Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Sborník příspěvků 10. konference
Užití počítačů ve výuce matematiky

11. – 13. listopadu 2021
České Budějovice

Společnost učitelů matematiky
JČMF

Katedra matematiky Pedagogické fakulty
Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

ISBN 978-80-7394-906-8

Předmluva

Sborník obsahuje příspěvky, které zazněly na desáté konferenci *Užití počítačů ve výuce matematiky*, pořádané ve dnech 11. – 13. listopadu 2021 na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Konference probíhala pod záštitou Pedagogické fakulty, ve spolupráci se Společností učitelů matematiky JČMF a Jednotou českých matematiků a fyziků, pobočným spolkem České Budějovice.

Plenární přednášky přednesli Jana Trgalová (Université Claude Bernard Lyon, Francie): *Various uses of digital technology: the example of dynamic geometry*, Zsolt Lavicza (Johannes Kepler Universität Linz, Rakousko): *Opportunities to integrate technologies into classrooms through a STEAM education approach*, Pavel Tlustý (Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích): *Matematika ve světě kolem nás* a Zdeňka Crkalová (Univerzita Karlova): *Mluvení a řeč těla*. Anotace přednášek jsou spolu s prezentacemi dostupné na webové stránce konference www.pf.jcu.cz/upvm.

Přednesené příspěvky se kromě tradičních témat využití systémů počítačové algebry a dynamické geometrie ve výuce a softwarové podpory e-learningu věnovaly také aktuálním otázkám online výuky matematiky spolu s využitím dalších programů a nových technologií ve výuce matematiky i dalších disciplín aplikujících matematické postupy. Celkem na konferenci kromě plenárních přednášek zaznělo 31 referátů a bylo uspořádáno 8 workshopů. Příslušné články jsou ve sborníku uvedeny v abecedním pořadí podle jmen autorů. Sborník byl recenzován členy programového výboru konference.

Poděkování patří členům organizačního výboru a studentům Pedagogické fakulty za jejich obětavou práci jak při přípravě, tak i v průběhu konference.

Programový výbor konference pracoval ve složení

Mgr. Roman Hašek, Ph.D.
doc. RNDr. Helena Koldová, Ph.D.
Univ.-Prof. Zsolt Lavicza, Ph.D.
prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
doc. RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.
doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.
doc. RNDr. Libuše Samková, Ph.D.
prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.
doc. Jana Trgalová, Ph.D.
doc. PaedDr. Jiří Vaníček, Ph.D.
prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

V Českých Budějovicích 20. prosince 2021

Za programový výbor

doc. RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

Obsah

Daniela Bímová, Jiří Břehovský, Petra Pirklová
Kde nepomáhají virtuální animace, mohou pomoci 3D modely 5

Jiří Břehovský, Daniela Bímová, Petra Pirklová
Kombinatorika v geometrii? Žádný problém 6

František Bubeník
Distanční výuka matematiky na fakultě stavební ČVUT Praha 16

Štěpán Buzek
Užití programu GeoGebra při řešení problémů v geometrii 20

Jana Cachová, Lukáš Vízek
Řešení úloh ve čtvercové a trojúhelníkové mříži pohledem GeoGebra Classroom 27

Zoltán Fehér, Ladislav Jaruska, Katarína Szarka, Eva Tóthová Tarová
Porovnanie výsledkov študentov podľa kontextu úlohy v teste z výrokovej logiky 28

Věra Ferdiánová, Martin Plinta, Martina Procházková
Rozšířená realita ve vybraných úlohách stereometrie 35

Jan Fiala, Andreas Lindner
Simulace hodu kostkou v programu GeoGebra 43

Štefan Gubo, Ladislav Végh, György Juhász
Úspešnosť žiakov stredných škôl na Slovensku i v Maďarsku v riešení úloh z informatiky testu STEM – Výsledky pilotného prieskumu 44

Jana Hnatová, Adam Hnat, Alžbeta Bučková
Multimediálna podpora edukačnej aktivity v matematike technológiou rozšírenej reality 56

Jaroslav Hora
Eulerova faktorizační metoda 57

Miroslava Huclová
Efektivita výuky středové souměrnosti při vzdělávání distančním způsobem 58

Antonín Jančařík
Edubo – EDUkační platforma pro Bezpečnou On-line výuku 69

Ladislav Jaruska, Zoltán Fehér, Katarína Szarka, Eva Tóthová Tarová
Skúmanie úspešnosti študentov aplikovania výrokovej logiky při riešení úloh s fyzikálnym a reálnym kontextom 75

Marek Kobera
Stav inovací ve výuce matematiky na jihočeských středních školách 87

