebra. Z vlastních zkušeností můžeme říci, že tento postup od prostoru k rovině skutečně studentům pomáhá ke snadnějšímu pochopení konstrukcí ve středové kolineaci, která není úplně nejsnadnějším zobrazením, zvláště při zobrazování kuželoseček.

Do výše zmíněné GeoGebra knihy jsou vloženy úlohy podle náročnosti. V každém appletu je popsán postup včetně poznámek a vysvětlivek, které komentují konstrukci a tím napomáhají k pochopení postupu. Tato GeoGebra kniha je sestavena jak pro studenty k procvičování úloh, tak také pro pedagogy, kteří ji mohou využívat ve své výuce.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory Institucionálního plánu TUL pro rok 2019.

Literatura:

[1] GeoGebra kniha - Středová kolineace https://www.geogebra.org/m/mzbt6bqe

[2] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie I*. SNTL Praha, 1964.

[3] Pittalis, M., Christou, C.: *Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 75, No. 2, pp. 191-212, Springer 2010.

[4] Morris, D. L.: *Inverted Geometry*, The Mathematics Teacher, Vol. 31, No. 2, pp. 78-80, National Council of teachers of Mathematics 1938.

Petra Pirklová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2
461 17 Liberec
petra.pirklova@tul.cz

Daniela Bímová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2
461 17 Liberec
daniela.bimova@tul.cz

DIGITÁLNÍ TECHNOLOGIE V PREGRADUÁLNÍ PŘÍPRAVA UČITELŮ MATEMATIKY

Jarmila Robová

Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta

Abstrakt: Rozvíjení digitálních kompetencí budoucích učitelů je důležitou součástí jejich vysokoškolské přípravy. Na MFF UK se budoucí učitelé seznamují s využitím technologií v rámci různých seminářů včetně nového povinného předmětu Informační technologie pro učitele. Hlavním cílem je přispět ke zlepšení digitální gramotnosti budoucích učitelů a pomoci jim dosáhnout úrovně B1 dle evropského rámce digitálních kompetencí učitele. Součástí příspěvku jsou ukázky ze studentských prací vytvářených v programu GeoGebra.

Klíčová slova: Budoucí učitelé, digitální gramotnost, evropský rámec digitálních kompetencí učitelů, GeoGebra.

Digital technologies in pre-service mathematics teachers' training

Abstract: The development of pre-service teachers' digital competences is an important part of their university education. At MFF UK, pre-service teachers are acquainted with using technology in various seminars including new compulsory subject Information Technology for Teachers. The main objective is to improve their digital literacy and help them to achieve the level B1 according to the European framework of teacher digital competences. The paper includes the illustrations of students' applets created in GeoGebra software.

Key words: Pre-service teachers, digital literacy, European framework for the digital competence of educators, GeoGebra.

Úvod

V posledních letech se u nás i ve světě zdůrazňuje potřeba rozvíjet digitální kompetence učitelů, aby byli schopni dobře připravit své žáky na život v digitální společnosti. Ve většině evropských zemí postupně probíhá úprava kurikulárních dokumentů s cílem vybavit žáky i studenty dovednostmi, které jim umožní efektivně využívat technologie v jejich životě [7].

S digitálními kompetencemi je úzce spojen pojem digitální gramotnosti, neboť digitální gramotnost je tvořena souborem digitálních kompetencí. Můžeme se setkat s různými definicemi těchto pojmů. Stručně řečeno, dle [4] rozumíme digitální gramotností soubor vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot, které jedinec potřebuje, aby využíval digitální technologie a digitální média k řadě činností ve svém pracovním i osobním životě; užívání těchto prostředků má být spojeno s kritickým myšlením a samostatností jedince i s efektivností a přiměřeností vzhledem k dané situaci.

Podívejme se tedy na to, jak se v průběhu přibližně posledních dvaceti let měnily požadavky na kompetence učitelů z hlediska využívání digitálních technologií ve školách.

1 Požadavky na implementaci digitálních technologií ve školách

V souvislosti s vývojem technologií se vyvíjely i požadavky na jejich implementaci do výuky na základních i středních školách. Tyto požadavky byly u nás formulovány formou strategických dokumentů.

1.1 Požadavky v období 1999-2008

V roce 1999 byl v České republice přijat usnesením vlády č. 525 dokument *Státní informační politika – cesta k informační společnosti*, který byl následně rozpracován v rámci *Koncepce státní informační politiky ve vzdělávání* (zkráceně SIPVZ). Tento dokument vytyčil dva základní požadavky – zajistit dostupnost digitálních technologií všem účastníkům vzdělávacího procesu ve školách včetně celoživotního vzdělávání a vytvořit základní rámec pro integraci technologií do výuky na všech stupních škol. Dokument rovněž zdůrazňoval klíčovou roli učitelů z hlediska integrace technologií.

Vlastní realizace SIPVZ začala v roce 2001, přičemž v období 2001–2005 byl její součástí projekt *Internet do škol* (zkráceně INDOŠ) zaměřený na zlepšení vybavenosti škol počítači včetně jejich internetového připojení. K cílům realizace SIPVZ také patřilo zvýšení kompetencí učitelů v základních, případně i pokročilejších, uživatelských dovednostech; po celé republice probíhaly kurzy pro učitele zaměřené na dovednosti spojené s používáním počítačů.

V souvislosti se změnou vlády byl projekt SIPVZ předčasně ukončen v roce 2007; v rozpočtovém plánu na období 2007–2010 nebyly již další výdaje na SIPVZ plánovány, samotný projekt nebyl nikdy vyhodnocen.

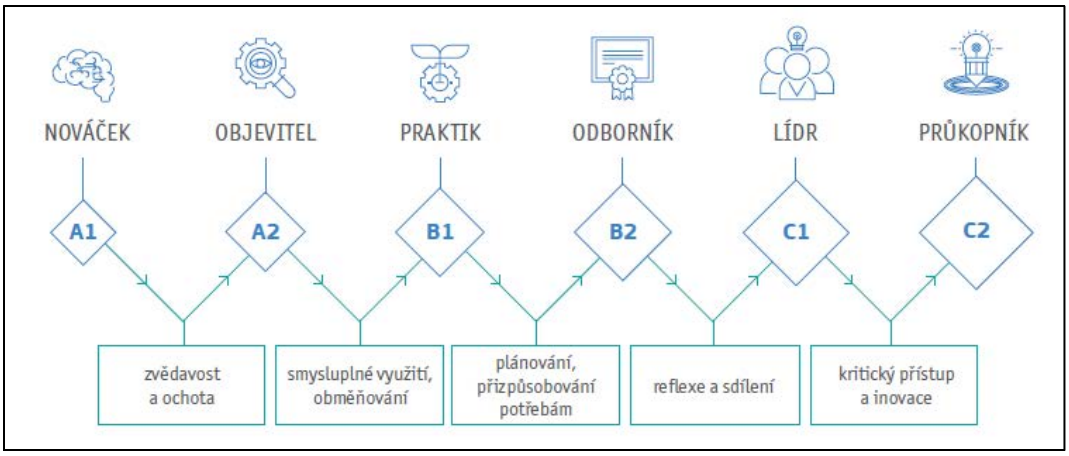
I když průběh i závěr projektu SIPVZ byl často kritizován (časové zpoždění, nedostatky ve financování a organizaci, předčasné ukončení projektu), přinesl nejen lepší vybavenost škol počítačovou technikou, ale z pohledu vyučování především zlepšení počítačových dovedností učitelů.

1.2 Požadavky v období 2009-2019

V důsledku ukončení projektu SIPVZ a tedy i chybějící centrální podpory implementace technologií do škol vznikl v roce 2008 další strategický dokument *Návrh koncepce rozvoje informačních a komunikačních technologií ve vzdělávání v období 2009–2013* (stručně *Koncepce*) [3]. Kromě celostátní i krajské podpory integrace technologií si tento dokument vytyčil za cíl nejen umožnit standardní používání digitálních technologií ve výuce většiny předmětů, ale i využití těchto technologií jako standardního informačního a komunikačního nástroje učitelů a žáků. O rok později, v roce 2009, byl připraven *Akční plán pro realizaci Koncepce*, avšak nebyl legislativně ukotven. To zřejmě přispělo k tomu, že *Koncepce* nebyla plně realizována, některé její části se však podařilo splnit, např. zřízení *Metodického portálu* (https://rvp.cz).

Stejně jako projekt SIPVZ i *Koncepce* podpořila další vybavení škol technologiemi včetně zlepšení počítačových dovedností učitelů; v dokumentu byla rovněž zdůrazněna role učitele při implementaci digitálních technologií. Nezdařilo se však plně realizovat zejména program zaměřený na monitoring implementace digitálních technologií ve školách. MŠMT později upozornilo, že „aktivity vedoucí k proměně tradiční výuky směrem k výuce zaměřené na dovednosti a kompetence, které budou nezbytné pro život v 21. století“ byly nedostatečně podpořeny [4, s. 6].

V roce 2014 byl usnesením vlády č. 538 schválen dokument *Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2020*. Uvedenou strategii rozpracoval dokument *Strategie digitálního vzdělávání do roku 2020* [4]. K cílům uvedené strategie patří otevřít vzdělávání novým metodám a způsobům učení prostřednictvím digitálních technologií, zlepšit kompetence žáků v oblasti práce s informacemi a digitálními technologiemi a rozvíjet informatické myšlení žáků. Mezi intervencemi podporující naplnění cílů je zahrnuto i opatření na zařazení standardu digitálních kompetencí učitele do vzdělávání učitelů. Cílem tohoto opatření je zajistit, „aby všichni absolventi fakult vzdělávajících učitele a stávající učitelé disponovali potřebnými kompetencemi pro účelné začleňování digitálních technologií do výuky a jejich využití pro podporu učení žáků“ [4, s. 26].



Obrázek 1: Úrovně digitálních kompetencí učitele; zdroj [5]

V roce 2017 přijala Evropská komise dokument European Framework for the Digital Competence of Educators vymezující evropský ráme digitálních kompetencí učitele [7]; ČR tento dokument přejala [5]. Uvedený rámec vymezuje úrovně pokroku z hlediska digitálních kompetencí, a to od úrovně A1 (nováček) až po úroveň C2 (průkopník), viz obr. 1. Rámec digitálních kompetencí pedagogů popisuje kompetence učitelů v oblasti využívání technologií při vykonávání učitelské profese. Tyto kompetence jsou specifikovány nezávisle na aprobaci učitele, na typu či stupni školy; jsou rozděleny do šesti oblastí: profesní zapojení, digitální zdroje, výuka, digitální hodnocení, podpora žáků, podpora digitálních kompetencí žáků. Na obr. 2 je zobrazen popis prvních tří úrovní A1 až B1 v oblasti výuky.

Pokrok		Fáze vývoje
Nováček (A1)	Používá digitální technologie ve výuce jen velmi málo.	Digitální zařízení a digitální obsah při výuce nepoužívám nebo jen velmi zřídka.
Objevitel (A2)	Používá pro výuku jen základní a jednoduché digitální technologie.	Využívám technologie běžně dostupné ve třídách, jako např. interaktivní tabuli, projektor, počítač. Digitální technologie volím podle vzdělávacích cílů a kontextu.
Praktik (B1)	Smysluplně zapojuje digitální technologie.	Organizuji a zavádím digitální zařízení (např. běžné technologie použitelné ve třídách, zařízení vlastněné žáky) do výuky. Zařizuji zavádění digitálního obsahu (např. videa, interaktivní aktivity) do výuky.

Obrázek 2: Popis úrovní A1 až B1 v oblasti výuky; zdroj [5]

Existence strategických dokumentů zaměřených na implementaci digitálních technologií do škol je základním, nikoliv však postačujícím, předpokladem pro realizaci změn v českých školách. Zprávy České školské inspekce [1], [2] z roku 2018 upozorňují, že situace v ČR není uspokojivá, neboť jsme pod mezinárodním průměrem z hlediska dostupnosti digitálních technologií ve školách. Sekundární analýzy výsledků našich žáků v mezinárodních šetřeních PISA 2015 a TIMSS 2015 také ukázaly některé zajímavé souvislosti: Žáci, kteří na internetu tráví denně více než čtyři hodiny, dosahují v testech matematické gramotnosti nižšího skóre než žáci s kratší dobou [2]. Rozhodující však není doba, kterou žáci stráví v online prostředí, ale aktivity, kterým se tam věnují. Pokud totiž žáci tráví více času na internetu herními aktivitami, neovlivní to jejich znalosti matematiky.

2 Příprava budoucích učitelů matematiky na MFF UK

Příprava učitelů matematiky na MFF UK vychází v současné době z průběžného modelu, ve kterém jsou studenti připravováni na svou profesi od prvního ročníku studia a již bakalářský stupeň jejich vzdělávání obsahuje didakticky zaměřené předměty. Pozornost je rovněž věnována integraci technologií.

2.1 Změny v přípravě učitelů po roce 2012 a po 2018

Od akademického roku 2012/2013 je na MFF UK realizována nová akreditace (nyní dobíhající) bakalářského studia *Matematika se zaměřením na vzdělávání*. V rámci této akreditace je v řadě předmětů zdůrazněno propojení se středoškolskou matematikou i učitelský aspekt vzdělávání. Jedná se o předměty, které mají úzkou návaznost na středoškolskou matematiku či jsou zaměřené na učitelskou praxi. Digitální technologie jsou využívány jednak ve výuce některých povinných předmětů, jednak si studenti mohou vybrat volitelné semináře zaměřené na využití technologií ve výuce matematiky, např. seminář Aplikace počítačů ve výuce geometrie I a II.

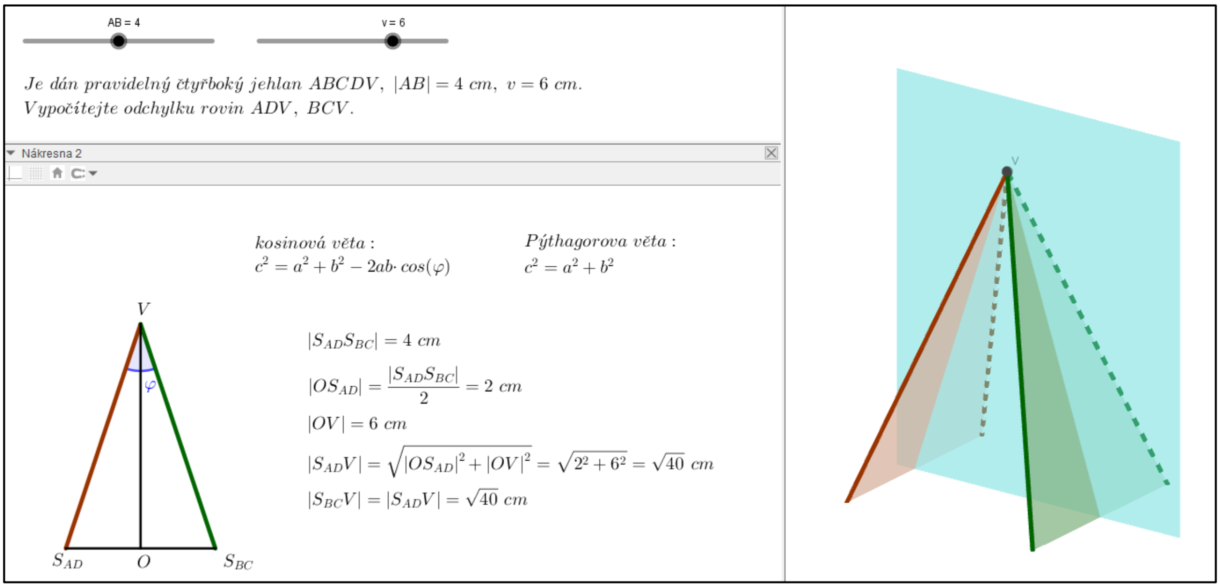
V současném akademickém roce 2019/2020 je na MFF UK prvním rokem realizována nová akreditace bakalářského studia *Matematika se zaměřením na vzdělávání*. Oproti dobíhající akreditaci je zde integrována větší podpora učitelské propedeutice, a to jak v oblasti pedagogicko-psychologické (nové, resp. inovované, předměty Úvod do psychologie, Pedagogická propedeutika), tak v oblasti rozvíjení digitálních kompetencí studentů (nový povinný předmět Informační technologie pro učitele).

Předmět Informační technologie pro učitele je zařazen v prvním ročníku bakalářského studia a jeho náplní jsou základy programování v jazyce Python, práce s textovými editory (zejména TEX) a využívání programu dynamické geometrie GeoGebra ve školské výuce. Z hlediska cílů výuky je zde implementován Rámec digitálních kompetencí učitele [5], kde bychom rádi u našich studentů dosáhli alespoň úrovně B1 (Praktik), aby naši absolventi využívali v budoucí praxi technologie smysluplně a efektivně k aktivnímu učení svých žáků.

Rozvíjení digitálních kompetencí našich studentů se věnujeme i v didaktických předmětech, jako je Pedagogická propedeutika na bakalářském studiu či Didaktika matematiky v navazujícím magisterském studiu. Ve zmíněných povinných předmětech se studenty například analyzujeme online výukové zdroje, či studenti vytvářejí přípravy na vyučovací hodinu se začleněním digitálních technologií.

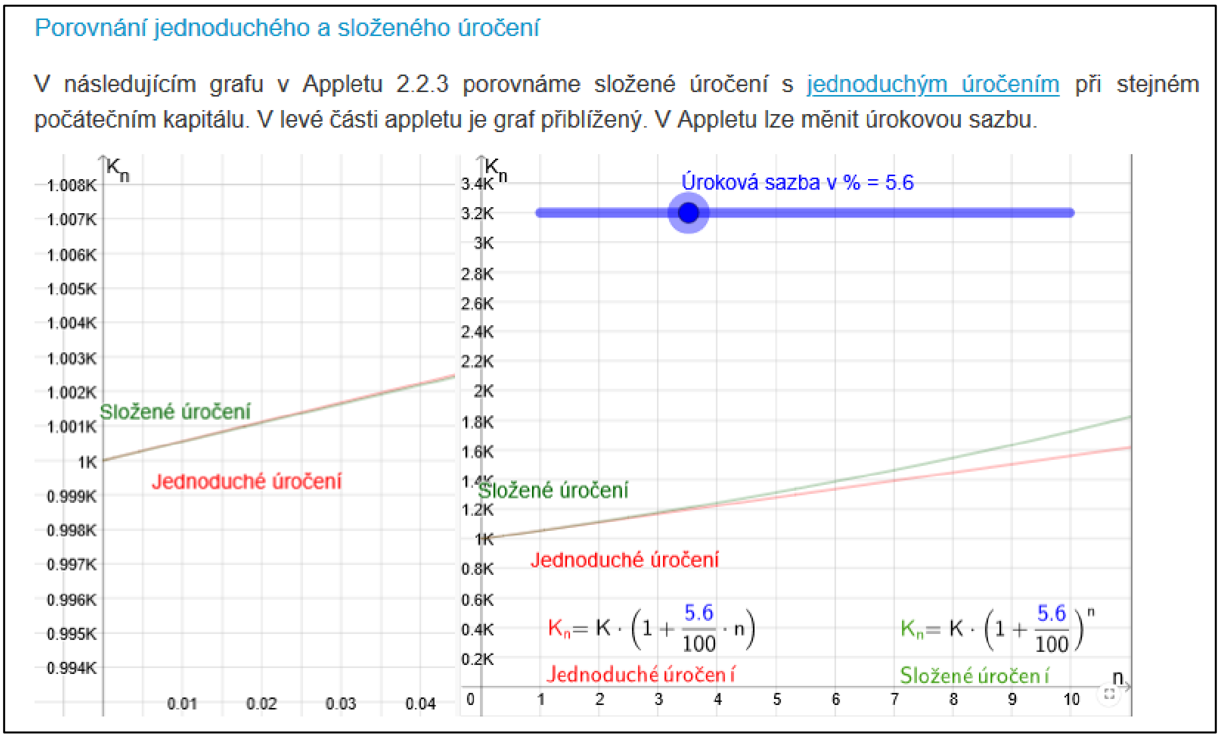
2.2 Příklady užití digitálních technologií

Studenti, kteří se zajímají hlouběji o implementaci technologií ve výuce matematiky, si volí na MFF semináře zaměřené na tuto problematiku. Na obr. 3 je zachycen dynamický rys, který byl vytvořen studentkou v rámci úkolu v semináři Aplikace počítačů ve výuce geometrie. Jde o dynamické zpracování standardní školské úlohy ze známé sbírky úloh [6].