Leni Lvovská, Kamil Malinka
3D tisk a jeho uplatnění na základních a středních školách 94

Lukáš Másilko, Terézia Černá
Distanční výuka vysokoškolské matematiky badatelsky? 104

Jiří Merta
Využití počítače pro žáky s tělesným postižením ve výuce matematiky 105

Jitka Nováková
Využití GeoGebry při distanční výuce matematiky na ZŠ a SŠ 114

Zdeněk Novotný
GeoGebra v distanční výuce geometrie na základní škole pohledem začínajícího učitele 115

Zuzana Pátíková
Zkušenost s výukou určitého integrálu s využitím IT 123

Petra Pirklová, Daniela Bímová, Jiří Břehovský
Mathematikus – prostředek pro zdokonalování prostorové představivosti 128

Jakub Poruba, Pavel Cimbálník
Dynamické prvky v GeoGebře při konstrukci kuželoseček 136

Kamila Průdková, Roman Hašek
Regiomontanův problém – řešení užitím dynamických appletů programu GeoGebra 147

Libuše Samková
Vzdělávací viněty ve výuce matematiky 157

Petra Surynková
3D tisk a výuka geometrie 163

Jan Šafařík, Jana Bulantová, Lucie Zrůstová
GeoGebra kniha „Sbírka řešených příkladů z konstruktivní geometrie“ 164

Radek Šmíd
Pomůcka pro výuku řezů těles 173

Daniela Velichová
3D geometria 180

Klára Vocetková
Počítačem podporované hodnocení v matematice 188

Šárka Voráčová
Online výlety s GeoGebrou 199

KDE NEPOMÁHAJÍ VIRTUÁLNÍ ANIMACE, MOHOU POMOCI 3D MODELY

Daniela Bímová, Jiří Břehovský a Petra Pirklová

Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

Abstrakt: Využívání digitálních technologií při výuce považujeme za přirozenou součást moderního způsobu vyučování. Mnohým žákům mohou cíleně naprogramované virtuální animace, umístěné např. na interaktivní webové stránce Mathematikus, pomoci s vytvářením správných představ 3D modelů či prostorových situací. Existují ale také žáci, kteří potřebují pro tvorbu správných představ zapojit více smyslů, kromě zraku např. také hmat. Proto jsme vymodelovali a následně vytiskli odpovídající 3D modely pro vybrané úlohy z Mathematikusu.

Klíčová slova: Virtuální animace, Mathematikus, Rhinoceros, PrusaSlicer, modelování, 3D modely, krychlová tělesa, 3D tisk, manuální činnosti, projekt iTEM.

Where Virtual Animations Do Not Help, 3D Models Can Be Useful

Abstract: We consider the use of digital technologies in teaching as a natural part of the modern way of teaching. For many students, purposefully designed virtual animations, e.g. placed in the interactive website called Mathematikus, can help create the right imaginations for 3D models or spatial situations. But some students need to involve more senses to create correct images. In addition to sight, they also need to use touch. Therefore, we modelled and then printed the corresponding 3D models for selected problems from Mathematikus.

Key words: Virtual animations, Mathematikus, Rhinoceros, PrusaSlicer, modelling, 3D models, cubic solids, 3D printing, manual activities, project iTEM.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 29 (2021), No. 1

Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2021_Bimova_et_al.pdf

KOMBINATORIKA V GEOMETRII? ŽÁDNÝ PROBLÉM.

Jiří Břehovský, Daniela Bímová, Petra Pirklová

Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

Abstrakt: Příspěvek je věnován ukázkám řešení vybraných geometricko-kombinatorických problémů řešených pomocí freewaru GeoGebra. Obě zmíněné oblasti jsou důležitou součástí matematického vzdělávání a i přes to stále sílí tlaky na omezení jim určených časových dotací. V mnoha ohledech jsou oba uvedené celky pro žáky obtížné, ale v získávání matematických kompetencí nemálo důležité. Přitom nabízejí celou řadu možností k účelnému využívání výpočetní techniky jak při jejich výuce, tak při řešení problémů.

Klíčová slova: Geometrie, kombinatorika, geometricko-kombinatorická úloha, GeoGebra.

Combinatorics in geometry? No problem.

Abstract: The paper is devoted to examples of solutions to selected geometric-combinatorial problems solved using GeoGebra freeware. Both of these areas are an important part of mathematics education, and despite this, there is growing pressure to limit the time allowances allocated to them. In many respects, both of these units are difficult for students, but they are very important in acquiring mathematical competencies. At the same time, they offer a wide range of possibilities for the effective use of computer technology both in their teaching and in solving problems.

Key words: Geometry, combinatorics, geometric-combinatorial problem, GeoGebra.