Obrázek 3: Dynamický rys – výpočet odchylky rovin; zdroj: archiv studentských úkolů

V rámci bakalářských či diplomových prací si budoucí učitelé na MFF mohou volit témata zaměřená na využití digitálních technologií ve výuce konkrétních matematických témat na střední škole. Na obr. 4 je zachyceno porovnání jednoduchého a složeného úročení zpracované ve formě appletu. Jde o ukázku z diplomové práce zaměřené na výuku finanční matematiky na střední škole; práce má formu webových stránek a obsahuje řada appletů, které názorně ilustrují probírané pojmy a vztahy [8].



Obrázek 4: Ukázka appletu z diplomové práce, zdroj [8]

Závěr

Současné strategické dokumenty zaměřené na rozvíjení digitálních kompetencí učitelů zdůrazňují význam učitele v digitálním vzdělávání. Používání digitálních technologií je dnes běžnou součástí našeho života a na tuto skutečnost je třeba připravit i budoucí učitele matematiky, aby byli schopni efektivně užívat technologie k podpoře aktivního učení žáků.

Zkušenosti z výuky na MFF ukazují, že s využíváním technologií ve výuce matematiky je vhodné budoucí učitele matematiky seznamovat nejen v rámci povinných, ale i volitelných předmětů, ve kterých se studenti mohou více profilovat.

Literatura:

[1] ČŠI: *Moderní metody výuky a ICT pohledem mezinárodních i národních datových zdrojů: Sekundární analýza TIMSS 2015*, Praha, 2018.

[2] ČŠI: *Vliv složení třídy, metod, uplatňovaných učitelem a využívání technologií na výsledky českých žáků: Sekundární analýza PISA 2015*, Praha, 2018.

[3] MŠMT: *Návrh koncepce rozvoje informačních a komunikačních technologií ve vzdělávání v období 2009–2013*, MŠMT, 2008.

[4] MŠMT: *Strategie digitálního vzdělávání do roku 2020*, MŠMT, 2014.

[5] NÚV: *Evropský rámec digitálních kompetencí pedagogů*, Praha, 2018.

[6] Petáková, J.: M*atematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Prometheus, 1998.

[7] Redecker, Ch.: *European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu*, Publications Office of the European Union, 2017.

[8] Tomandl, D.: *Finanční matematika pro střední školy s podporou internetu*, Diplomová práce na UK, MFF, 2019.

Jarmila Robová
Katedra didaktiky matematiky, MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jarmila.robova@mff.cuni.cz

POSTOJE ŽÁKŮ K VYUŽÍVÁNÍ TABLETŮ VE VÝUCE MATEMATIKY NA DRUHÉM STUPNI ZŠ

Mgr. Yulianna Tolkunova

Matematicko-fyzikální Fakulta, Univerzita Karlova

Abstrakt: Příspěvek je věnován použití tabletů ve výuce matematiky na úrovni druhého stupně základní školy. Jsou demonstrovány průběžné výsledky ze vstupních dotazníkových šetření provedených na čtyřech základních školách v USA. Shrneme, jaké předchozí zkušenosti žáci měli s použitím této technologie, jaký je postoj žáků k zavedení tabletů v hodinách matematiky, co žáci považuji za klady a zápory jejich používání v hodinách matematiky a jaké aspekty ovlivňují postoje žáků.

Klíčová slova: tablet, technologie, matematika, postoj, žáci, ISCED 2.

Students' attitudes toward using tablets in mathematics in a middle school

Abstract: Presented article deals with usage of tablets in mathematics classes in middle schools. The article highlights findings from input questionnaires, that were conducted in four middle schools in USA. From the paper you can learn about students' previous experience with using the technology, about students' attitudes toward implementation of tablets in mathematics classes, also about aspects that students like and dislike in using tablets in mathematics classes, and aspects that can influence their attitudes.

Key words: tablets, technology, mathematics, attitude, students, ISCED 2.

Úvod

V dnešní době se velice rychlé rozvíjí využívání technologií v každodenním životě (Rideout, Foehr, Roberts, 2010) a to včetně tabletů. Globální růst populace užívající tablety v posledních letech zpomalil díky velké konkurenci chytrých telefonů (smartphonů) a rozšiřujícímu se souboru připojených zařízení, včetně phabletů[1] a herních zařízení. I tak však užívání tabletů v USA je poměrně rozsáhlé.

1 Využívání tabletů ve školách

S rostoucím užíváním tabletů ve společnosti se tato technologie dostává do škol a výuky. Obecně tablety mohou být platnými nástroji pro učitele a mohou splňovat různé funkce. Tablet může být nápomocným při výkladu, procvičování učiva, přípravě online materiálů a při konzultacích se žáky. Práce s elektronickými dokumenty a možnost psaní poznámek zvyšuje efektivitu při komunikaci žáků s učitelem (Weitz, Wachsmuth, Mirliss, 2006). Žáci se mohou vracet k látce v libovolnou dobu z libovolného místa. Na tabletu lze dohledávat informace z různých zdrojů, lze používat aplikace vhodné pro matematické účely, lze dělat poznámky, zapisovat řešení a sdílet se spolužáky i učitelem obrazovku. Tablet vždy může být bezdrátově propojen s projektorem, učitel se tak může pohybovat po třídě s malým tabletem v ruce během prezentace. Tablety žáků lze také připojit k projektoru a promítat tak jejich řešení před třídou (Loch, 2011).

Kromě toho, pomocí tabletů lze podporovat žáky s potížemi vidění a sluchu prostřednictvím snadné úpravy velikosti textu, barvy, kontrastu a zvuku. Z výzkumů (Weitz, Wachsmuth, Mirliss, 2006) ale vyplývá, že zvukové poznámky byly prozatím používány jenom malým počtem škol.

Nevýhodou tabletů je obvykle jejich cena. I když nyní jsou tablety mnohem dostupnější než dříve, cena stále může být bariérou k jejich použití. Možnost koupit tablety všem žákům je často nereálná pro školy a univerzity, neboť jde o velké náklady (Loch, 2011). Často se tak škola může rozhodnout pro ty nejjednodušší a nejlevnější modely. Takové modely ale většinou mají nižší výkonnost (a jiné nevýhody přicházející s nízkou cenou), což může vést k frustraci žáků i učitelů a bránit efektivnímu použití. Kromě toho školy musí počítat s náklady na nastavení a údržbu tabletů, včetně oprav poškozené obrazovky a nahrazení ztracených per.

V současné době jsou dostupné výzkumy a literatura věnující se použití speciálně tabletů a jejich vlivu na práci žáků a učitelů. Výzkumy zaměřené na tato zařízení byly realizovány jak na základních, tak i na středních a vysokých školách.

[1] **Phablet** je přenosné zařízení s dotykovým displejem kombinující principy smartphonu a tabletu. Phablet bývá větší než smartphony, ale menší než tablety; rozměry displeje bývají mezi pěti a sedmi palci (podrobněji viz https://cs.wikipedia.org/wiki/Phablet).

2 Vlastní výzkum

Ve svém výzkumu se zaměřuji na užívání tabletů v hodinách matematiky. Výzkumu se zúčastnily 4 charterové školy[2] v USA, ve kterých jsem působila nejprve jako pomocník učitele, později jako učitel. Ve vzorku jsem měla 22 různých tříd v 6. a 7. ročníku druhého stupně základní školy s celkem 597 žáky, kteří byli vyučováni 8 různými učiteli.

Ve všech školách se jednalo o první rok používání tabletů ve výuce, a to jen v hodinách matematiky. V matematice se na tabletech používala nově vytvořená komerční aplikace, jednalo se o pilotáž uvedené aplikace. Aplikace obsahovala všechny potřebné materiály a příklady pro výuku matematiky, žádné jiné zdroje se tedy ve výuce nepoužívaly. V podstatě se jednalo o elektronickou učebnici s několika doplňujícími možnostmi v aplikaci. Tím, že se jednalo o elektronický zdroj, automaticky se objevily výhody ve vyhledávání obsahu a možnosti využití slovníku. Vyhledávání bylo možné klasickým způsobem jako na počítači: podle slova, několika slov, kapitoly atd. V aplikaci byl také přidán slovník matematických termínů a žáci tak mohli pouhým kliknutím na slovo si přečíst definici.

Kromě toho aplikace obsahovala mechanismus pro zpětnou vazbu, která se používala k domácím úkolům. Žáci si četli zadání úlohy na tabletu, následně řešení prováděli klasickým způsobem na papír. Dále však při kontrole domácích úloh ve třídě žáci učiteli posílali zpětnou vazbu, vybírali ze tří možností – rozumím, rozumím a jsem připraven to vysvětlit u tabule, nerozumím. Učiteli se zobrazila tabulka s informacemi, které úloze žáci nerozumí, či kterou úlohu nedokázala vyřešit většina žáků atd. Tablety se tedy aktivně používaly prvních 10-15 minut v každé hodině. Potom během výkladu nové látky část učitelů použití tabletů zakazovala, v jiných třídách žáci mohli na tabletech sledovat výklad souběžně v elektronické učebnici.

Zpětná vazba pro žáky a učitele vede k aktivnímu učení a individuálnímu přístupu (Loch, 2011). Interakce ve třídě často probíhá prostřednictvím verbální komunikace, což často vede k tomu, že plašší a tišší žáci zůstávají potichu. Pro učitele je často obtížné odhalit, zda každý žák látku pochopil. Tablet zde může poskytnout bezpečné prostředí, umožňující každému žáku se zúčastnit řešení úloh bez strachu z veřejného selhání.

Ve všech školách byl na tabletech nainstalován speciální bezpečnostní systém, který žákům blokoval stahování aplikací, používání internetového prohlížeče, používání kamery či změnu nastavení tabletu. Tato opatření byla přijata s cílem zabránit rozptylování pozornosti žáků. Žáci měli tedy přístup jenom k uvedené aplikaci a obsahu, který s nimi sdílí učitel.

3 Výsledky dotazníkového šetření

Nyní shrnu výsledky vstupního postojového dotazníkového šetření pro žáky. Dotazníky byly zadávány v akademickém roce 2017/2018 a 2018/2019. Dotazník obsahoval otevřené a uzavřené (s nabídkou možností odpovědí) otázky. Pro uzavřené odpovědi byly vypočítány jejich relativní četnosti, které byly následně znázorněny pomocí grafů. Otevřené odpovědi byly zpracovány pomocí zakotvené teorie, kdy odpovědi žáků byly postupně kvalitativně analyzovány a kódovány. Dotazník se s časem vyvíjel a postupně vznikly 3 verze vstupního

[2] Charterové školy jsou součástí veřejného školství, od běžných státních škol se ale liší tím, že pracují podle vlastních vzdělávacích programů (tzv. charter). (Brdička, 2015)

dotazníku, každá se od předchozí částečně lišila, podstatné rozdíly budou vždy zdůrazněny dále v textu.

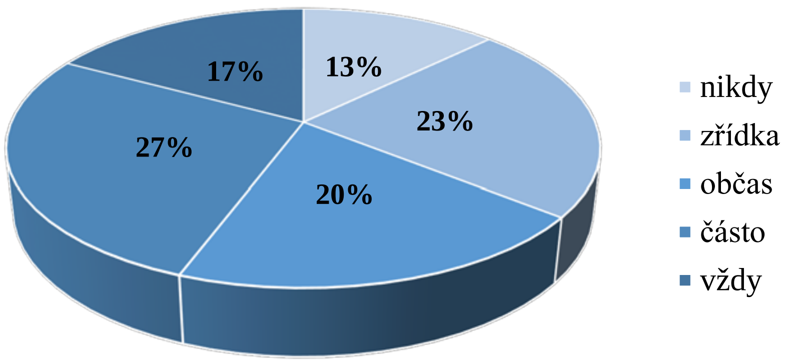
Vstupní dotazník byl vždy zadán na začátku školního roku (s výjimkou školy B, kde se tablety zavedly od druhého pololetí) druhý až třetí den po zavedení tabletů ve škole. Dotazník byl zadán v papírové formě během hodiny matematiky v 4 školách v USA, celkem 597 žákům. Školy pro účely výzkumu byly označeny: škola A, škola B, škola C a škola D.

V úvodu dotazníku každý žák uváděl svůj věk a pohlaví. V tabulce 1 je uveden počet dívek a chlapců ve výzkumném vzorku na jednotlivých školách. Z celkového počtu 597 žáků bylo 291 dívek, 276 chlapců a 30 žáků neuvedlo své pohlaví. Věkové rozložení žáků bylo od 10 do 14 let (v jedné třídě byli žáci v uvedeném věkovém rozmezí).

	Škola A	**Škola B**	**Škola C**	**Škola D**	**Celkem**
Dívky	49	60	108	74	291
Chlapci	63	59	86	68	276
N/A	9	9	9	3	30
Celkem	121	128	203	145	**597**

Tab. 1: Vstupní dotazník – počet žáků podle pohlaví a škol.

První uzavřená otázka zjišťovala, jak často žáci používají tablety doma (ke hraní her, brouzdání po internetu a k dalším účelům). Tímto dotazem jsem chtěla zjistit, jaké zkušenosti respondenti mají s použitím tabletů, neboť používá-li žák tablet často, lze očekávat, že jeho ovládání mu nebude činit potíže. Určila jsem relativní četnosti nabízených odpovědí. Ukázalo se, že výsledky první otázky byly na všech školách obdobné, proto jsou výsledky uvedeny souhrnně za všechny školy dohromady (obr. 1).



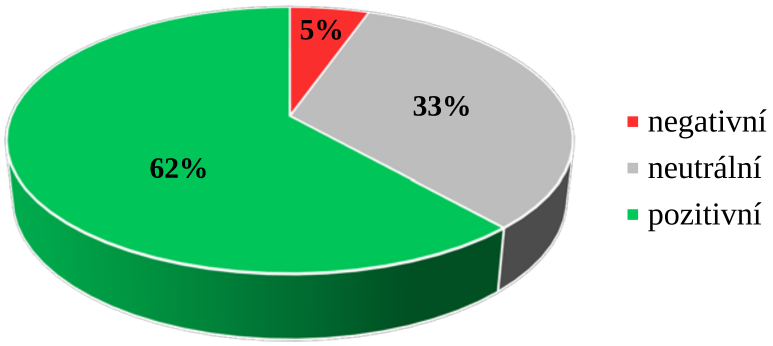
Obr. 1: Vstupní dotazník – **relativní** četnost použití tabletů žáky, všechny školy.

Z grafu je vidět, že téměř třetina žáků (27 %) používá doma tablet často, přibližně pětina (17 %) používá tablet neustále.

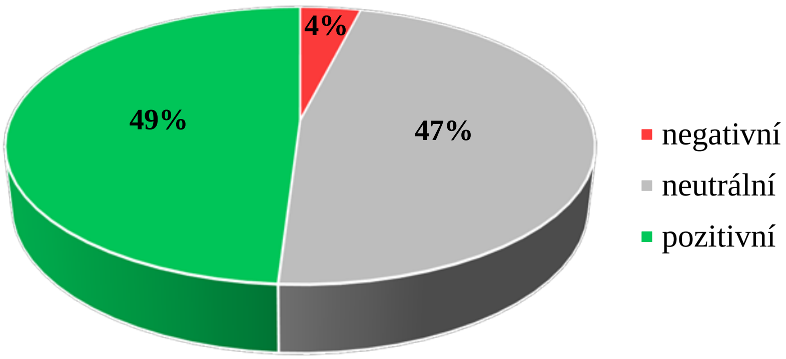
Druhá otázka zjišťovala, zda žáci měli předchozí zkušenosti s používáním tabletů ve škole ve formě vybavení 1:1 (každý žák má svůj tablet). Z odpovědí bylo zjištěno, že jen 4 % žáků měla zkušenost s tímto typem výuky podporované tablety.

Třetí otázka se ptala na to, zda žáci měli v domácnosti k dispozici tablet už před tím, než jim byl poskytnut školní tablet. Bylo zjištěno, že 76 % žáků mělo v domácnosti k dispozici tablet už před tím, než se tablety zavedly do výuky.

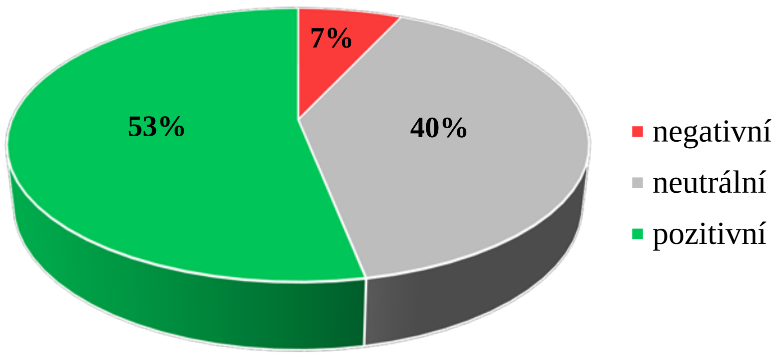
Čtvrtá otázka zjišťovala, jaký postoj žáci obecně mají k zavedení tabletů do výuky matematiky. Relativní četnosti odpovědí jsem opět zpracovala do grafu (obr. 2 až obr. 4). V první verzi dotazníku tato otázka chyběla, proto uvádím výsledky pro tři školy ze čtyř (školy B, C a D).



Obr. 2: Vstupní dotazník **– postoj** žáků k tabletům, škola B.



Obr. 3: Vstupní dotazník **– postoj** žáků k tabletům, škola C.



Obr. 4: Vstupní dotazník **– postoj** žáků k tabletům, škola D.

Z grafů je vidět, že ve škole B bylo větší procento pozitivních postojů než v ostatních školách. Tento jev byl hlavně podmíněn tím, že se v této škole tablety zavedly od druhého pololetí. Během prvního pololetí se obsah aplikace tisknul postupně do papírové verze. To se žákům nelíbilo, což potvrzují rozhovory se žáky i jejich odpovědi na otevřené dotazníkové otázky. Část papírových materiálů žáci poztráceli, v některých případech byly materiály tisknuty na poslední chvíli, takže žáci nemohli řešit některé úkoly s předstihem. Z těchto důvodů žáci na škole B více ocenili využívání tabletů.

V páté a šesté otevřené otázce žáci uváděli, co konkrétně se jim na používání tabletů líbí, nebo nelíbí.

Pozitiva využívání tabletů: v odpovědích žáků se často opakovala tvrzení s podobným (respektive stejným) významem. Tato tvrzení byla rozdělena do čtyř hlavních významových kategorií: pozitiva týkající se pohodlí a jednoduchosti použití tabletů, odpovědi zdůrazňující technické výhody tabletů, odpovědí ukazující obecné nadšení z technologie a ostatní odpovědi, které nespadaly do žádné z uvedených tří kategorií.

Nejčastěji žáci uváděli charakteristiky související s pohodlným a jednoduchým použitím tabletů. Ve výzkumném vzorku celkem 262 žáků (44 %) uvádějí jako pozitivum, že tablet je mnohem lehčí a menší než učebnice. Z rozhovorů bylo zjištěno, že minulý rok žáci v matematice používali poměrně silnou a velkou učebnici formátu A4, proto se žákům líbilo, že tablet zabírá méně místa v batohu, který je tak i lehčí. Dále v této kategorie žáci uvádí, že používání tabletu je jednoduché a že se v prostředí tabletu snadno orientují. V tabletu lze jednodušeji nalézt potřebný obsah[3] a není nutné při tom listovat stránkami. Kromě toho jsou v tabletu vždy dostupné všechny materiály.

Oproti tomu technologické prvky tabletů byly zmiňovány méně často. Žáci uvádějí například: mechanismus pro zpětnou vazbu v aplikaci, rychlý přechod do slovníku[4] na definici slova (pouhým kliknutím na slovo) a možnost rozdělení obrazovky na dvě části, což umožňuje zároveň procházet lekci a domácí úkol. Některé žáky také lákal samotný fakt, že se jedná o práci s elektronikou a že tablet je interaktivní. Také ojediněle uváděli, že ke kladům používání tabletů patří dobrá výdrž baterie, možnost používat zoom, bezpečnostní systém a že tablet je rychlý. Následující tabulka 2 ukazuje shrnutí pozitivních aspektů používání tabletů, které žáci uváděli.

Kategorie	**Aspekt**	**Počet výskytů**	**%**
Pohodlí a jednoduchost použití	Lehký, kompaktní, přenosný	262	43,9
	Dostupnost materiálů	49	8,2
	Jednodušší pro vyhledání potřebného obsahu	34	5,7
	Jednodušší v použití	27	4,5
	Není potřeba procházet (listovat) stránky	17	2,8
	Užitečný při absenci	3	0,5
Technické prvky	Mechanismus pro zpětnou vazbu	39	6,5

[3] Nejvíce to zdůrazňovali ve škole B, kde se v prvním pololetí používaly pouze papírové materiály, nikoliv tablet.
[4] Ve školách B a C slovník nebyl vůbec zmíněn.

Kategorie	Aspekt	Počet výskytů	%
Technické prvky	Technologie	20	3,4
	Rozdělení obrazovky	8	1,3
	Interaktivní	5	0,8
	Slovník	3	0,5
Obecné nadšení	Skvěle, super, zábava atd.	68	11,4
Ostatní	Šetří spotřebu papíru	22	3,7
	Baví na tabletu dělat domácí úkol	13	2,2
	Přehledně organizovaný	12	2,0
	Nic	11	1,8
	Odpovědnost	7	1,2
	Unikátní, něco nového	6	1,0
	Snižuje počet papírů, které musím uchovávat	5	0,8

Tab. 2: Vstupní dotazník - pozitiva používání tabletů ve výuce.

Obecně z otevřených odpovědí vyplývá, že většina žáků má kladný vztah k používání tabletů. Konkrétně 68 žáků přímo uvádělo emotivní pozitivní výpovědi typu: „Zábava“, „Pěkné“, „Vzrušující“, „Skvělé“. Kromě toho 72 žáků v záporech uvádělo „Nic“.

Ojediněle se v této kategorii vyskytly odpovědi: pomáhá se lépe soustředit, hodina je více individuální, pouzdro (lze dát tablet do vertikální polohy), umožňuje postupovat při učení svou rychlostí, nemusím mít knihu, podporují učení více než knihy, eliminuje říznutí papírem, více možností, než má kniha, neztratíš domácí úkol.

<u>Negativa využívání tabletů:</u> Negativa byla rozdělena do tří hlavních významových kategorií: negativa týkající se odpovědnosti za tablet, odpovědi zdůrazňující technické potíže a ostatní odpovědi, které nespadaly do žádné z uvedených dvou kategorií

Častěji žáci uvádí výpovědi související s technickými vlastnostmi tabletů. Ve výzkumném vzorku celkem 151 žáků (25 %) uvádělo, že se jim nelíbí bezpečnostní systém, který zakazuje stahovat aplikace, používat internetový prohlížeč, používat kameru a měnit nastavení tabletu. Dále zde 55 žáků uvedlo nutnost nabíjení, 46 žáků napsalo různé technické poruchy, potíže s Wi-Fi a samotnou aplikaci. Konkrétně žáci uváděli pomalé "načítání" aplikace. Ojedinělé se v této kategorii vyskytly odpovědi: obrazovka není dostatečně jasná, obrazovka je příliš jasná, mechanismus pro zpětnou vazbu, špatný tablet.

V případě negativ používání tabletů žáci často uváděli odpovědnost za tablet. Je drahý, mohou ho rozbít nebo ztratit a mají z toho zřejmě strach. Zajímavé je ale to, že 7 žáků uvedlo odpovědnost jako pozitivum v použití tabletů (tab. 2). Žáci uváděli, že se s tablety učí být více zodpovědnými a cítí se tak více dospělými.

Hodně žáků napsalo, že tablety jsou pro ně rozptýlením. Což je v konfrontaci s tím, že žáci si také stěžovali na bezpečnostní systém, který je chrání před ještě větším rozptýlením.

Dále žáci psali, že by chtěli pero a přímo psát do tabletu, odpovídat na otázky v tabletu a používat ho také pro jiné předměty. Zajímavé je, že 13 žáků uvedlo, že je to plýtvání technologiemi a že se jedná o stejnou knihu, ale na tabletu. Pravděpodobně se uvědomují, že aplikace nepoužívá všechny možnosti tabletu (jako jsou například animace, video, audio atd.). Ojedinělé se dále zmiňovali: pouzdro, další položka k přepravě, hodně pravidel a instrukcí, raději používám knihy k učení, špatné pro oči.

Následující tabulka 3 ukazuje shrnutí negativních aspektů používání tabletů, které žáci uváděli.

Kategorie	**Aspekt**	**Počet výskytů**	**%**
Technické prvky	Bezpečnostní systém	151[5]	25,3
	Nabíjení baterie	55	9,2
	Technické poruchy/závady	46	7,7
	Pomalé načítání	19	3,2
	Režim spánku	16	2,7
Odpovědnost	Lze rozbít	58	9,7
	Drahý	29	4,9
	Odpovědnost	12	2,0
	Lze ztratit/může být ukraden	7	1,2
Ostatní	Nic	72	12,1
	Rozptýlení	41[6]	6,9
	Nelze ukládat data, dělat úkol/poznámky přímo na tabletu	30	5,0
	Chtěl(a) bych používat i v ostatních předmětech	27	4,5
	Těžký, velký	14	2,3
	Plýtvání technologií, stejné možnosti jako u běžné knihy	13	2,2
	Nelze používat v ostatních částech hodiny	7	1,2

Tab. 3: Vstupní dotazník – negativa používání tabletů ve výuce.

Na závěr jsou uvedeny další tabulky 4 a 5, kde jsou vložena vybraná doslovná vyjádření respondentů.

[5] Z toho 100 ve škole C.
[6] Z toho 24 ve škole B.

Kategorie	Doslovná vyjádření respondentu
Pohodlí a jednoduchost použití	*„Tablet je lehčí než učebnice matematiky, snáze se tak přenáší.“* *„Je to více efektivní a můžeš hned mít přístup k libovolnému dokumentu, který učitel chce s tebou sdílet.“* *„Nemusím listovat všemi těmi stránkami, abych našla potřebnou lekci.“* *„Velice nápomocný, když potřebuji něco najít nebo když jsem nemocný.“*
Technické prvky	*„Líbí se mi, že můžu říct přes tablet, zda rozumím úloze nebo ne.“* *„Věřím, že tablety přispívají k tomu, že žáci jsou zaujatí matematikou, protože to zahrnuje technologii.“* *„Rád používám tablet, protože je to jednodušší, když můžeš koukat na domácí úkol a na lekci zároveň.“* *„Líbí se mi tablet, protože když klikneš na nějaké slovo, ukazuje ti definici.“* *„Pomáhá zvětšit písmo, když nevidím.“*
Obecné nadšení	*„Je to zábava je používat.“* *„Je více vzrušující používat tablet než knihu.“* *„Zbožňuji všechno na tabletech.“*
Ostatní	*„Díky tabletu mám pocit, že se jedná o hru (kniha je nudná).“* *„Udržuje studenty zapojenými.“* *„Líbí se mi myšlenka inovace.“* *„Co se mi líbí na používání tabletů, je, že mi to dává větší odpovědnost ve škole a mám z toho dobrý pocit.“* *„Opravdu zbožňuji ideu digitalizovat všechny učebnice.“* *„Jednodušší zůstávat v obraze, když neslyšíš nebo nevidíš učitele.“*

Tab. 4: Doslovná vyjádření respondentů, pozitiva.

Kategorie	Doslovná vyjádření respondentu
Odpovědnost	*„Můžeš ho rozbít nebo ztratit a potom budeš muset za něj platit.“* *„Pořad se obavám, co když se rozbije v mém batohu.“* *„Možná my jsme příliš mladí na to, abychom měli tak velkou zodpovědnost na svých ramenech.“*

Kategorie	Doslovná vyjádření respondentu
Technické prvky	*„Je toho hodně zablokovaného. Nemůžu ani změnit pozadí nebo udělat foto.“* *„Nemůžeme používat Google k nalezení definice, jestliže nejsou ve výukové aplikaci.“* *„Riziko, že dojde baterie, když zapomeneš tablet nabít přes noc.“* *„Občas se příliš dlouho načítá.“* *„Něco pořád nefunguje.“* *„Má hodně závad, když ho používám.“* *„Tablety mají někdy problémy, které rozptýlí všechny ve třídě a pak chvíli trvá, než všichni vrátí pozornost k úkolu.“*
Ostatní	*„Tablet mě rozptýlí, i když ho používám k učení.“* *„Očekávala jsem, že budeme dělat naše domácí úkoly na tabletech, takto je jejich používání jen plýtvání penězi.“* *„Chtěla bych, aby nám bylo poskytnuto pero pro tablety a abychom do toho mohli psát, a dělat domácí úkol.“* *„Nemám je rád: nabíjení, zvláštní péče, selhání technologie. Kniha je mnohem spolehlivější. Tablety jsou zbytečné a mají funkce jako kniha a kvůli dodatečným omezením jsou horší.“* *„Jsem znepokojena tím, že můžeme ztratit oční kontakt, který je součástí komunikačního procesu, který je nezbytný pro učení.“*

Tab. 5: Doslovná vyjádření respondentů, negativa.

Závěr

Z dotazníku vyplývá, že i když většina žáků již měla předchozí zkušenosti v používání tabletů doma, tyto zkušenosti byly omezeny na osobní použití k vlastním účelům. Systematické používání této technologii ve škole bylo pro drtivou většinu (96 %) žáků novinkou.

Postoje žáků k používání tabletů v hodinách matematiky byly většinou pozitivní. Nejvíce oceňují mobilitu a kompaktnost této technologie. V průběhu výzkumu se dále ukázalo, že žáci tablet vnímají více jako nástroj pro zábavu. Nevšímají si často jeho přínosu pro výuku. Žáci ve svých odpovědích neuváděli aspekty související s výukou matematiky nebo porozuměním matematice, a to ani v případě kladů, či záporů. Uvedu několik citací žáků potvrzující tento závěr:

- *„Mysleli jsme si, že budeme moci koupit hry a hrát v hodině.“*
- *„Hodně je toho zablokovaného. Nemůžu ani změnit pozadí nebo udělat foto.“*
- *„Na tabletu nejsou hry. Potřebuje to hry. “*

Kromě toho, v průběhu akademického roku žáci trávili hodně času tím, aby obešli bezpečnostní systém a dostali se na internet a mohli hrát hry.

Během prvního roku po integraci tabletu do výuky matematiky, učitelé a žáci čelili organizačním a technickým potížím. Ukázalo se, že učitelé potřebují čas, aby se s touto technologií seznámili a objevili, jak používat tablety, tak, aby byly přínosné pro výuku. První rok po zavedení, se tablety spíše využívaly jako elektronická kniha, nebyly využity všechny možnosti tabletu (jako jsou například animace, video, audio, automatické kontrolování úloh atd.).

Jinak se v průběhu dvou let ukázalo, že tablety nejsou využívány k učení se nové látce, ale pouze k procvičování a k domácím úkolům. Toho si byli vědomi 2,2 % žáků, viz tab. 3. Použití tabletů při procvičování je však častým případem i dle jiných výzkumů (Klubal, 2016) a může proces procvičování zefektivnit.

Samozřejmě tablet (jako libovolná jiná technologie) sám nemůže ovlivnit školní výsledky žáků. Aktuálně dostupné aplikace samy o sobě nemají potenciál žáky rozvíjet na vyšších kognitivních úrovních (Rusek, Stárková, 2014). Nicméně tablet, který přichází s novými vhodnými nástroji, možnostmi a dobře promyšlenou strategii využití, může pozitivně ovlivnit motivaci žáků a tím i jejich výsledky.

Literatura:

[1] Rideout, V.J., *The Common Sense Census: Media Use by Tweens and Teens*, Common Sense Media Incorporated, 2015.

[2] Weitz R., Wachsmuth, B., Mirliss, D., The Tablet PC for faculty: A pilot project. *Educational technology and society*, 2006, 9(2), 68-83.

[3] Loch, B., Galligan, L., Hobohm, C., & McDonald, C., Learner-centered mathematics and statistics education using netbook tablet PCs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2011, 42(7), 939-949.

[4] Klubal, L., *Vliv použití mobilního dotykového zařízení při procvičování učiva.* Proceedings of the ICTE Conference, 2016, University of Ostrava.

[5] Brdička, B., *Americké charter schools si začínají připravovat učitele samy.* Metodický portál: Články [online], 2015. Dostupné z WWW: https://spomocnik.rvp.cz/clanek/20053/AMERICKE-CHARTER-SCHOOLS-SI-ZACINAJI-PRIPRAVOVAT-UCITELE-SAMY.html, ISSN 1802-4785.

[6] Tolkunova, Y. I., Middle school students' attitude toward using tablets in mathematics class, *European student scientific journal*, 2019, № 1, 8 p. ISSN 2310-3094.

[7] Látal, F., Michejdová, M., Elektronické hlasovací zařízení. *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách.* Praha: Prometheus, 2014, 23(4), 313-319. ISSN 1210-1761.

[8] Stárková, D., Rusek M., *Možnosti využití podcastů ve výuce chemie.* Výzkum teorie a praxe v didaktice chemie/Přírodovědné a technologické vzdělávání pro XXI. století. Hradec Králové: Gaudeamus, 2014, s. 345-350. ISBN 978-80-7435-417-5.

[9] *cs.wikipedia.org* [online]. Dostupné z WWW: https://cs.wikipedia.org/wiki/Phablet

Yulianna Tolkunova
Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: katapulta.yul@gmail.com

SROVNÁNÍ TŘÍ ONLINE PLATFOREM PRO ZADÁVÁNÍ A HODNOCENÍ ÚKOLŮ

Jiří Vančura

Katedra didaktiky matematiky

Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta

Abstrakt: Příspěvek představuje a porovnává online výukové platformy Khan Academy, Techambition a Desmos. Khan Academy je rozsáhlý, americký online portál zaměřený z velké části na výklad a procvičování matematiky. Česká platforma Techambition je souborem interaktivních lekcí s důrazem na skupinovou práci žáků. Desmos je americká kolekce interaktivních matematických aktivit se zaměřením na badatelsky orientovanou výuku. Každý z nástrojů má svá specifika a je vhodný pro různé didaktické situace.

Klíčová slova: Online nástroje, drill, skupinová výuka, badatelsky orientovaná výuka, lineární funkce.

Comparing three online platforms for assignments and evaluation

Abstract: The article presents and compares online educational platforms Khan Academy, Techambition, and Desmos. Khan Academy is a large USA website focused mostly on explanations and exercises in mathematics. Czech website Techambition is a set of interactive lectures designed to support collaborative learning. Desmos is an American website offering many didactical mathematical activities that facilitate enquiry-based learning. Each of these tools has specific capabilities and supports different didactical scenarios.

Key words: Online tools, drill, collaborative learning, enquiry-based learning, linear function.

Úvod

V článku nejprve krátce přestavíme tři online platformy určené pro zadávání práce žákům v oblasti matematiky a její následné monitorování a hodnocení. Všechny uvedené platformy jsou plně dostupné prostřednictvím internetového prohlížeče a není třeba do počítače nic stahovat ani instalovat.

Poté platformy porovnáváme a hodnotíme z hlediska ceny, jazykové podpory, flexibility, pokrytí RVP, možnosti zakládat virtuální třídu, podoby zpětné vazby a hlavně didaktického zaměření, kterým se jednotlivé platformy značně liší. V této souvislosti uvádíme odpovídající didaktické metody, na které jednotlivé platformy cílí a které podporují.

Ukázky platforem, na které se v článku odkazujeme jsou k dispozici zdarma a čtenáři proto doporučujeme odkazy navštívit a učinit si vlastní závěry o přednostech a úskalích jednotlivých platforem.

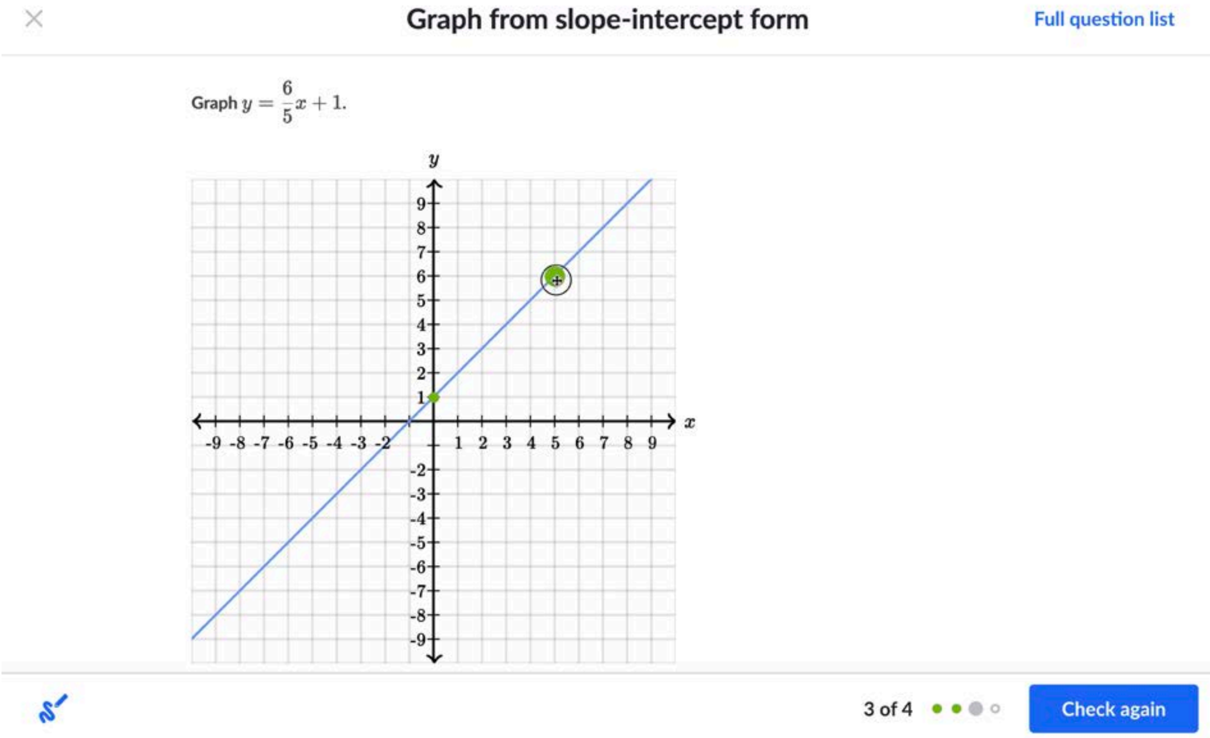
1 Khan Academy

Khan Academy (dále jen KA) [1] prošla od svého založení Salmanem Khanem v roce 2008 rozsáhlým vývojem. Od počátku neziskový projekt zprvu nabízel výuková videa z různých oblastí matematiky. Dnes na americkém portálu KA najdeme jednak výuková videa z oblasti matematiky, fyziky, chemie, biologie, informatiky, historie, umění, ekonomie, jednak interaktivní sbírku úloh z matematiky, které se v tomto článku budeme věnovat podrobněji.