Úvod

Kombinatorika je jedním z nejstarších odvětví diskrétní matematiky, která sahá až do 16. století, kdy hazardní hry hrály klíčovou roli ve společenském životě (Abramovich & Pieper, 1996). Tento zájem podněcoval matematiky k hlubšímu zkoumání jejích principů a k vybudování uceleného matematického aparátu. V současné době je kombinatorika významnou součástí matematických osnov. Jako celek obsahuje bohatou strukturu důležitých principů, které zasahují i do dalších oblastí matematiky (Borovcnik, Peard 1996). Ve své podstatě je řešení kombinatorických úloh vhodné k uplatňování heuristických přístupů. Žáci se tak mohou učit využívat heuristické strategie při řešení problémů. Uplatněním takových způsobů řešení problémů při výuce matematiky dochází také ke zkvalitnění komunikace mezi žáky. (Doulík & all 2016).

Kombinatorika je tak jedním z vhodných nástrojů ke zvyšování matematické gramotnosti a dalších klíčových kompetencí žáků. Proto školskou kombinatoriku chápeme jako podstatnou součást matematické kultury vzdělávání. Důležitost rozvíjet u žáků kombinatorické myšlení byla prokázána celou řadou odborných studií (např. Benson & Jones, 1999; Johnson, Jones, Thornton, Langrall & Rous, 1998; Nisbet et al., 2000; Zimmermann & Jones, 2002). Výsledky těchto studií ukazují na obtíže žáků s řešením úloh, které vyžadují od žáků kombinatorické uvažování. Obdobné závěry ukazují i mezinárodní studie výsledků ve vzdělávání.

O důležitosti geometrie ve výuce matematiky píše již profesor Čech, který ve své metodice věnované výuce geometrie v primě napsal: „Euklidovská geometrie je nejstarší a dosud nepředstižený vzor exaktního badání, takže její studium může přispět ke vzdělání také ve vyšším smyslu než pouhým získáním konkrétních vědomostí.“ (Čech, 1940 - 1941). O téměř padesát let později upozorňuje také profesor Kolář na velmi slabé vědomosti žáků z geometrie, které dává mimo jiné do souvislosti se změnami jejích osnov. Mnoho dalších studií ukazuje, že prostorové uvažování pozitivně souvisí se schopnostmi řešit problémy v matematice a geometrii (Battista, Wheatley & Talsma, 1982; Fennema & Tartre, 1985; Moses, 1977).

Na základě vlastních zkušeností s více jak dvacetiletou výukou povinného předmětu Konstruktivní geometrie určeného pro studenty prvního ročníku bakalářského cyklu studia na Fakultě strojní Technické univerzity v Liberci a na základě výsledků výzkumu, ve kterém jsme testovali geometrické myšlení a prostorovou představivost studentů prvního ročníku bakalářského cyklu studia na Fakultě strojní v rámci Přípravného kurzu v září 2019, docházíme k závěru, že i studenti vysokých škol by měli pokračovat v procvičování prostorového a geometrického myšlení, jakož i v rozvoji jejich kombinatorického myšlení podobně, jako tomu bylo v nižších stupních jejich školní docházky.

V současné době dochází k úpravám a diskuzím nad obsahem matematického vzdělávání v rámci RVP a ke korekcím množství učiva, které bude žákům a studentům ve výuce matematiky předkládáno. Některé oblasti matematiky budou velmi pravděpodobně redukovány. Proto se domníváme, že je více než v jiné době nutné hledat různé možnosti efektivního propojování těch oblastí matematického vzdělávání, které jsou již nyní pro žáky obtížné, časově málo dotované, ale v získávání matematických kompetencí nemálo důležité. Jsme přesvědčeni o tom, že kombinatorika a geometrie jsou právě ty oblasti učiva, které si vyšší pozornost zasluhují.

1 Geometricko-kombinatorické úlohy

Z našeho pohledu jde o úlohy, které svým kontextem vhodně propojují kombinatoriku a geometrii. Takových úloh je celá řada. Některé využívají pouze různé geometrické pojmy nebo prostředí, jako například:

Kolik vlajek skládajících se ze tří vodorovně umístěných shodných obdélníků můžeme vytvořit pomocí pěti různých barev tak, aby se žádná z barev neopakovala?

Jiné vyžadují od řešitele hlubší geometrické znalosti a dovednosti a nutí žáka tyto znalosti a dovednosti používat v jiných oblastech matematiky. Právě takovými úlohami se budeme zabývat v další části textu. Uvedeme několik úloh, které jsou podle nás vhodné právě k propojení kombinatoriky a geometrie a přispívají tak k rozvoji kompetencí žáků v obou zmíněných oblastech matematiky. Půjde vždy o takové příklady, k jejichž úspěšnému vyřešení

budou žáci využívat znalosti z obou oblastí. Prezentovat budeme spíše jednodušší úlohy, které jsou také vhodné k seznámení žáků s touto problematikou.