Interaktivní sbírka úloh sestává z jednotlivých cvičení zaměřených na jednu, úzkou znalost. Například cvičení *Graph from slope-intercept form*[1], ověřuje schopnost žáka nakreslit graf lineární funkce na základě předpisu ve směrnicovém tvaru, viz obr. 1. Úkolem žáka je pomocí dvou pohyblivých bodů umístit přímku v soustavě souřadnic tak, aby odpovídala grafu zadané funkce.

V průběhu cvičení žák vyřeší čtyři až sedm analogických úloh. Pokud si žák s řešením neví rady, nebo odpoví chybně, je mu nabídnuta nápověda. Žák může zhlédnout výuková videa zaměřená na danou problematiku nebo si může zobrazit podrobný, komentovaný, krokovaný postup řešení dané úlohy. V případě, že si žák přehraje video, může se k řešení úlohy vrátit bez jakékoliv penalizace. Pokud si ale zobrazí, byť jen část vzorového postupu řešení, již nebude úloha započítána jako splněná. K úspěšnému dokončení cvičení musí žák vyřešit alespoň 70 % úloh napoprvé správně a bez zobrazení vzorového postupu řešení. Pokud žák takto nesplní 70 % úloh, musí cvičení opakovat s jinými, i když analogickými, úlohami.

[1] Cvičení je dostupné na bit.ly/36lF7qu.



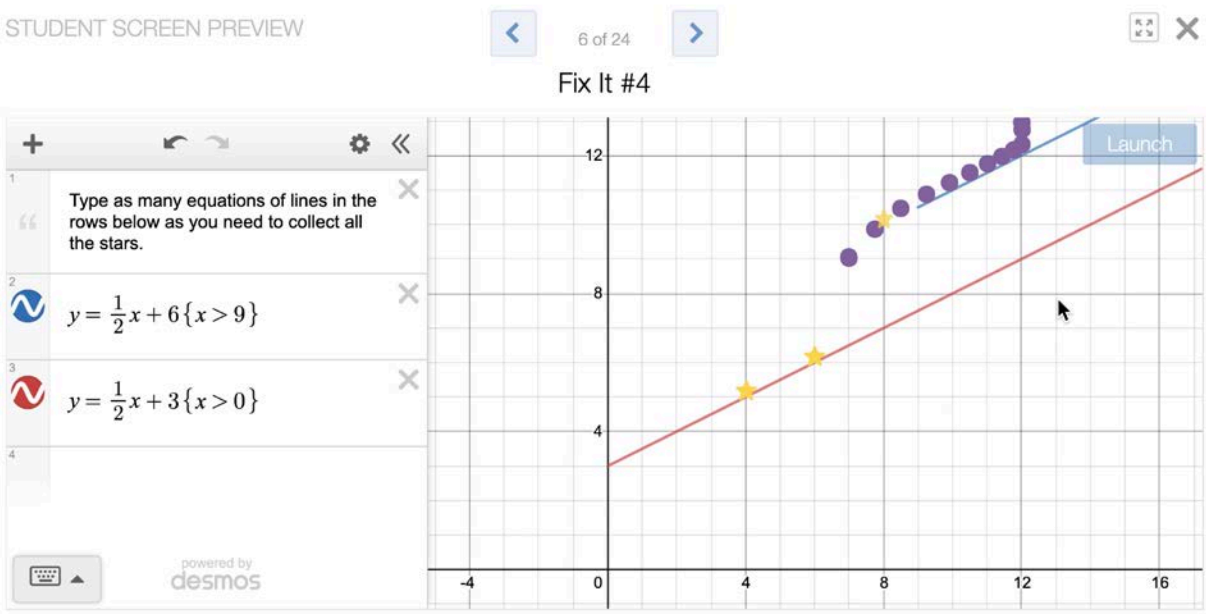
Obr. 1: Screenshot cvičení na Khan Academy

2 Desmos

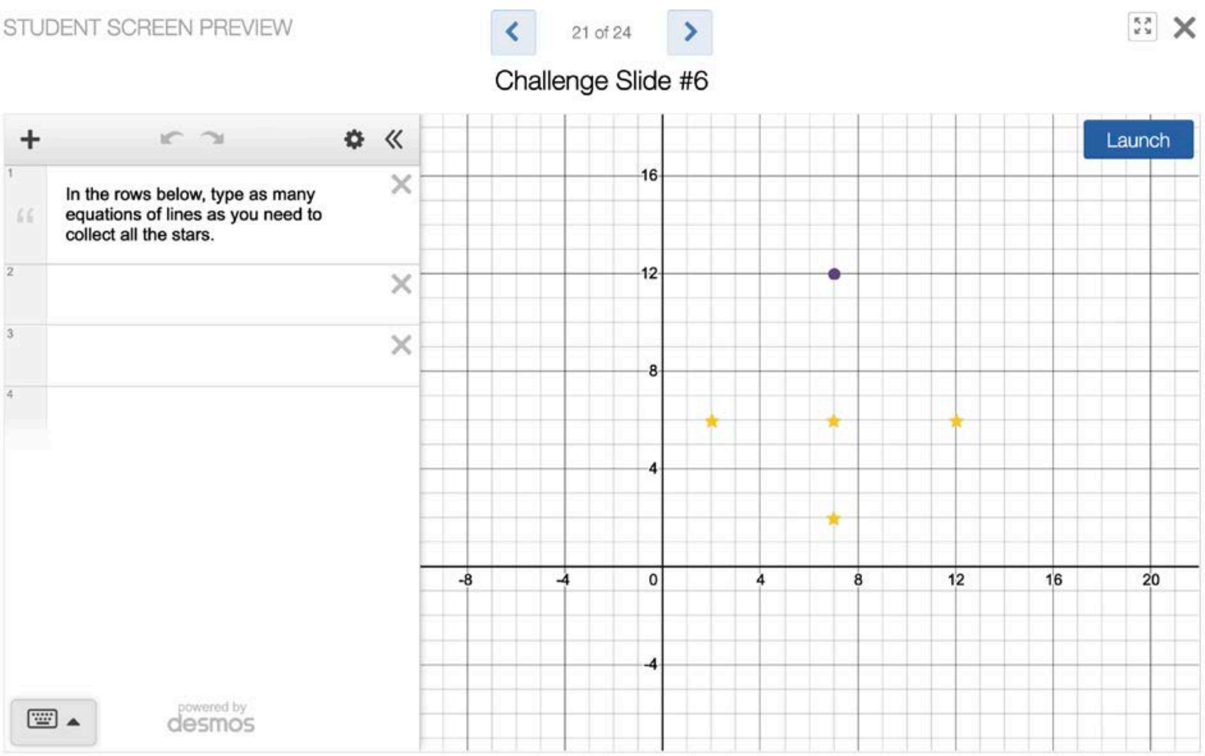
Desmos (dále jen DES) [2] je také americký portál, který bezplatně nabízí vzdělávací obsah v oblasti matematiky. Zaměření vzdělávacích aktivit na DES se od KA značně liší, DES nabízí interaktivní učební prostředí, které žákům představuje zvolený matematický koncept. Například aktivita *Marbleslides: Lines*[2] je zaměřená na podobné učivo jako cvičení na KA uvedené v předchozí kapitole, ale koncepce je zcela odlišná. V tomto případě žáci pomocí zadávání předpisů lineárních funkcí a omezování definičního oboru konstruují virtuální trať pro kuličky, které mají projet skrze dané hvězdy, viz obr. 2.

Dále žáci v aktivitě předpovídají, jak změna daného parametru v předpisu ovlivní graf funkce. Na závěr aktivity žáci opět sestavují trať, tentokrát pro zapeklitější případy, viz obr. 3. Jiné aktivity jsou určeny nejen pro jednotlivé žáky, ale i pro skupiny, kdy žáci interagují mezi sebou například vymýšlením nových zadání. Žák není při plnění aktivity přímo hodnocen ani penalizován, zpětnou vazbu poskytuje virtuální prostředí přirozeně.

[2] Aktivita je dostupná na bit.ly/2PBStJ8.



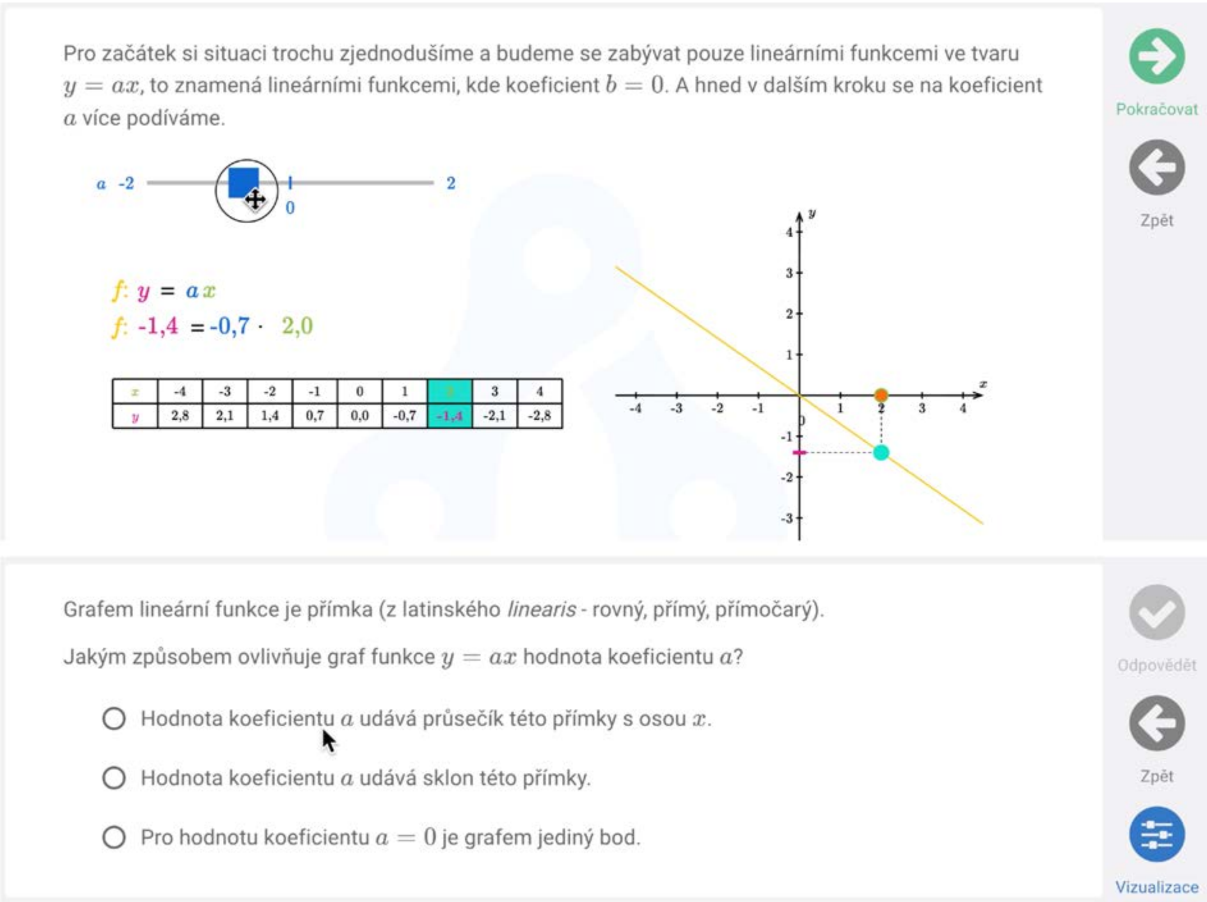
Obr. 2: Screenshot aktivity na portálu Desmos



Obr. 3: Screenshot závěru téže aktivity na portálu Desmos

3 Techambition

Techambition (dále jen TA) [3] je českou platformou obsahující přibližně 400 lekcí z většiny oblastí RVP G [4]. Každá lekce obsahuje výklad, často doplněný interaktivní vizualizací a kontrolní otázky. Jako příklad uvedeme lekci *Lineární funkce 1*[3] opět zaměřenou na předpis a graf lineární funkce, viz obr. 4. Žák si nejprve projde výklad s interaktivní vizualizací, která mu umožňuje pozorovat vliv změny parametru *a* v předpisu *y* = *ax* na graf. Následně žák odpovídá no kontrolní otázku ve spodní části obr. 4. Ať už žák odpoví správně či chybně, je mu zobrazeno doplňující vysvětlení s vizualizací.



Obr. 4: Screenshot dvou obrazovek z lekce na webu Techambition

4 Srovnání platforem

Přejdeme ke srovnání představených platforem, základní parametry jsou uvedeny v tab. 1.

Obě americké platformy KA a DES jsou kompletně zdarma a nemají žádnou příplatkovou variantu. Česká platforma TA je zdarma pro učitele, který ji může použít v rámci svého výkladu, například k ukázce vizualizací. Pro žáky je ale TA zpoplatněn částkou 190 Kč za každého žáka za rok.

Výhodou TA je kompletní dostupnost v českém jazyce. Ostatní platformy jsou plně dostupné pouze v anglickém jazyce. Česká, nezisková organizace Khanova škola pracuje na kompletní české mutaci KA, česká verze je dostupná na https://cs.khanacademy.org.

[3] Lekce je dostupná na bit.ly/2plgfyy.

Největší flexibilitu nabízí DES, který umožňuje nejen vytvářet vlastní aktivity s plnou podporou prostředí Desmos, ale také upravovat stávající aktivity. Dvě zbývající platformy poskytují volnost jen v podobě volby konkrétních cvičení či lekcí, kdy možnost volby na KA je širší, neboť cvičení jsou velmi úzce zaměřená a učitel tak může snadno zkombinovat cvičení dle požadovaných znalosti. Lekce TA jsou obsáhlejší, a tedy více omezující z hlediska volby specifických témat.

Kritérium	Khan Academy	Desmos	Techambition
Cena	zcela zdarma	zcela zdarma	190 Kč / žák / rok
Jazyková podpora	v anglickém jazyce s postupně vznikající českou mutací	pouze v anglickém jazyce	v českém i anglickém jazyce
Flexibilita	možnost volby z přibližně 1500 interaktivních cvičení	kompletně otevřená platforma	možnost volby z přibližně 400 lekcí
Pokrytí RVP	pokryta naprostá většina RVP ZV a většina RVP G	algebra a funkce na úrovni základní i střední školy	lekce z všech oblastí RVP G
Virtuální třídy	ano	ano	ano
Zpětná vazba	okamžitá s možností nápovědy	přirozená v rámci daného prostředí	okamžitá s jednotným vysvětlením
Didaktické zaměření	drill	badatelsky orientovaná výuka	skupinová výuka

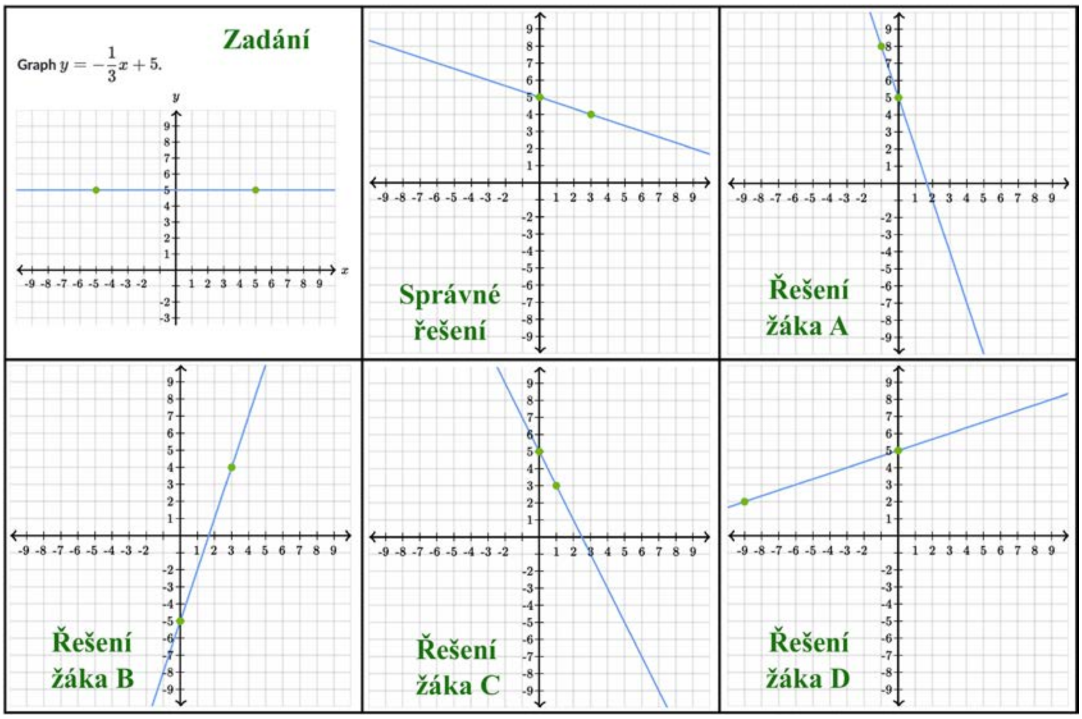
Tab. 1: Porovnání základních parametrů platforem

V oblasti pokrytí rámcových vzdělávacích programů převyšuje KA ostatní platformy. Na KA lze najít naprostou většinu výstupů požadovaných RVP ZV [5] a velkou část výstupů uvedených v RVP G [4]. Výjimku tvoří konstrukční úlohy, úlohy ze stereometrie a složitější úlohy zaměřené na úpravy výrazů a kombinatoriku, které na KA nenajdeme. Naopak témata funkcí a statistiky je na KA pokryto nadstandardně. Lekce jsou řazeny do kapitol, které odpovídají americkému kurikulu, což může být pro české učitele matoucí, nicméně vznikající česká mutace je již řazena dle běžného, českého kurikula a na KA lze navíc efektivně fulltextově vyhledávat interaktivní cvičení i výuková videa. Platforma TA je zaměřena na matematiku střední školy, nelze hovořit přímo o pokrytí RVP G [4], ale ve většině oblastí najdeme stěžejní tematické celky. Bohužel jsou názvy a řazení lekcí poměrně nepřehledné, například v kapitole Lineární funkce najdeme následujících 26 lekcí: *Lineární funkce 1, Lineární funkce 2, Nepřímá úměrnost, Nepřímá úměrnost 2, Lineární lomená funkce 1, Lineární lomená funkce 2, Funkce y = ax + b, Funkce y = b, Lineární funkce určená dvěma body, Vliv koeficientů na lineární funkci, Lineární funkce - souhrn, Ověření pochopení lineární funkce,* *Graf lineární funkce, Předpis lineární funkce, Sestrojení grafu funkce z předpisu, Hodnota funkce v bodě, Průsečík grafu s osami, Předpis funkce ze dvou bodů, Přímá úměrnost, Souhrnné procvičování, Body ležící na přímce, Lineární funkce, Graf nepřímé úměrnosti, lineární lomená funkce - úloha, Převod Celsiových a Fahrenheitových stupňů, Konstrukce grafu lineární funkce*. Lekce ani nemají klíčová slova či anotace, proto jediný způsob, jak zjistit jejich obsah, je celé lekce projít. Nejužší pokrytí nabízí DES, který je zaměřen na algebru a funkce, nabízí jak aktivity na úrovni druhého stupně základní školy, tak na úrovni středoškolské.

Všechny tři platformy umožňují vytvářet virtuální třídy, zadávat žákům práci a sledovat její plnění.

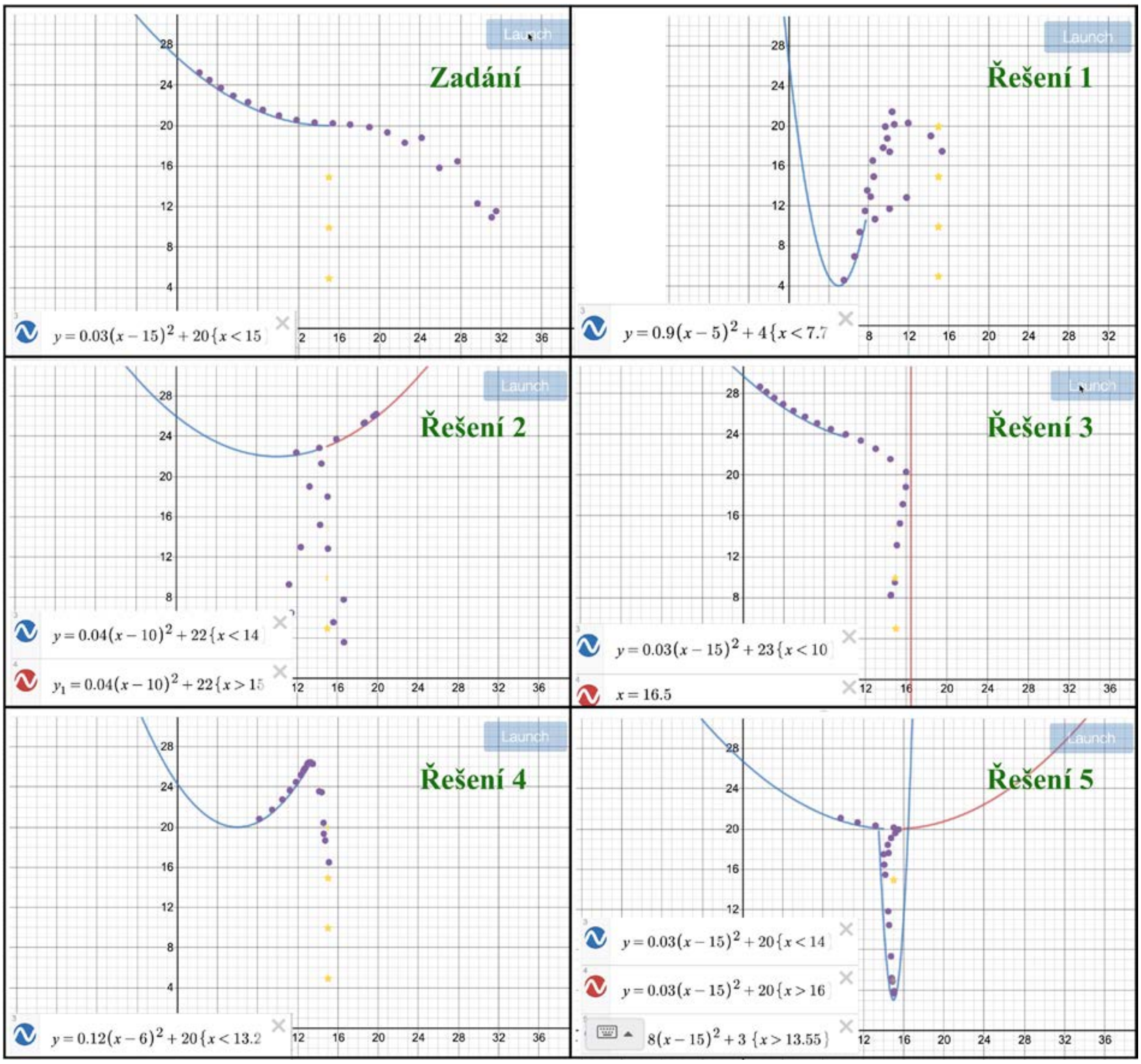
Podoba zpětné vazby je klíčovým prvkem při učení žáků [6, 7]. Platformy KA a TA nabízejí zpětnou vazbu v podobě vyhodnocení správnosti odpovědi. Dále TA po zodpovězení otázky zobrazí doplňující vysvětlení, toto vysvětlení se zobrazí bez ohledu na to, zda žák odpověděl správně, či chybně. Na druhou stranu KA nabídne nápovědu v případě, že žák nezodpověděl otázku správně. Zpětná vazba v platformě DES je přirozenou součástí učebního prostředí, kdy žák okamžitě vidí, že například grafy, které použil, nestačí k sesbírání všech hvězd. DES chybu dále nekomentuje, ale nechává žáka samostatně bádat.

Didaktickým zaměřením se jednotlivé platformy velmi liší. Nejrozsáhlejší portál KA je účinným nástrojem drillu, neboť žák musí procvičovat daný postup dokud není schopen úlohy řešit bez nápovědy a napoprvé správně [8]. Výhodou je také velmi snadné vyhledávání a zadávání a kontrola plnění úkolů. Také diverzifikace zadání v rámci třídy pro učitele představuje jen malou časovou zátěž. KA může učiteli také pomoci identifikovat žákovské miskoncepty, neboť zaznamenává všechny odpovědi žáků u jednotlivých úloh. Na obr. 5 vidíme zadání, správné řešení a čtyři různá chybná žákovská řešení jedné úlohy. KA také umožňuje seřadit úlohy podle úspěšnosti žáků a identifikovat tak problematická místa. Naopak ke hlubšímu, konceptuálnímu porozumění KA příliš nepřispívá [8].



Obr. 5: Zadání a chybná žákovská řešení úlohy na Khan Academy

Platforma DES svými široce otevřenými úlohami a interaktivním prostředím nabízí vhodný prostor pro badatelsky orientované vyučování [9]. Úlohy jsou zadané tak, že je poměrně jednoduché začít s nimi experimentovat. Otevřené úlohy mají často mnoho různých, správných řešení. Na obr. 6 vidíme úlohu zaměřenou na předpis a graf kvadratické funkce a pět různých, správných řešení, které žáci navrhli.



Obr. 6: Různá žákovská řešení stejné úlohy v prostředí Desmos

Poslední představená platforma TA je svým zaměřením na pomezí mezi čistým drilem a otevřeným bádáním. Autoři platformy cílí na podporu skupinové výuky, kdy platforma dokáže automaticky na základě odpovědí žáků vytvořit vhodné týmy žáků pro následnou diskuzi a skupinovou výuku [3].

Závěr

Představili jsme tři online výukové platformy, které mohou v rámci výuky matematiky plnit různé funkce a sledovat různé didaktické cíle. Vhodným zapojení technologií do výuky matematiky můžeme dosáhnout vyšší efektivity, aktivity či motivace žáků. Naopak bezmyšlenkovité a příliš urputné využívání technologií může dosažení didaktických cílů omezit.

Tento výstup byl podpořen projektem PROGRES Q17 Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu a projektem SVV 2017 č. 260454.

Literatura:

[1] Khan Academy, získáno 11. 11. 2019 z www.khanacademy.org

[2] Desmos, získáno 11. 11. 2019 z https://teacher.desmos.com

[3] Techambition, získáno 11.11.2019 z https://techambition.com

[4] Kolektiv autorů (2007). Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Výzkumný ústav pedagogický v Praze, ISBN 978-80-87000-11-3.
dostupné na http://www.nuv.cz/file/159

[5] Kolektiv autorů (2013). Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, úplné znění upraveného RVP ZV. Výzkumný ústav pedagogický v Praze.
dostupné na http://www.nuv.cz/file/214/

[6] Attali, Y. (2015). Effects of multiple-try feedback and question type during mathematics problem solving on performance in similar problems. Computers & Education, 86, 260–267. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2015.08.011

[7] Clarina, R. & Koul, R. (2003). Multiple-try feedback and higher-order learning outcomes. International Journal of Instructional Media, 32(3), 239–245.

[8] Vančura, J. (2019). Vliv procvičování na Khan Academy na znalosti a dovednosti žáků v matematice. Scientia in educatione, 10(2) (v tisku)

[9] Kolektiv autorů (2015). Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7394-531-2
dostupné na: https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/samkova/gaju_komplet.pdf

Jiří Vančura
Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jivancura@gmail.com

POVINNÁ MATURITA Z MATEMATIKY PYRRHOVO VÍŤAZSTVO?

Daniela Velichová

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta STU v Bratislave

Abstrakt: Príspevok pojednáva o neúspešnom snažení učiteľov, predstaviteľov kľúčových zamestnávateľov na Slovensku a Slovenskej matematickej spoločnosti obnoviť povinnú maturitnú skúšku z predmetu Matematika na gymnáziách so zameraním na prírodné vedy a na niektorých stredných odborných školách. Uvedené sú argumenty podporujúce túto snahu doložené analýzou súčasného stavu matematických vedomostí absolventov stredných škôl - maturantov a výsledkov žiakov a študentov stredných škôl v SR z medzinárodných meraní.

Klíčová slova: maturita, matematika, Pisa medzinárodné testovanie.

Compulsory maturity (GSEC) in Mathematics – Pyrrha victory?

Abstract: Paper deals with unsuccessful efforts of teachers, representatives of employers in Slovakia and Slovak Mathematical Society to renew compulsory secondary school final leaving exam – maturity from Mathematics at grammar schools specialised on natural sciences and at some vocational secondary schools. Arguments supporting this effort are presented substantiated by analysis of the status of mathematical knowledge of secondary school graduates and results achieved by Slovak secondary school students in international tests.

Key words: maturity, mathematics, Pisa international testing.

Úvod

Motto: Ne ego si iterum eodem modo uicero, sine ullo milite Epirum reuertar. Pyrrha

Pyrrhovo víťazstvo je slovné spojenie, ktoré vyjadruje formálne víťazstvo alebo úspech, ktoré v skutočnosti vo svojich dôsledkoch žiadnym víťazstvom alebo úspechom nie je, ale je to morálne zadosťučinenie pre víťaza. Pôvodne vzišlo z vojenstva, ale rýchlo sa stalo všeobecne používanou frázou vo všetkých oblastiach, v ktorých sa súťaží alebo nejako hodnotí úspech. Všeobecne označuje predovšetkým víťazstvo, ktoré je príliš tesné a príliš draho zaplatené, alebo víťazstvo, ktoré bolo omylom, pretože aj prípadne ľahko získaný cieľ bol buď bezcenný, alebo priniesol víťazovi namiesto zisku iba straty.

Pôvod frázy a jej pomenovanie odkazuje na Pyrrha, kráľa z Epiru, vynikajúceho starovekého bojovníka a jedného z veľkých nepriateľov Rímskej ríše. Fráza naráža na poznámku, ktorou údajne odbil dôstojníkov, ktorí mu po bitke pri Ascule (279 pred Kr.) zablahoželali k víťazstvu: „Ešte jedno takéto víťazstvo a vrátim sa do Epiru bez vojakov.“ Išlo o dosť triezve zhodnotenie celej situácie - nepriateľa síce donútil k ústupu a spôsobil mu ťažké straty, ale jeho armádu nezničil a jeho vlastné elitné jednotky a dôstojnícky zbor vyšli z bitky značne zdecimované. Keďže Rimania mali väčšie možnosti doplniť svoje rady, jeho pozícia sa fakticky zhoršila.

Nápadná podoba zavedenia povinnej maturitnej skúšky z matematiky s dokumentovaným víťazstvom kráľa Pyrrhu je témou príspevku. Jeho cieľom je analýza súčasného stavu matematických a iných vedomostí absolventov stredných škôl - maturantov, najmä tých, ktorí prichádzajú študovať na technické univerzity, a odhad predpokladaných dôsledkov ne-zavedenia povinnej maturity z matematiky decimujúcich tak akademický zbor, ako aj obec študentskú.

1 Súčasný stav

2. apríla 2019 sa na pôde Národnej Rady Slovenskej republiky konala konferencia „Matematické vzdelávanie - zmeny pre budúcnosť“, ktorej iniciátormi boli Republiková únia zamestnávateľov RÚZ a Slovenská matematická spoločnosť SMS. Účastníci konferencie podpísali spoločné vyhlásenie zaväzujúce príslušné výkonné orgány Ministerstva školstva, vedy, športu a mládeže Slovenskej republiky pripraviť návrh koncepcie skvalitnenia matematického vzdelávania na základných a stredných školách SR.

Obsah vyhlásenia - potrebné opatrenia na systémové zmeny v školskej vzdelávacej sústave SR

1. Posilniť postavenie matematiky ako jedného z pilierov všeobecného vzdelávania a ako základ vzdelávania s orientáciou na prípravu odborníkov pre znalostnú ekonomiku:
   a) zmeniť spôsob a skvalitniť vyučovanie matematiky - sústrediť sa na inovatívne bádateľské prístupy a formatívne hodnotenie žiakov v poznávacom procese; v tomto smere preškoliť všetkých učiteľov na nový spôsob vyučovania,
   b) zvýšiť počet hodín matematiky v štátnom vzdelávacom programe ZŠ a SŠ,

c) zaviesť povinnú maturitu z matematiky v dvoch úrovniach:

i. prvá úroveň – odporúčaná pre maturantov, ktorí plánujú pokračovať vo VŠ štúdiu v STEM študijných odboroch

ii. druhá úroveň - pre všetkých ostatných maturantov

d) vytvoriť model usmerňovania vzdelávacej cesty žiakov vo väzbe na externé hodnotenie žiakov - povinnú maturitu z matematiky (výsledky externej časti) majú vysoké školy akceptovať ako súčasť podmienok prijatia na štúdium,

e) podporovať starostlivosť o talenty - legislatívne znovu ustanoviť možnosť zriaďovania špeciálnych tried so zameraním na matematiku, informatiku a prírodné vedy,

f) vytvárať nové inovatívne učebnice matematiky a podporné učebné materiály.

2. Prijať opatrenia na skvalitnenie ďalšieho vzdelávania učiteľov a prípravy budúcich učiteľov:

a) skvalitniť ďalšie vzdelávanie učiteľov, preniesť ho do kompetencie vysokých škôl,

b) vo vysokoškolskom vzdelávaní zvýšiť váhu odbornej predmetovej prípravy a pedagogickej praxe z aprobačných predmetov,

c) v záujme zvýšenia kvality prípravy učiteľov oddeliť prípravu učiteľov pre ZŠ a SŠ

d) akreditáciu učiteľstva aprobačných predmetov pre SŠ odvíjať od personálnych a materiálnych podmienok daných odborov, garantovanie viazať na tím odborníkov, nie na jedného profesora z pedagogiky alebo psychológie.

Pracovná skupina ŠPÚ (Štátny pedagogický ústav) vytvorená pre spracovanie Koncepcie skvalitnenia matematického vzdelávania na základných a stredných školách v SR si z vyššie uvedených 10 návrhov väčšinou hlasov osvojila, resp. čiastočne osvojila len šesť opatrení, okrem návrhov v bodoch **1c, 1d, 2a, 2c**.

Zástupcovia Republikovej únie zamestnávateľov (RÚZ) považujú aktuálny návrh koncepcie za prijateľný kompromis a dobré východisko pre systémové zmeny v matematickom vzdelávaní, aj keď očakávali odvážnejšie kroky, ktoré povedú ku zásadným zmenám.

Zástupca Slovenskej matematickej spoločnosti (SMS) vyjadril stanovisko, že SMS je za razantnejšie riešenie - navrhované opatrenia len ako celok majú potenciál reálne zvýšiť úroveň matematického vzdelávania v SR. SMS za kľúčové považuje práve body **1a, 1c, 1d, 2a**.

2 Zdôvodnenie a východiská pre vypracovanie Koncepcie

- Na znižujúcu sa úroveň matematického vzdelávania na Slovensku je poukazované z viacerých strán.
- Ozývajú sa hlasy zamestnávateľov, vysokých škôl, slovenskí žiaci dosahujú v medzinárodných meraniach neuspokojujúce výsledky (nižšie ako priemer krajín OECD).

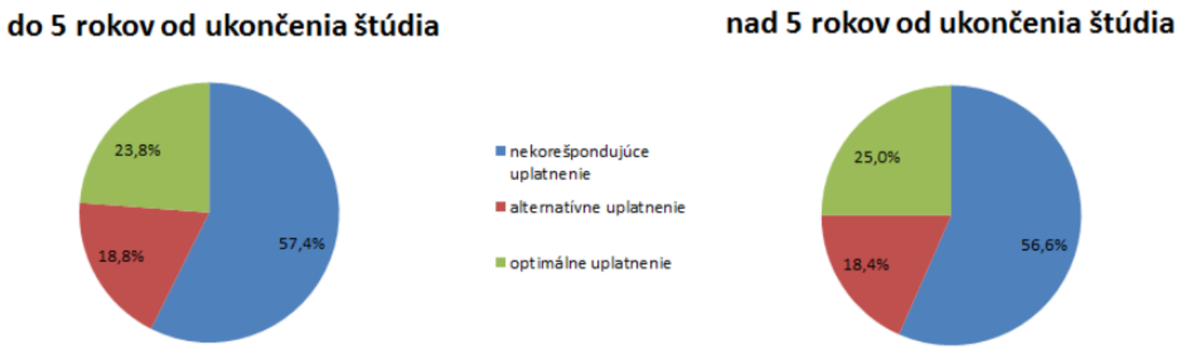
Spoločenské dôvody pre potrebu hľadať spôsoby skvalitnenia matematického vzdelávania môžeme zhrnúť do niekoľkých bodov:

1. nevyhovujúca štruktúra študijných programov vysokých a stredných škôl pre trh práce,

2. nedostatočná pripravenosť absolventov stredných škôl pre zamestnávateľov aj vysoké školy,
3. neuspokojujúce výsledky žiakov v medzinárodných meraniach.