V rámci řešení těchto úloh bychom také u žáků chtěli rozvíjet kompetence týkající se informační gramotnosti, a proto k zadávání a řešení jednotlivých úloh budeme s výhodou využívat program GeoGebra. Tento typ úloh pravidelně zařazujeme při přípravě budoucích učitelů matematiky a jako vhodné úlohy pro opakovací kurz matematiky a geometrie určený pro studenty 1. ročníků TUL. Kromě jiných předností, řešení těchto úloh rozvíjí prostorovou představivost a kombinační myšlení žáků a díky využití GeoGebry je lze účelně využít také při online výuce.

2 Využití GeoGebry

Pro zadávání geometricko-kombinatorických úloh využíváme software GeoGebra, GeoGebra Book a rozhraní GeoGebra Classroom. Tento software používáme jako nástroj, ve kterém lze obě prostředí, geometrii i kombinatoriku, dobře propojit. Zároveň, pokud je to nezbytné, studenty s tímto softwarem seznámíme. Naučíme studenty pracovat v GeoGebře a používat její internetová rozhraní. Ta pak společně využíváme při jejich dalším studiu na Fakultě strojní a na Fakultě přírodovědně-humanitní a pedagogické TUL. K zadávání úkolů studentům v e-learningu využíváme vytvořené studentské verze webového rozhraní GeoGebra Book a následně vygenerované GeoGebra Classroom. V sestavených učitelských verzích webového rozhraní GeoGebra Book prezentujeme a komentujeme řešení buď při kontaktní výuce ve třídách, nebo při online výuce. Při výuce samozřejmě nejprve dochází ke konfrontaci studentských řešení mezi studenty a následně k ukázce modelového řešení připraveného učitelem. Studenti prezentují svá řešení a komentují je. Mohou buď obhajovat nalezená řešení, nebo poukazovat na nedostatky či chyby ostatních. Využití online rozhraní GeoGebra Classroom má ještě jednu výhodu, kterou lze využít jak při kontaktní výuce ve třídě, tak při online výuce. Studenti jsou přihlášeni do online prostředí GeoGebra Classroom pod svými jmény. V tomto rozhraní samostatně řeší problémy a učitel má snadný a okamžitý způsob kontroly řešení každého z nich. Zadané úkoly lze samozřejmě individualizovat a vytvořit tak pro každého žáka jedinečný problém.

Všechna námi vytvořená internetová rozhraní GeoGebra Book a GeoGebra Classroom ve studentských verzích se skládají z dynamických appletů obsahujících texty zadání problémů, resp grafická zadání a volná místa pro jejich řešení. Pokud jsou v internetovém rozhraní dynamických appletů přidány nástroje softwaru GeoGebra, mohou studenti psát, kreslit nebo konstruovat svá řešení přímo do těchto volných ploch.

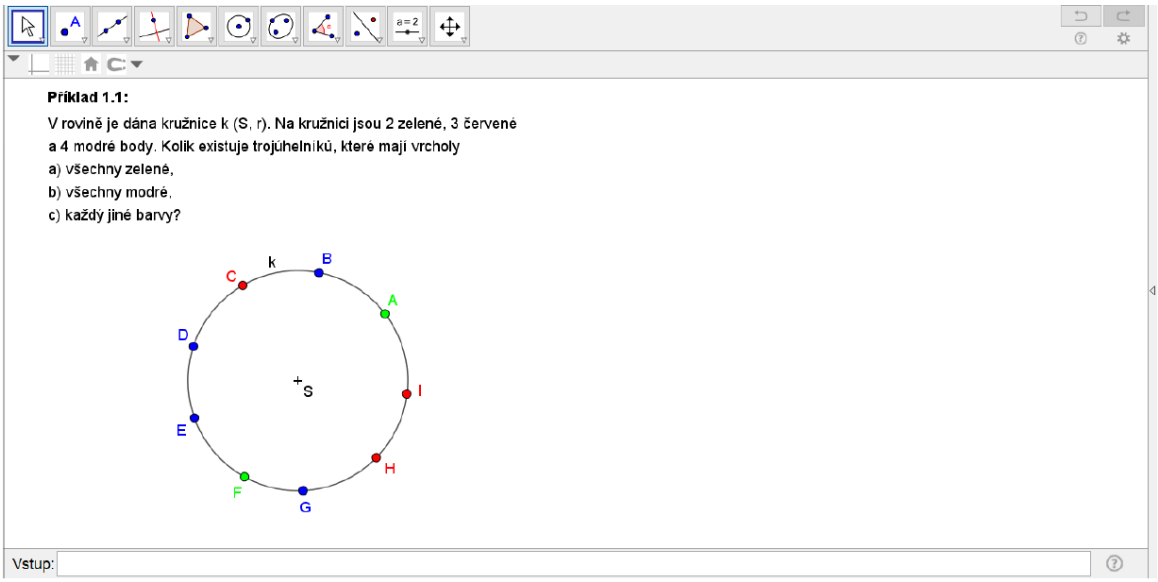
3 Vybrané geometricko-kombinatorické úlohy

V tomto odstavci si představíme úlohy vybraných geometricko-kombinatorických problémů. Ukážeme, jak vypadá rozhraní učitelské verze dynamického GeoGebra appletu pro daný problém a stručně okomentujeme řešení daného problému. Klíčová je pro nás ukázka prostředí, ve kterém výuka probíhá. Cílem je seznámit čtenáře s rozhraním dynamického GeoGebra appletu tak, jak jej studenti vidí ve vytvořené studentské verzi GeoGebra knihy, a nastínit možnosti softwaru GeoGebra pro dynamickou geometrii při prezentaci správných řešení vybraných geometricko-kombinatorických úloh.

3.1 Vrcholy na kružnici

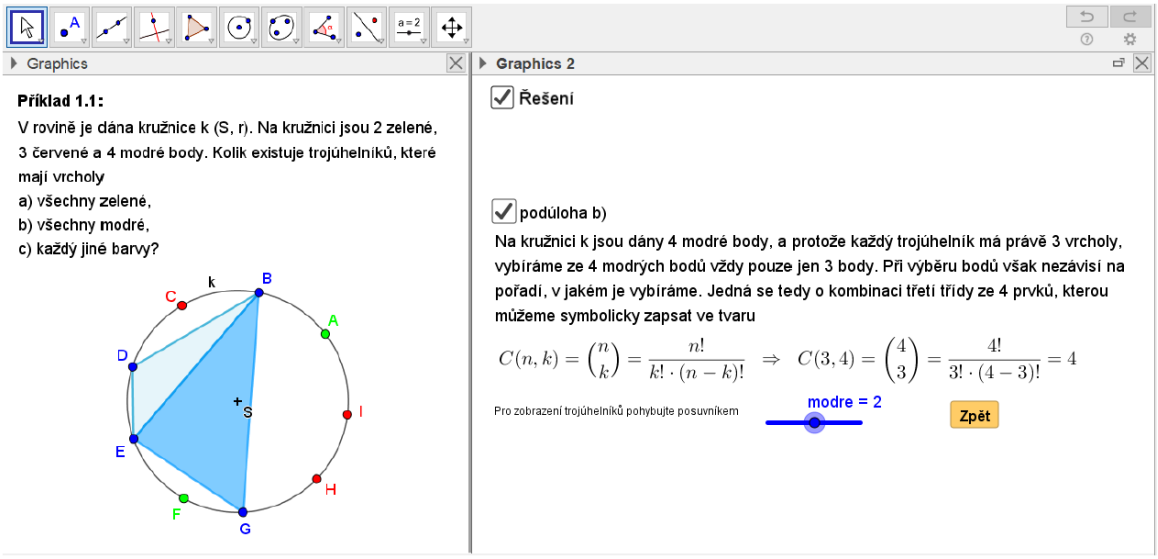
Je dána kružnice $k\ (S, r)$. Na kružnici k jsou dva zelené body, tři červené body a čtyři modré body. Kolik existuje trojúhelníků, které mají vrcholy

a) všechny zelené,
b) všechny modré,
c) každý jiné barvy?



Obrázek 1: Vrcholy na kružnici – studentská verze, zdroj: autor.

Náhled zadané úlohy s názvem „Vrcholy na kružnici“ ve studentské verzi je na obr. 1. Studenti si mohou vyzkoušet použití nástrojů programu GeoGebra při řešení geometricko-kombinatorické úlohy. Náhled části modelového řešení dílčího úkolu b) stejného problému je zobrazen v učitelské verzi dynamického GeoGebra appletu na obr. 2.