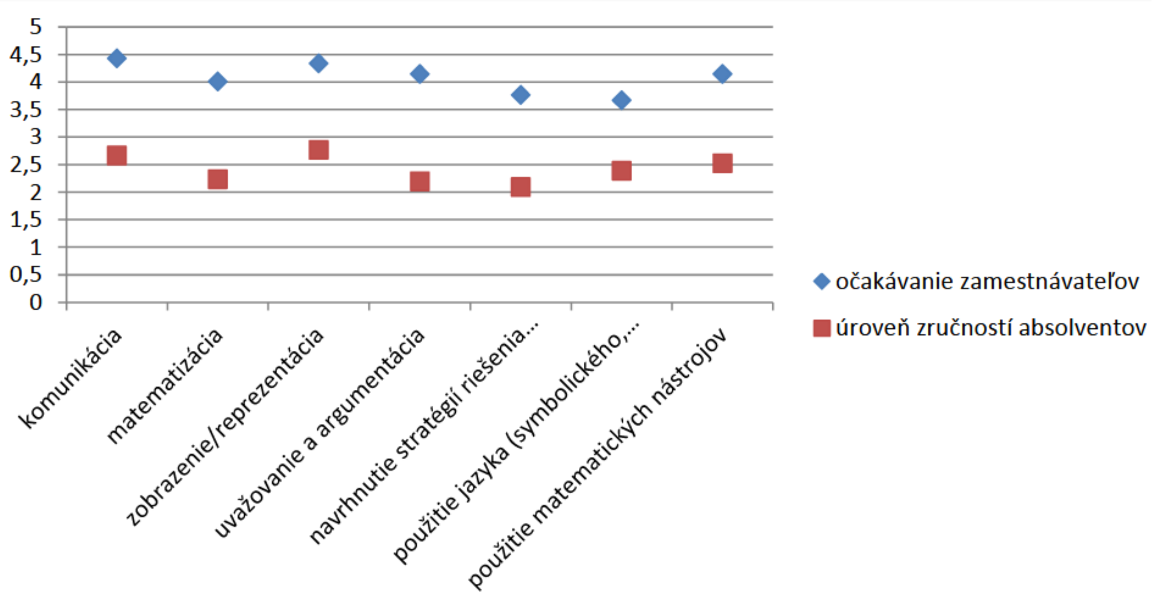
Podľa zistení agentúry Trexima nie sú prognózy pre uplatnenie absolventov na trhu práce v SR dobré, štruktúra absolventov z hľadiska študijných odborov nezodpovedá potrebám trhu práce.

- Až 57% absolventov nepracuje v odbore, ktorý vyštudovali.
- Na trhu práce je vysoký a stále rastúci dopyt o STEM odbory.



Obr. 1. Uplatnenie absolventov na trhu práce; zdroj: Prognózy vývoja na trhu práce v SR, Trexima, Bratislava

Podľa Výročnej správy Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR z roku 2017 na technických a prírodných vedách študuje iba **24,34 %** študentov a podiel absolventov je iba **23,27 %**. V roku 2016 bol však podiel absolventov v STEM študijných odboroch na Slovensku len o 0,8 percentuálneho bodu nižší ako v priemere krajín EÚ.V rovnakom roku bol tento podiel u nás najnižší spomedzi okolitých krajín V4 – Česká republika (**27,2 %**), Maďarsko (26 %) a Poľsko (24,3 %). Zamestnávatelia hodnotia potrebu matematickej gramotnosti u svojich zamestnancov vo všeobecnosti ako vysokú, ale schopnosť absolventov stredných škôl naplniť tieto ich očakávania ako výrazne nižšiu!



Obr. 2. Hodnotenie dôležitosti kompetencií očakávaných zamestnávateľom a dosiahnutých absolventom

V súčasnosti je pre matematiku v Rámcovom učebnom pláne Štátneho vzdelávacieho programu vyčlenených týždenne:

- na 1. stupni ZŠ 16 hodín týždenne,
- na 2. stupni ZŠ 21 hodín týždenne,
- na gymnáziu 12 hodín týždenne,
- na študijných odboroch SOŠ 6 hodín.

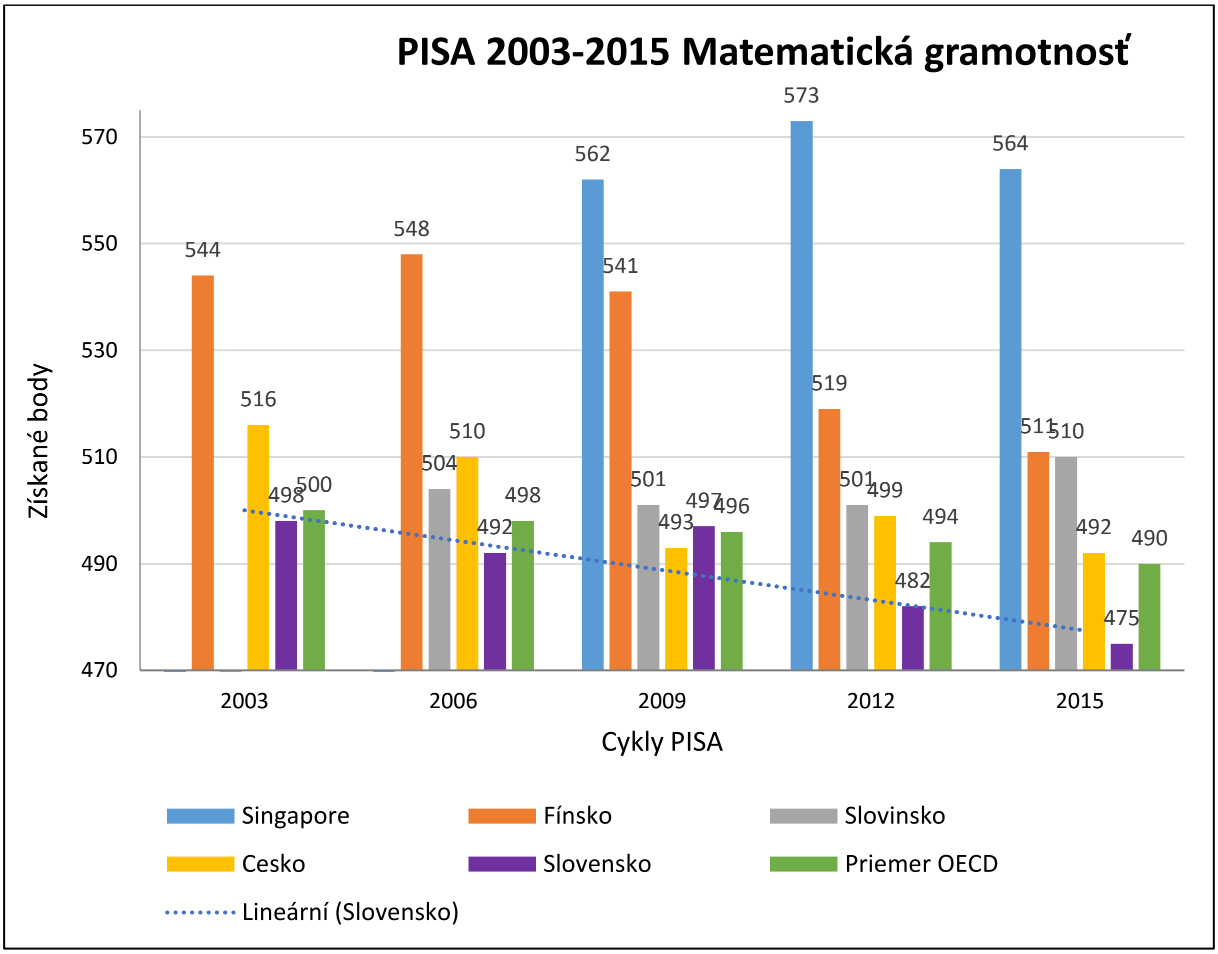
Tento počet hodín je minimálny a je v kompetencii každej školy upraviť ho podľa potrieb, čerpaním ďalších hodín z tzv. disponibilných hodín.
Časová dotácia matematiky v porovnaní s vybranými krajinami teda nie je nízka!

krajina	priemerný týždenný počet minút vyučovania matematiky na 2. stupni ZŠ
Slovensko	189
Česká republika	168,75
Poľsko	180
Rakúsko	187,5 – 262,5
Maďarsko	146,25
Fínsko	162
Singapúr (v závislosti od kurzu)	75 – 175

Tab. 1. Priemerný počet hodín matematiky za týždeň na 2. stupni ZŠ vo vybraných krajinách

Podľa zamestnávateľov sú študenti pripravovaní na používanie vopred daných postupov a algoritmov, chýba im premýšľanie, logické uvažovanie a nevedia svoje vedomosti aplikovať na riešenie technických problémov. Najslabšie sú podľa nich schopnosti absolventov navrhnúť stratégie riešenia problému ako aj uvažovanie a argumentácia.

Slovenskí žiaci a stredoškoláci dosahujú neuspokojivé výsledky v medzinárodných meraniach rôznych kompetencií, zručností a gramotností.



Obr. 3. Výsledky Pisa testov niektorých vybraných krajín.

Dôležitou súčasťou vyučovania musí byť aj využívanie prostriedkov IKT. Zvyšovanie výpočtovej zručnosti a automatizácie výpočtov však nesmie byť na úkor objavovania, pochopenia a aplikácie získaných poznatkov pri riešení úloh z reálnym kontextom. Použitie vhodného softvéru by malo uľahčiť niektoré namáhavé výpočty alebo postupy a umožniť tak sústredenie sa na podstatu riešeného problému. Využívanie samotných IKT nemá priamy vplyv na získané matematické vedomosti študentov, ale ich študijné výsledky možno pozitívne ovplyvniť správnym konštruktivistickým prístupom pedagógov k príprave procesu učenia/učenia sa s podporou technológií.

Využívanie IKT vo vyučovaní však ostáva ešte stále otázne a kontroverzné. Niektoré štúdie naznačujú, že IKT pozitívne ovplyvňujú proces získavania vedomostí tým, že umožňujú alternatívne prístupy k výučbe matematiky, sú atraktívnejšie, demonštratívnejšie, a motivujú žiakov, pozri [1], [2]. Iné štúdie uvádzajú, že IKT majú negatívny vplyv na objem aj obsah vedomostí žiakov a študentov, pôsobia demotivačne (načo je potrebné učiť sa, keď je všetko v počítači a na webe), a počas vyučovacieho procesu pôsobia rušivo – rozptyľujú pozornosť žiakov, [3].

Výskum zaoberajúci sa štúdiom vplyvu aký majú rôzne formáty kníh pri získavaní vedomostí poukazujú na skutočnosť, že hĺbka a kvalita porozumenia je lepšia pri čítaní textu v papierovej forme ako v digitálnej forme, [4].

Záver

Myšlienka opätovného zavedenia povinnej maturitnej skúšky z matematiky na Slovensku nebola akceptovaná napriek enormným snahám rôznych inštitúcií a verejnosti. Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR pristúpilo na tieto podnety iba k vytvoreniu Pracovnej skupiny Štátneho pedagogického ústavu, ktorej úlohou je spracovanie Koncepcie skvalitnenia matematického vzdelávania na základných a stredných školách v SR. Doterajšie pravidlá absolvovania maturitnej skúšky z matematiky ostávajú nezmenené.

Externú časť maturitnej skúšky (EČ MS) z matematiky absolvujú iba tí žiaci, ktorí si vybrali matematiku ako

- **voliteľný predmet** (žiaci gymnázií),
- **dobrovoľný predmet** (prevažne žiaci SOŠ, a niektorí žiaci gymnázií ako 5. maturitný predmet).

Neúspešnosť v dobrovoľnom predmete neovplyvňuje celkové hodnotenie žiaka na maturitnej skúške, jeho úspešnosť, resp. neúspešnosť z maturitnej skúšky. Súčasťou maturitnej skúšky z matematiky je okrem externej časti aj ústna forma internej časti maturitnej skúšky.

Od roku 2015 môžu študenti vykonávať externú časť maturitnej skúšky aj elektronicky

- offline aj online (podľa technických podmienok na škole).
- E-MATURITU môžu absolvovať iba žiaci stredných škôl, ktoré majú certifikačné licencie do systému e-Test.
- Žiakom, ktorí absolvujú elektronické testy, sa pridáva k riadnemu času na vyplnenie testu aj manipulačný čas na prácu s odpoveďovým hárkom.
- Žiaci, ktorí prejavia záujem absolvovať testovanie elektronickou formou sa musia vo vopred prihlásiť a musia sa povinne zúčastniť na generálnej skúške E-MATURITY.

Nakoľko je tento spôsob vykonania externej maturitnej skúšky z Matematiky prínosným a ako ovplyvňuje náročnosť prípravy samotnej skúšky pre personál strednej školy, vzhľadom na potrebné špeciálne technické a softvérové zabezpečenie, je doteraz predmetom analýzy.

Nezodpovedané ostávajú aj kľúčové otázky súvisiace s inovatívnymi didaktickými metódami výučby a implementácie IKT vo vyučovacom procese:

- Je potrebné zmeniť, a ako, overené didaktické metódy ak chceme aktívne využívať IKT v pedagogickom procese?
- Ako sa zmenia študijné výsledky a obsah vedomostí žiakov a študentov ak budú pri učení / učení sa intenzívnejšie používať IKT ako učebný nástroj - prostriedok?
- Ako zodpovedá forma preverovania získaných vedomostí forme ich nadobúdania pri aktívnom využívaní IKT ako učebných pomôcok?

Literatúra:

[1] Dewey, A., Drahota, A., 2016. Introduction to Systematic Reviews: Online Learning Module Cochrane Training. https://training.cochrane.org/interactivelearning/modul e-1-introduction-conducting-systematic-reviews.

[2] Chauhan, S., 2017. A meta-analysis of the impact of technology on learning effectiveness in elementary schools. Comput. Educ. 105, pp. 14–30.

[3] Hardman, J., 2015. Pedagogical variation with computers in mathematics classrooms: A Cultural Historical Activity Theory analysis. *Psychol. Soc.* [online]. 2015, n. 48, pp. 47-76.

[4] Baker. J., 2019. 'Major distraction': Australian primary school dumps iPads, returns to paper textbooks, www.stuff.co.nz/technology/digital-living/111691580/major-distraction-australian-primary-school-dumps-ipads-returns-to-paper-textbooks

Daniela Velichová
Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta STU v Bratislave
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovensko
daniela.velichova@stuba.sk

UŽITÍ GEOGEBRA APPLETŮ PRO VÝUKU TĚLES

Šárka Voráčová

Ústav aplikované matematiky, fakulta dopravní ČVUT v Praze

Abstrakt: Příspěvek je zaměřený na možnosti využití GeoGebry pro výuku těles. Vytvořili jsme volně dostupný soubor interaktivních výukových materiálů pokrývající všechna tělesa, která jsou vyučována na základní a střední škole. Velká pozornost je věnována objemům a povrchům těles. Objemy těles patří dlouhodobě ke kritickým místům vyučování matematice, porozumění prostorových vztahů a vlastností je častokrát nahrazeno drilem a dosazováním do vzorců. Právě v této oblasti může software dynamické geometrie účinně pomoci pro zvýšení zaujetí žáků, provokování k vytváření hypotéz i jejich experimentálnímu ověřování. Možnost zkoumání dynamického rysu z různých úhlů pohledu přispívá k prohloubení poznávacího procesu žáků.

Klíčová slova: GeoGebra, Dynamická geometrie, Konstruktivní vyučování, Tělesa.

Learning Solids with GeoGebra

Abstract: In the paper, we highlighted some opportunities and examples on how GeoGebra can be used in classrooms to explore some basic concepts in spatial geometry. We present our interactive education materials designed specifically for teaching spatial geometry. We focus on volumes of solids, which are the most critical problems in geometry education. Interactive spatial representation enables the student to see and explore relations and concepts that were difficult to show in past prior to technology.

Key words: GeoGebra, Dynamic Geometry Software, Solids, Constructive education.

Příspěvek byl publikován v časopisu **South Bohemia Mathematical Letters**.
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2019_Voracova.pdf

ELEKTRONICKÉ HLASOVÁNÍ VE VÝUCE MATEMATIKY

Tomáš Zadražil

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Abstrakt: Tento příspěvek si klade za cíl představit možné využití mobilních telefonů v rámci výuky matematiky, a sice elektronické hlasování následované skupinovými diskuzemi nad položenou konceptuální otázkou. Popsané aktivity jsou součástí výukové metody Peer Instruction, pomocí které několik let vyučuji matematiku na nižším stupni víceletého gymnázia. Krom metody Peer Instruction bude v příspěvku rovněž ukázáno, jak elektronické hlasování vnímají a jaký význam mu připisují sami žáci.

Klíčová slova: Peer Instruction, KoncepTest, elektronické hlasování, Socrative.

Electronic Voting in Education of Mathematics

Abstract: This contribution aims to introduce the possible use of mobile phones within education of mathematics, namely electronic voting followed by group discussions over the posed conceptual question. The described activities are part of teaching strategy Peer Instruction, through which I have been teaching mathematics for several years at a lower grade of a czech grammar school. In addition to Peer Instruction, the paper will also show how pupils perceive electronic voting and what importance they attach to it.

Key words: Peer Instruction, ConcepTest, electronic voting, Socrative.

Otec geometrie

Tato sekce slouží jako tématický úvod ukázkového KoncepTestu.

Převážnou většinou matematické obce by byl za otce geometrie označen Eukleidés z Alexandrie. Některé prameny (například [1]) však zmiňují jiného matematika coby oprávněnějšího držitele tohoto pomyslného titulu. Matematik, skrytý mezi řádky následující úlohy, proslul, mimo jiné, i svou důvtipnou metodou pro stanovení výšky pyramidy. Napadlo jej, že v okamžiku, kdy vrháme stín o délce přímo odpovídající naší výšce, stačí od délky stínu pyramidy odečíst polovinu délky její základny a výsledkem je právě kýžená výška pyramidy (důvtipné využití podobnosti trojúhelníků a základních principů paprskové optiky). Nyní již ale ke slíbené úvodní úloze. . .

1 Úvodní úloha aneb vzorový KoncepTest

Pravoúhlý trojúhelník?

Trojúhelník ABC má stranu c o délce 24 cm a těžnici ke straně c o délce 12 cm.
Na základě těchto údajů **můžeme s jistotou prohlásit**, že...

(A) ... ABC je pravoúhlý trojúhelník s přeponou c.

(B) ... $\triangle ABC$ je rovnoramenný.

(C) ... $\triangle ABC$ není pravoúhlý.

(D) ... $\triangle ABC$ může být pravoúhlý, ale strana c nemůže být jeho přepona.

(E) ... $\triangle ABC$ je pravoúhlý a strana c není přepona.

(F) Pro nedostatek dat nelze rozhodnout pravdivost tvrzení (A)–(E) o $\triangle ABC$.

Známe-li odpověď na položenou otázku, pak je nám pravděpodobně znám i onen „nekorunovaný otec geometrie“, a sice Tháles z Milétu. Na základě vstupních údajů totiž víme, že každý z bodů A, B, C leží ve vzdálenosti právě 12 cm od středu S_{AB} strany c. Což ale, jinými slovy, znamená, že body A, B, C leží na téže kružnici se středem v bodě S_{AB} a poloměrem 12 cm, tedy na Tháletově kružnici τ nad průměrem AB. Podle Tháletovy věty je pak úsečka AB z každého bodu τ (vyjma A, B) vidět v zorném úhlu 90° (viz obrázek 1). Nyní tak s jistotou víme, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Což znamená, že hledanou odpovědí na úvodní otázku je možnost (A).