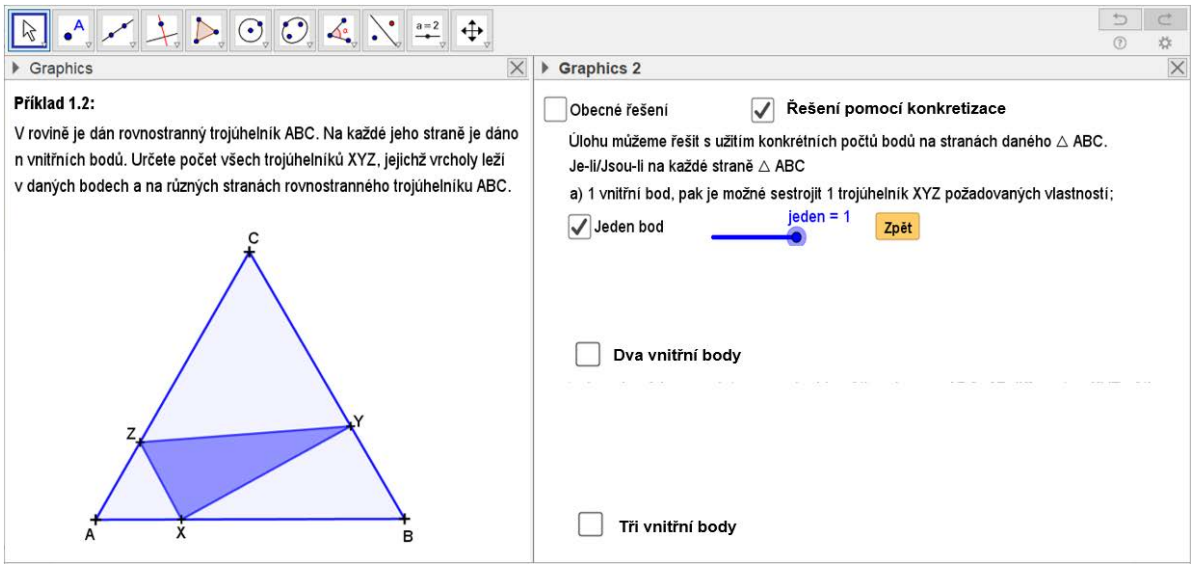
Obrázek 2: Vrcholy na kružnici – učitelská verze, zdroj: autor.

Tento problém zařazujeme jako propedeutiku dvou následujících problémů. Spojuje totiž kombinatoriku a geometrii s podobnými souvislostmi, jaké jsou uvedeny v následujících úlohách (Úlohy 3.2 a 3.3).

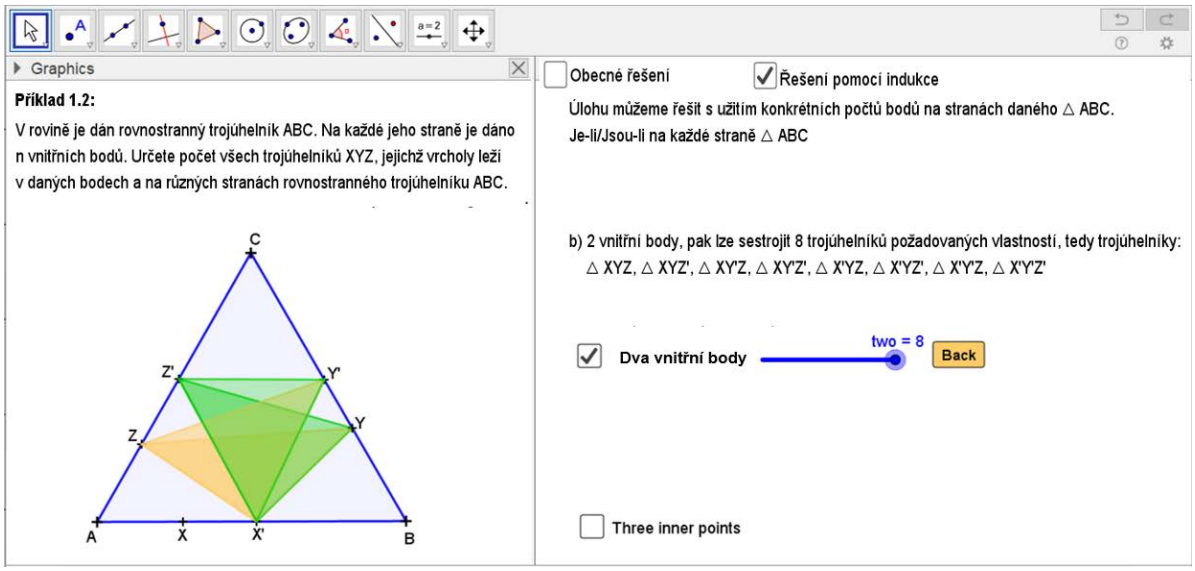
Obě další úlohy (Trojúhelník uvnitř trojúhelníku a Trojúhelník uvnitř čtverce) jsou zadány parametricky s parametrem n, $n \in N$. Úkolem řešitele je zjistit obecný výraz, závisející na parametru n, pro počet geometrických objektů, které lze sestrojit za daných podmínek. V obou případech je vhodné pro řešení problémů použít strategii zvanou „Konkretizace a zobecnění“. Myšlenka této strategie je založena na tom, že v první fázi řešení volíme konkrétní hodnotu, pozici, případně volíme speciální případ zadaného problému. V některých případech je nutné tuto volbu provést vícekrát, ať už proto, že řešitel není přesvědčen o nezávislosti volby konkrétních hodnot, nebo proto, že po jedné volbě nevidí myšlenku řešení. Druhým krokem je návrat k původnímu problému, ve kterém zobecníme konkrétní výsledky. Nezobecňujeme tedy problém, ale získané výsledky.

3.2 Trojúhelník uvnitř trojúhelníku

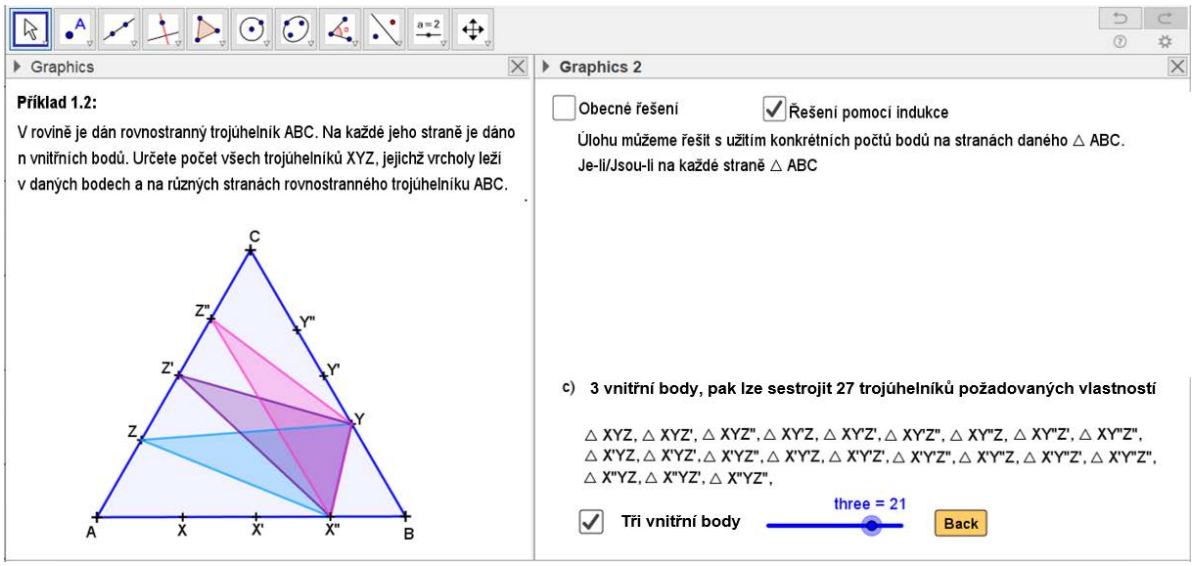
V rovině je dán rovnostranný trojúhelník $\boldsymbol{ABC}$. Na každé straně tohoto trojúhelníku je dáno $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků $\boldsymbol{XYZ}$, jejichž vrcholy se shodují s danými body a jejichž každý vrchol leží na jiné straně rovnostranného trojúhelníku $\boldsymbol{ABC}$.



Obrázek 3: Trojúhelník uvnitř trojúhelníku – jeden vnitřní bod, učitelská verze, zdroj: autor.