Úvodní úloha je příkladem KoncepTestu, nebo-li konceptuální úlohy cílené na testování, respektive prohloubení, konceptuálního porozumění žáků. Tak, jak jej definoval, Eric Mazur [2] musí KoncepTest vyhovovat každé z následujících pěti podmínek:

(1) Jde o úlohu zaměřenou na porozumění jediného konceptu.

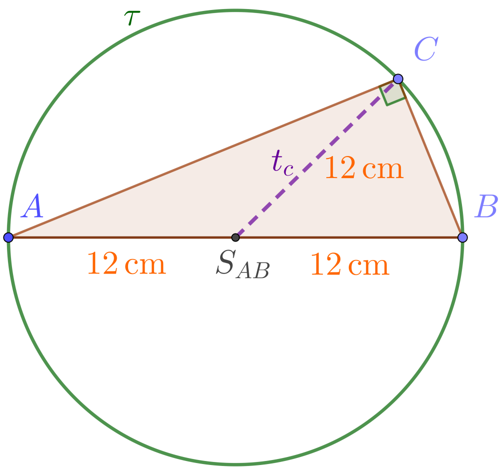
(2) Jde o úlohu řešitelnou na základě porozumění, nikoli pouhé paměti.

(3) Jde o úlohu disponující přiměřenou nabídkou odpovědí, nebo o tzv. otevřenou otázku.

(4) Jde o úlohu formulovanou jednoznačně.

(5) Jde o úlohu s přiměřenou obtížností.

KoncepTesty původně vznikly pro účely výuky vysokoškolské fyziky pomocí techniky Peer Instruction, kterou si představíme vzápětí. Narozdíl od fyzikálních konceptů vykazují matematické koncepty poněkud vyšší míru provázanosti, navzájem na sobě stojí a prolínají se. V kontextu matematiky je proto poměrně nesnadné uspokojit podmínku (1), požadující cílení KoncepTestu na jediný koncept. Například pro správné řešení úvodní úlohy bylo zapotřebí krom znalosti konstrukčních prvků trojúhelníku správně chápat definici kružnice



Obrázek 1: Grafické řešení úvodní úlohy

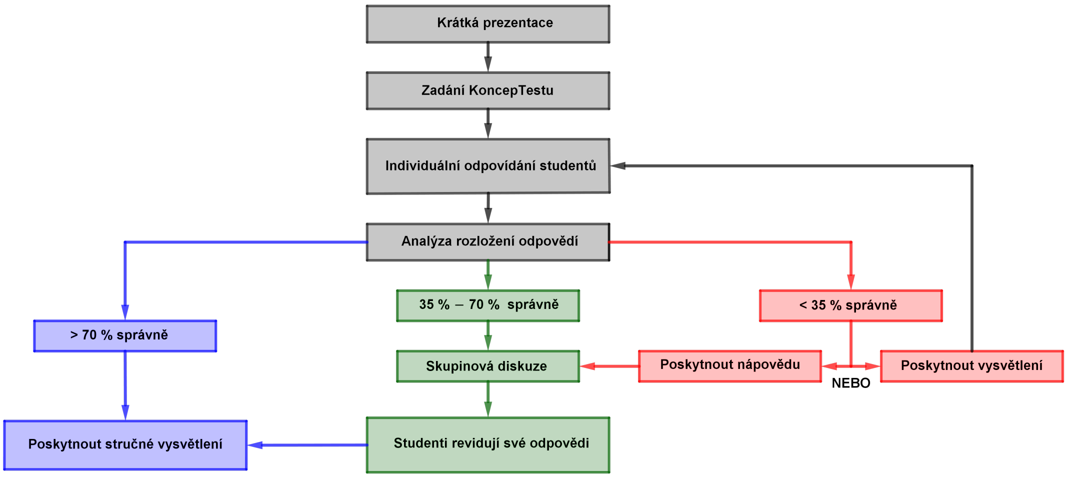
a Tháletovu větu. Osobně se domnívám, že zjevná neuspokojitelnost podmínky (1) není na škodu. Případnému zájemci o promyšlenější tvorbu matematických KoncepTestů doporučuji článek D. Talla [4] o konceptuálním obrazu nebo kteroukoli publikaci M. Hejného (například [3]) věnující se teorii generického modelu. KoncepTesty můžeme, náhradou za podmínku (1), cílit na utváření, respektive zkvalitňování, žákovského konceptuálního obrazu, případně pro výstavbu žákovských schémat[1].

2 Peer Instruction

Následující popis metody Peer Instruction je včetně obrázku doslovně převzat ze [5]. (Upraven je pouze způsob citování podle požadavků sborníku.)

„*Peer Instruction* (dále jen PI), jak ji ve své knize [2] popsal Eric Mazur, je metoda aktivního učení stojící zejména na skupinové diskuzi vyvolané složitější konceptuální otázkou, takzvaným *KoncepTestem*. Hodina vyučovaná podle PI je obvykle členěna do několika bloků. Schematickou strukturu jednoho takového bloku si můžeme prohlédnout na obrázku 2.
Každý blok je zahájen krátkou prezentací zvoleného konceptu. Při svém výkladu se instruktor snaží vyvarovat poskytnutí vzorce nebo jiné, na paměti založené, berličky. Po prezentaci následuje zadání *KoncepTestu* cíleného na prohloubení porozumění představovanému konceptu. Studentům je poskytnut krátký čas na individuální promyšlení odpovědi. Následně jsou vyzváni k hlasování prostřednictvím hlasovacích karet, clickerů nebo chytrých zařízení. Na základě rozložení relativních četností studentských odpovědí buď instruktor stručně vysvětlí správnou odpověď a přejde ke skupinovým diskuzím, nebo se pokusí prezentovaný problém ještě jednou vysvětlit. Ve fázi skupinových diskuzí se studenti snaží přesvědčit své spolužáky o správnosti své volby, přičemž jsou instruktorem

[1] Konfrontace s nemodely a modely překvapivými; budování nových generických modelů.



Obrázek 2: *Peer Instruction* – schéma jednoho bloku

vybízeni ke zdůvodňování – nikoli pouze k pouhému konstatování. Výzkumy ukazují, že je student mnohdy schopen danému konceptu snáze porozumět na základě výkladu svého spolužáka, nežli na základě výkladu samotného instruktora [10]. Studenti, kteří čerstvě diskutovanému konceptu porozuměli, si totiž živě pamatují, jaké to bylo pojmu nerozumět a jaké kroky museli učinit, aby se porozumění dobrali. Naproti tomu instruktor sám často trpí takzvanou „kletbou vědomosti“ [2], neboť danému konceptu dobře rozumí a dávno si již neuvědomuje nesnáze na cestě k porozumění. Skupinové diskuze jsou ukončeny revidujícím hlasováním studentů a stručným vysvětlením správné odpovědi. Prakticky vždy dojde k znatelnému navýšení hlasů ve prospěch správné odpovědi [2], [10].

Popsaný blok zabere přibližně 10–15 minut. Za jednu vyučovací hodinu jsme tímto způsobem tedy schopni probrat 3 až 4 koncepty. Je proto zřejmé, že abychom dosáhli stejného objemu učiva jako u klasické výuky, musíme část práce naložit na bedra studentům. Toho můžeme docílit například tak, že před lekcí studentům zadáme přípravné materiály k samostudiu, po jejichž nastudování budou disponovat potřebnými znalostmi pro zvládnutí lekce. Ve své knize [2] Eric Mazur pro tyto účely doporučuje po bok PI zařadit i strategii *Just-in-time Teaching*[2].“

3 Elektronické hlasování

Ačkoli první zmínky o využití elektronického hlasování v kontextu výuky pocházejí již z roku 1947, až v období 1966–68 se objevují první studie zabývající se jeho možnou

[2] Just-in-time Teaching je strategie výuky založená na zpětnovazební smyčce mezi přípravným online prostředím a následným děním ve třídě. Stručně řečeno, instruktor zadá studentům skrze internet přípravné materiály provázené úkoly a otázkami, které studenti musejí vypracovat a odevzdat ještě před začátkem následující lekce. Na základě zpětné vazby poskytnuté odpověďmi studentů poté instruktor vhodně upraví obsah následující lekce. Stejně tak obsah přípravných materiálů je do značné míry uzpůsoben průběhu předešlé lekce [11].

přidanou hodnotou. Zmíněné studie však nezávisle na sobě poukazují na takřka nulový vliv elektronického hlasování co do efektivity výuky. Až v roce 1985 pozoruje profesor Webb u svých studentů první zajímavé výsledky svědčící o přidané hodnotě elektronického hlasování. Nízký počet hlasovátek nutí studenty pracovat ve skupinkách, a ti tak musejí diskutovat předkládané otázky před závazným odesláním svého hlasu. Profesor Webb navíc studentům mnohdy předkládá konceptuální otázky nebo otázky týkající se odhadu výsledku předváděných experimentů. Webbův přístup k výuce o necelých 10 let později následuje Eric Mazur, který přichází s technikou PI. [6][7]

V kostce představená historie poukazuje na skutečnost, že zařazení hlasování samo o sobě nevede k navýšení efektivity výuky, a že je navíc nutno pozměnit učební strategii[3].

Krom elektronického hlasování, tj. hlasování realizovaného pomocí speciálně designovaných hlasovátek (využívaná například politiky v poslanecké sněmovně) a chytrých zařízení (SmartDevice), lze hlasovat ještě pomocí rukou a pomocí hlasovacích karet[4]. Tabulka 1 uvádí stručné srovnání zmíněných hlasovacích prostředků.

	Cena	**Anonymita**	**Možné technické problémy**	**Další možná využití**
Ruce	takřka nulová	žádná	–	–
Karty	nízká (až střední)	nízká	–	–
Hlasovátka	vysoká	vysoká	baterie hlasovacích zařízení; nefunkčnost školní sítě nebo provozního počítače	–
SmartDevice	„nízká“	vysoká	slabá školní wifi; aktualizace softwaru; možný rozptylující efekt plynoucí z víceúčelovosti SmartDevice; nedostatečný počet SmartDevice (žáci nemusejí zařízení vlastnit nebo nemusejí mít v daném okamžiku zařízení v provozu)	podle zvolené platformy (například textové odpovědi, závody,...)

Tabulka 1: přehledová tabulka

Podrobnější informace o elektronickém hlasování lze dohledat například v článku [12] věnující se výhodám a úskalím spjatým s využitím elektronického hlasování při výuce.

4 Akční studie implementace Peer Instruction

Cílem našeho výzkumného záměru je rozhodnout, zda je možno vyučovat matematiku na úrovni vyššího stupně základní školy pomocí metody PI za dosažení podobných výsledků, které uvádějí zahraniční studie (zlepšení přístupu k předmětu, navýšení efektivity výuky

[3] Pro zájemce o pestrou paletu dalších aktivit designovaných v kontextu nasazení elektronického hlasování je zde například diplomová práce [6].

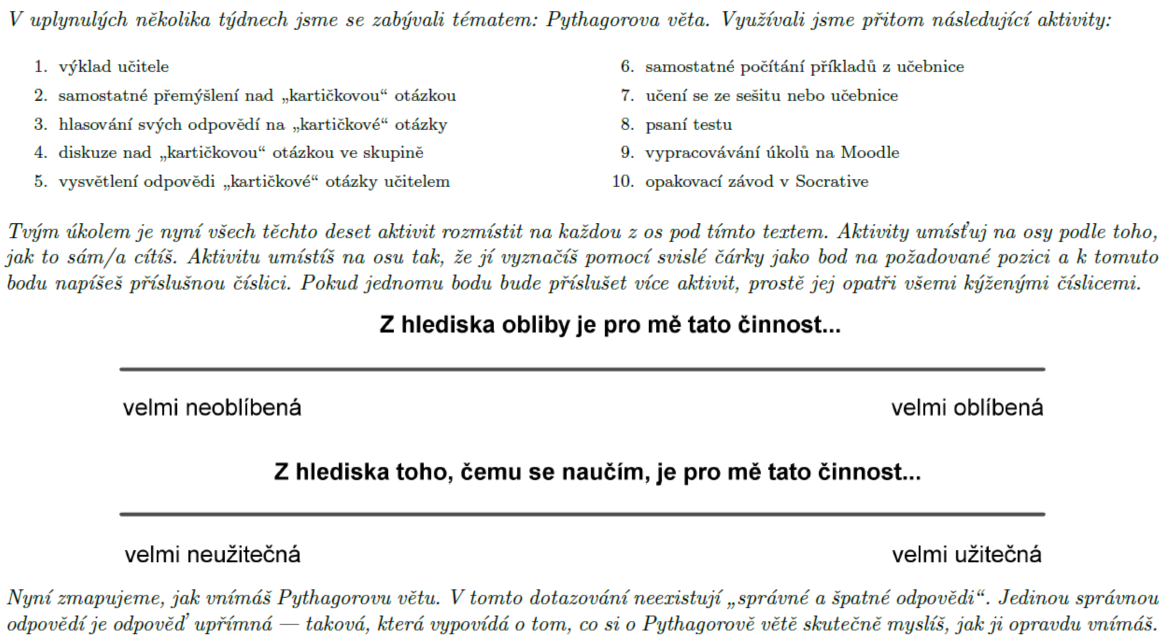
[4] Ve své základní podobě jsou hlasovací karty průsvitné, a tedy čitelné žákům sedícím za hlasujícím. Zvědaví žáci se dále na své spolužáky během hlasování mnohdy otáčejí. Anonymitu karet je však možno navýšit užitím silnějšího papíru, tmavým potištěním zadní strany a následnou laminací.

co do výstupního porozumění, … [10]). Dalaším cílem je na uvedené úrovni zmapovat možná úskalí a benefity spojené s implementací této metody; případně navrhnout adekvátní modifikace implementaci usnadňující. Pro tyto účely od začátku školního roku 2018/19 probíhá ve třídě o 30 žácích tercie víceletého gymnázia (8. třída ZŠ) akční studie, kdy jsou nové koncepty v matematice žákům představovány výhradně pomocí PI (od 3. měsíce výuky – první dva měsíce probíhala výuka klasicky z důvodu vzájemné aklimatizace). Nosnou pátěří studie je snaha mapovat vývoj třídy v průběhu školního roku, realizovat pravidelnou reflexi, porovnat třídu samu se sebou před a po implementaci PI (motivační a postojová struktura; míra porozumění geometrickým konceptům a schopnost argumentace) a porovnat třídu s globálním vzorkem (PISA, TIMSS; výzkumy postoje českých žáků vůči matematice Pavelková a Hrabal [8], Chvál [9]). Ve zkoumané třídě byla na začátku školního roku 2018/19, po prvních 2 měsících a na konci školního roku psána dvojice týž postojově-motivačních dotazníků. Dále byl na začátku a na konci roku 2018/19 psán týž test zkoumající porozumění geometrickým konceptům a schopnost argumentace žáků. Během roku 2018/19 pak byly pravidelně psány klasické testy obohacené o konceptuální otázky (v poměru 3:2 ve prospěch klasických učebnicových početních úloh) a dotazníky mapující vnímanou užitečnost a oblibu edukačních aktivit užívaných v probíraných tématických celcích. Žákům byly dále na konci roku 2018/19 zadány vybrané úlohy z testu PISA 2012 a na začátku roku 2019/20 pak z testu TIMSS 2007. V duchu akční studie probíhala na konci každého tématického celku reflexe (nahrávaná na diktafon a posléze hlouběji analyzovaná) se skupinou osmi vybraných žáků. Předmětem diskuze byly průběžné výsledky testů a dotazníků a výuka matematiky jako taková. Do reflexivní skupiny byli žáci vybráni podle kasuistiky provedené po prvních dvou měsících výuky v roce 2018/19, a to na základě jejich motivačně-postojové struktury a jejich počátečního porozumění, školské výkonnosti a schopnosti argumentace. Každá typová skupina žáků tak v reflexní skupině měla svého 1–2 zástupce.

Tento příspěvek se speciálně věnuje průběžným výsledkům studie, které se týkají užití hlasování (speciálně pak elektronického) ve výuce matematiky v kontextu nasazení metody PI.

5 Kvantitativní výsledky spojené s hlasováním

Jak bylo zmíněno v sekci 4, od počátku 3. měsíce roku 2018/19 žáci ve výzkumné třídě na konci každého tématického celku (tj. zhruba jednou měsíčně) vyplňovali dotazník mapující jimi vnímanou oblibu a užitečnost deseti užívaných edukačních aktivit. Tento dotazník (konkrétně pro téma Pythagorova věta) si můžeme prohlédnout na obrázku 3.
Výstupem dotazníku je rozmístění „názorů konkrétních žáků“ na dílčí aktivity v sémantickém prostoru dimenze dva (obliba–užitečnost), viz obrázek 4 (poloha a rozměry šedých obdélníků jsou dány aritmetickým průměrem a směrodatnou odchylkou). Na obrázku můžeme pozorovat, že v rámci tématu Pythagorova věta se žáci nejvíce shodovali v názoru na aktivitu *vysvětlení KoncepTestu učitelem* a jejich názor vykazoval vysoký rozptyl například pro aktivitu *vypracování úkolu na Moodle*. Dále je například zřejmé, že aktivita



V uplynulých několika týdnech jsme se zabývali tématem: Pythagorova věta. Využívali jsme přitom následující aktivity:

1. výklad učitele
2. samostatné přemýšlení nad „kartičkovou“ otázkou
3. hlasování svých odpovědí na „kartičkové“ otázky
4. diskuze nad „kartičkovou“ otázkou ve skupině
5. vysvětlení odpovědi „kartičkové“ otázky učitelem
6. samostatné počítání příkladů z učebnice
7. učení se ze sešitu nebo učebnice
8. psaní testu
9. vypracovávání úkolů na Moodle
10. opakovací závod v Socrative

Tvým úkolem je nyní všech těchto deset aktivit rozmístit na každou z os pod tímto textem. Aktivity umísťuj na osy podle toho, jak to sám/a cítíš. Aktivitu umístíš na osu tak, že jí vyznačíš pomocí svislé čárky jako bod na požadované pozici a k tomuto bodu napíšeš příslušnou číslici. Pokud jednomu bodu bude příslušet více aktivit, prostě jej opatři všemi kýženými číslicemi.

Z hlediska obliby je pro mě tato činnost...

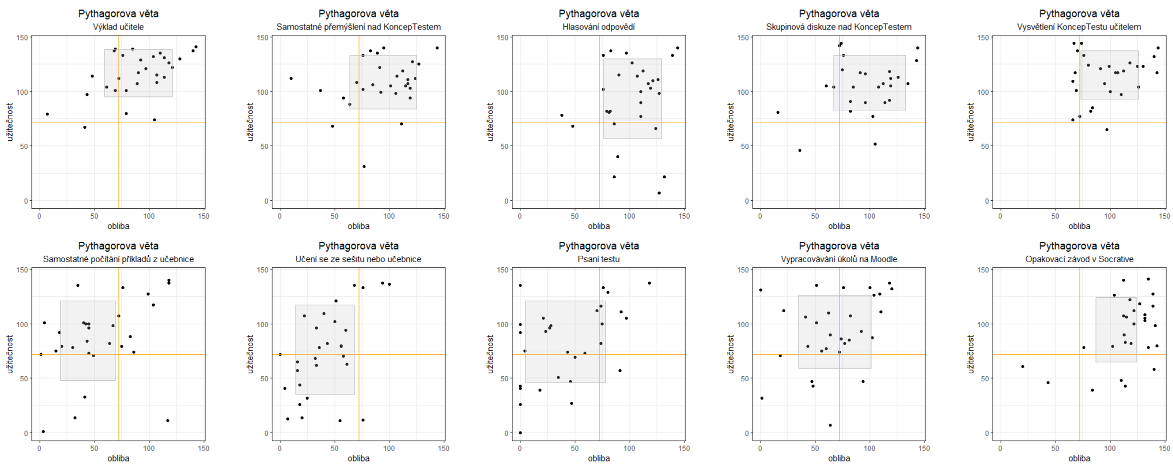
velmi neoblíbená — velmi oblíbená

Z hlediska toho, čemu se naučím, je pro mě tato činnost...

velmi neužitečná — velmi užitečná

Nyní zmapujeme, jak vnímáš Pythagorovu větu. V tomto dotazování neexistují „správné a špatné odpovědi“. Jedinou správnou odpovědí je odpověď upřímná — taková, která vypovídá o tom, co si o Pythagorově větě skutečně myslíš, jak ji opravdu vnímáš.

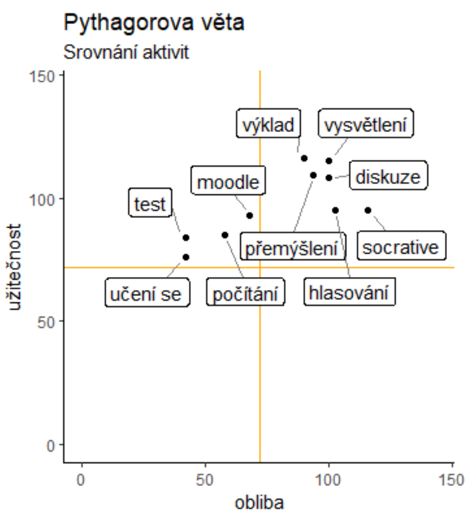
Obrázek 3: Dotazník mapující vnímanou oblibu a užitečnost edukačních aktivit



Obrázek 4: „Názor žáků“ na užité edukační aktivity

hlasování je u žáků spíše oblíbená, zatímco *psaní testu* vnímají výrazně hůře. Rovněž lze říci, že *hlasování* bylo většinou žáků vnímáno spíše jako užitečné.

Podíváme-li se ještě na obrázek 5, kde je v uvažovaném sémantickém prostoru pomocí průměrů vyneseno všech deset hodnocených aktivit, můžeme pozorovat, že všechny dílčí aktivity techniky PI (*výklad*, *přemýšlení*, *hlasování*, *diskuze*, *vysvětlení*) jsou žáky vnímány velmi podobně a tuto zjevnou provázanost je nutné při analýze kterékoli konkrétní z nich brát v potaz - tedy i v případě *hlasování*. Poznamenejme ještě, že zde prezentované výsledky pro téma Pythagorova věta vykazují poměrně značnou časovou stabilitu, a že přinejmenším průměrná hodnocení se během roku příliš nemění. Konkrétně *hlasování* bylo během roku 2018/19 stabilně hodnoceno jako oblíbené a spíše užitečné. S oblibou *hlasování* se lze smířit snadno, jak si ale vysvětlit jeho užitečnost si ukážeme v následující sekci věnované kvalitativním výstupům na toto téma.



Obrázek 5: Průměrná hodnocení edukačních aktivit

6 Kvalitativní výsledky spojené s hlasováním

Výroky žáků obsažené v této sekci jsou uvedeny ve své autentické podobě (pro text zajímavé pasáže jsou zvýrazněny **tučně** a **zelenou** barvou). Výroky jsou publikovány v souladu s informovaným souhlasem, který podepsali příslušní zákonní zástupci.

„Podle mého názoru spočívá obliba hlasování také v tom, že ***jde o jiný druh řešení úlohy – něco neobvyklého****. Co se užitečnosti týče, přijde mi, že to spočívá v tom, že* ***každý má prostor vyjádřit svůj názor****. V klasické úloze řekne třeba jen jeden člověk, jak danou úlohu řešil, ale tady vyjádří svůj názor všichni. Osobně mi ale více užitečné přijde přemýšlení a následné vysvětlování kartičkové úlohy někomu jinému.“*

„Já také naprosto souhlasím. ***Neumím si představit kartičkovou úlohu bez hlasování.*** *Už to k sobě tak nějak neodmyslitelně patří...“*

V rámci pravidelných reflexivních skupin padla řada výroků podporujících evidentní skutečnost, že během fází individuálního přemýšlení a během skupinových diskuzí nad KoncepTestem žáci aktivně přemýšlejí.

„Vona mi to.. Vona ***jak mluvila, tak to kreslila. A jak jsem se na to*** *jako* ***koukala, a pak jsem to*** *jako* ***slyšela, tak jsem přišla na to, proč to tak je.“***

V předchozí sekci jsme zmínili, že bylo *hlasování* vnímáno žáky v průběhu roku 2018/19 stabilně jako oblíbené a spíše užitečné. Prvotní úvahy připisovaly toto zjištění na vrub zejména faktu, že žáci veškeré PI aktivity vidí spíše jako jeden celek (viz obrázek 5) a že jim tak *hlasování* splývá s dalšími PI aktivitami. O to překvapivější byly četné proklamace žáků popisující *hlasování* jako okamžik, kdy je třeba pečlivě zvážit všechny možnosti a nad úlohou se před závazným odesláním svého hlasu ještě jednou zamyslet jiným způsobem než v průběhu jejího řešení.

*„**Při tom hlasováním** mně jako přijde, že když to jako zapnete třeba na tom mobilu a já tam jako **zvolím tu odpověď a než to odešlu, tak si to ještě pětkrát promyslím,** jestli je to jako…“*

„Přemýšlím jiným způsobem, než přemýšlím nad kartičkovou úlohou samotnou, takže v tomto ohledu je samotné hlasování dost užitečné… Respektive, přemýšlím ještě z jiné strany.“

PI aktivity *první hlasování*, *individuální přemýšlení* a *skupinové diskuze* jsme proto souhrnně označili jako fáze kogitace (jiný výraz pro přemýšlení a uvažování). Když však žáci byli v rámci reflexivní skupiny seznámeni s modelem na obrázku 6 týden před konferencí UPVM2019, ukázalo se, že obzvláště u složitějších úloh, kdy si žáci svou odpovědí nejsou zcela jisti ani po fázi skupinových diskuzí, probíhají i u *druhého hlasování* podobné úvahy jako u *prvního hlasování*. Podle svých slov, žáci rovněž v případě složitějších KoncepTestů více přemýšlejí nad závěrečným *vysvětlením úlohy* učitelem, respektive žákem. V případě složitějších KoncepTestů tak lze do kategorie kogitace zahrnout i *druhé hlasování* a závěrečné *vysvětlení úlohy*.

Obrázek 6: Kategorie kogitace

Na aktivity spjaté s PI však žáci nahlížejí i z jiného úhlu, zvláště pak na samotné hlasování.

„Někteří taky ztratili svou volnost a byli nuceni něco dělat…“

*„Já jako vím, že někdo, ale jakože mi jako říkal, že mu to jako nepřijde nějak srozumitelný, že s tím má jako docela problém, že se to doma sám doučuje, **že mu nevyhovuje, že o tom musí sám přemýšlet, že to prostě fakt chce jen říct, jak to prostě je.**“*

Aktivity, které pro některé žáky znamenají příjemné zpestření, možnost vyjádřit se a diskutovat s ostatními, pro jiné mohou ztělesňovat chvíle nepohodlí a nutnost zaujmout nějaké stanovisko. Ne každého žáka lze vždy a stabilně zařadit do některé ze dvou uvedených skupin. Jak naznačuje obzvláště druhý z výroků, nutnost přemýšlení ne všichni žáci přijímají s nadšením. Dále v textu si ukážeme celou řadu dalších výroků referujících o nebezpečích spojených s užitím hlasování při výuce.

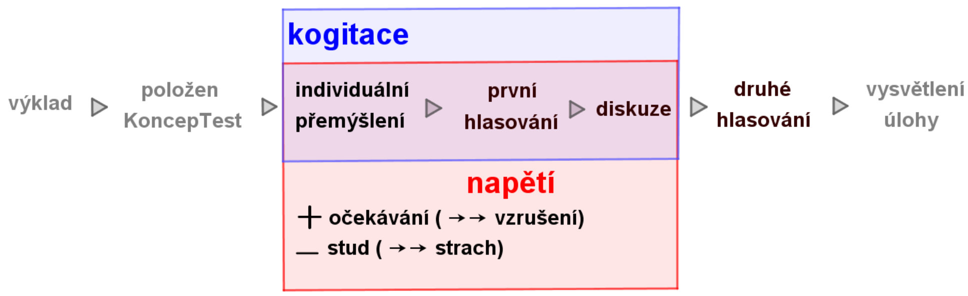
V rámci jednoho týdne výuky bylo *hlasování* záměrně z fází PI zcela vyřazeno a žáci byli posléze dotázáni na subjektivně vnímaný rozdíl. Jejich reakce svědčily o skutečnosti, že bez *hlasování* docházelo k celkovému útlumu přemýšlení ve všech ostatních fázích, a že si žáci dílčí úlohy i jejich řešení mnohem méně pamatovali než obvykle[5].

*„Jakože **mě připadá, že si to i jako míň pamatuju, po pravdě. Já nevím jak sem to,** protože mám prostě.. člověk si jako zapamatuje co jako hlasoval, že jo.. ale když takhle tak, já už ani nejsem jistá, co jsem dala a.. jakože, vlastně a za nedlouho.. pozejtří si už ani jakoby nebudu pamatovat pořádně, co to jako bylo za otázku.“*

Toto pozorování nás přivedlo k úvaze, zda obzvláště *první hlasování* těsně následované *individuálním přemýšlením* a *skupinovými diskuzemi* (tedy aktivitami zahrnutými do kategorie kogitace) nevytvářejí jakési napětí, nebo-li hnací sílu, která žáky motivuje nad KoncepTestem přemýšlet. Dříve než jsme k tomuto závěru dospěli, byla zaznamenána celá řada žákovských výroků svědčících o určitém stresu ve spojitosti s hlasováním – obzvláště pak, probíhalo-li hlasování, z pohledu žáků, nedostatečně anonymně.

*„**Když** za prvé tam **hlasuju** (na telefonu) nějak **špatně, tak se necejtim potom tak trapně**.. (úsměv) a.. a jako.. je to takový jakože.. je.. (rozpačitý úsměv).. že to jako není, že hned zase vidim jak ostatní jako.. mají prostě přede mnou lidi, mají prostě něco úplně jinýho, ale.. mě to jakoby přijde příjemnější..“*

*„**Já třeba největší risk vidím v tom, jak zareagují ostatní na mojí odpověď a to, že vlastně jdete s kůží na trh.**“*



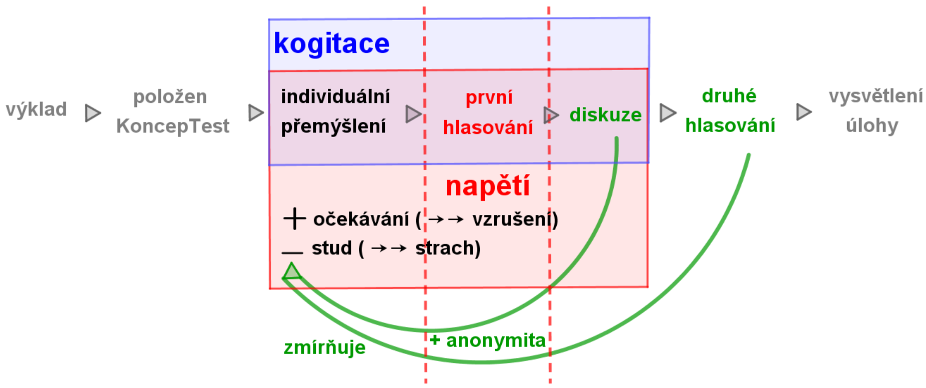
Obrázek 7: Kategorie napětí

[5] V souladu tímto zjištěním je i zahraniční rešeršní práce [10] rovněž referující o snížení efektivity PI při vyřazení *hlasování*.

Nicméně, jak naznačuje schéma na obrázku 7, na napětí není nutno nahlížet pouze negativně, jak dokládají výroky žáků.

„Je to chvilka napětí, po přemýšlení jakási forma odměny, odpočinku. Také je to chvilka, kdy si řeknu: bylo to správně? Přišla jsem na to správnou cestou? Co dali ostatní? Jak na to přišli?“

Co někteří žáci vnímají jako trpné vyčkávání před vynesením ortelu spolužáky (či samotným učitelem[6]), pro jiné znamená vzrušené očekávání se zatajeným dechem – takový ten pocit, krátce před tím, než zvoláte: *„bingo!“*. *První hlasování*, *samostatné přemýšlení* a *diskuze* mohou tedy představovat i napětí v pozitivním slova smyslu aneb jakousi harmonii mezi kumulováním příjemného vzrušení během *přemýšlení* a jeho následného uvolňování při *skupinové diskuzi*.



Obrázek 8: Anonymita hlasování a diskuze zmírňuje negativní složku napětí

„Za mě mi to hlasování dává větší motivaci tu danou úlohu řešit. Při tom hlasování musíme projevit nějaký svůj názor, a když se nás někdo zeptá, abychom to vysvětlili je lepší mít alespoň nějakou odpověď, i kdyby byla špatná a stát si za ní než nemít žádnou. A pak ***když naše odpověď je správná, máme takový ten pocit, vítězství, a když je naše odpověď špatně, nic se neděje, máme druhé hlasování na opravu své dřívější chyby.“***

Druhé hlasování pak pro žáky představuje možnost opravy, pokud se v případě *prvního hlasování* spletou a s vidinou této možnosti pak pro ně *první hlasování* není natolik stresující. Dalším faktorem zmírňujícím negativní složku napětí je zabezpečení anonymity jak během *hlasování*, tak i v průběhu *skupinových diskuzí* (viz obrázek 8). V případě *skupinových diskuzí* chápeme anonymitu tak, že je žákům umožněno skupiny tvořit zcela svobodně, tedy na základě jejich osobních preferencí. Žáci si tak logicky vybírají pouze komunikační partnery, jejichž kritice jsou ochotni podrobit svůj názor a ne žáky, jejichž

[6] Poznamenejme, že žáci jsou si při hlasování dobře vědomi, že učiteli je okamžitě známa jejich odpověď.

případného posměchu se obávají. Anonymitu *hlasování* pak zajišťuje právě vhodná volba prostředku hlasování, a sice chytré telefony, nebo alespoň vhodně upravené hlasovací karty.

„Ale mě to jako nevadí, ale je mi to.. (smích).. ale ten mobil mi připadá, že je to lepší, jakože není to třeba, jakoby mi to úplně vadilo, ale je lepší.. jako když je to úplně anonymní... *takže."*

7 Závěr aneb smíšený pohled na věc

Ačkoli mělo stanovisko České školní inspekce [13] ze dne 17. 01. 2019 sloužit jako jakási rukověť pro školy, jak postupovat v souladu se zákonem při snaze o regulaci užívání mobilních telefonů, závěrečný doslov dokumentu reprezentoval zcela protichůdný názor:

„Za velmi důležité pak Česká školní inspekce považuje to, aby školy uvažovaly také nad možnostmi didaktického využití mobilních telefonů ve vzdělávání i při volnočasových aktivitách žáků v rámci pobytu ve škole."

V souladu s doslovem proto příspěvek ve své první části představil možnost efektivního využití mobilních telefonů v rámci výuky matematiky, a sice elektronické hlasování následované skupinovými diskuzemi nad položenou konceptuální otázkou, tj. metodu Peer Instruction. Sama historie totiž opakovaně doložila, že pouhé zavedení elektronického hlasování bez vhodně uzpůsobené edukační strategie nevede k navýšení efektivity výuky.

Druhá část příspěvku ukázala, jak elektronické hlasování vnímají sami žáci. Výsledky pravidelných dotazníků hovořily o hlasování jako o oblíbené aktivitě, kterou žáci považují spíše za užitečnou z hlediska toho, čemu se naučí. Pro některé žáky hlasování představuje příjemné zpestření a možnost vyjádřit se. Pro jiné žáky pak ztělesňuje nepříjemný diskomfort a nutnost zaujmout nějaké stanovisko. Hlasování také můžeme chápat jako negativní či pozitivní motivaci pro přemýšlení během ostatních Peer Instruction aktivit, ale i jako aktivitu, při které přemýšlení probíhá, tedy jako činnost kogitace i její hnací pohon (napětí). Je-li hlasování vyřazeno, vede to k celkovému snížení efektivity techniky Peer Instruction. Poznamenejme na závěr, že prezentovaný model smyslu *hlasování* byl diskutován s žáky a na základě jejich kritických připomínek ještě finálně upraven a rozšířen.

Výzkum byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy (projekt č. 680119). Dále děkuji svým žákům, obzvláště pak členům reflexní skupiny, bez jejichž přímé účasti, názorů a komentářů by nebylo výsledků vhodných k publikaci.

Literatura:

[1] Askew, M. a Ebbutová, S. *Geometrie bez (m)učení*, Grada Publishing, Praha, 2007.

[2] Mazur, E., *Peer instruction: a user's manual*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[3] Hejný, M., Schéma – pilíř matematické znalosti. *Pytagoras* 2007, 3–17, Bratislava, 2008.

[4] Tall, D. a Vinner, S., Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and contunuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151–169, 1981.

[5] Zadražil, T., Metoda Peer Instruction ve výuce geometrie,*Cesty k matematice* 3, Praha, 2018.

[6] Končelová, J., Hlasování jako okamžitá zpětná vazba ve výuce fyziky, Diplomová práce, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, 2010.

[7] Abrahamson L., A Brief History of Networked classroom, *Banks, D. A. (ed.), Audience Response Systems in Higher Education, Applications and Cases*, Information Science Publishing, Hershey (USA), London (UK), 2006.

[8] Pavelková, I. a Hrabal, V., *Jaký jsem učitel*, Portál, Praha, 2010.

[9] Chvál, M., Změna postojů českých žáků k matematice během školní docházky, *Orbis scholae* 7, Praha, 2018.

[10] Vickrey, T. et al., Research-Based Implementation of Peer Instruction: A Literature Review, *CBE – Life Sciences Education* 14, 2015.

[11] Novak, G. M., *Just-in-time teaching: blending active learning with web technology.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.

[12] Kay, R. H. a Lesage, A., Examining the benets and challenges of using audience response systems: A review of the literature, *Computers & Education* 53, 819-827, 2009.

[13] Stanovisko České školní inspekce k regulaci užívání mobilních telefonů ve školách, SKAV.cz: stálá konference asociací ve vzdělávání [online], 16.01.2019 [cit. 2019-12-08], Dostupné z: https://www.skav.cz/wp-content/uploads/2019/01/Stanovisko-C48CC5A0I-k-regulaci-mobilnC3ADch-telefonC5AF-ve-C5A1kolC3A1ch-16.1.2019-RP.pdf

Tomáš Zadražil
Katedra didaktiky matematiky
MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: tomas.zadrazil@gmail.com

Název:	Sborník příspěvků 9. konference Užití počítačů ve výuce matematiky
Vydavatel:	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Editoři:	Roman Hašek a Přemysl Rosa
Vydání:	1.
Počet stran:	128
Rok vydání:	2019
ISBN	978-80-7394-795-8