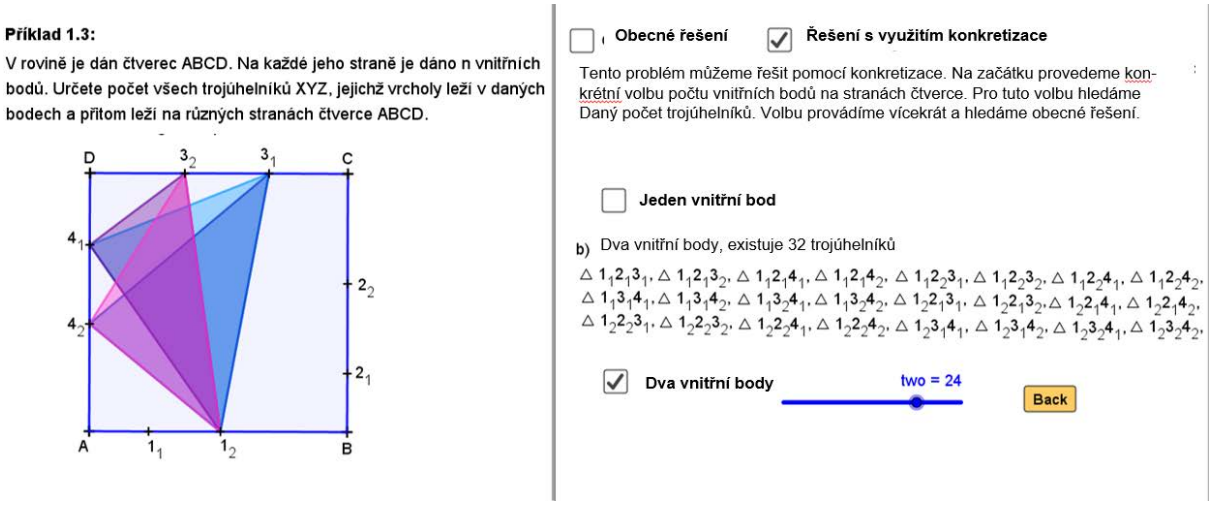
Obrázek 4: Trojúhelník uvnitř trojúhelníku – dva vnitřní body, učitelská verze, zdroj: autor.



Obrázek 5: Trojúhelník uvnitř trojúhelníku – tři vnitřní body, učitelská verze, zdroj: autor.

3.3 Trojúhelník uvnitř čtverce

V rovině je dán čtverec $ABCD$. Na každé straně tohoto čtverce je dáno n, $n \in N$, vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy se shodují s danými body a jejichž každý vrchol leží na jiné straně daného čtverce $ABCD$.

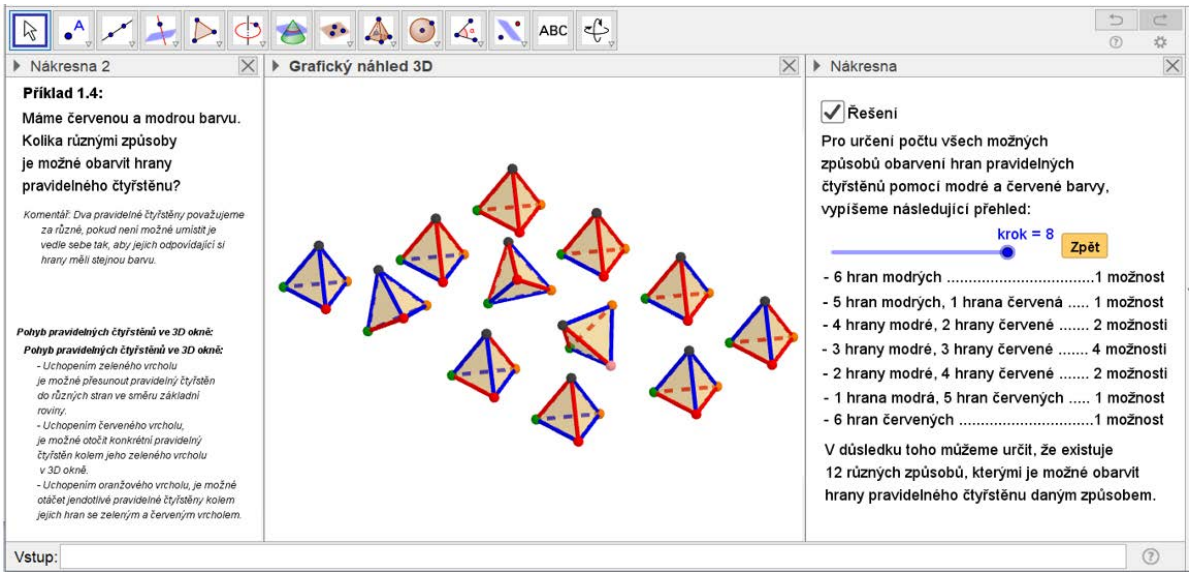


Obrázek 6: Trojúhelník uvnitř čtverce – dva vnitřní body, učitelská verze, zdroj: autor.

Výše uvedené úlohy je možné a vhodné modifikovat. Například z rovnostranného trojúhelníku (úloha 3.2) můžeme vytvořit pravidelný čtyřstěn s n, $n \in N$, vnitřními body na každé z jeho stěn. Nebo ze čtverce (úloha 3.3) můžeme sestavit krychli, na jejíž každé stěně bude n, $n \in N$, vnitřních bodů. Je pouze nutné specifikovat, že na každé stěně pravidelného čtyřstěnu nebo krychle může být pouze jeden vrchol hledaného trojúhelníku. Neuvažujeme tedy situaci, kdy by na jedné stěně, ať už pravidelného čtyřstěnu nebo krychle, měl ležet celý trojúhelník.

3.4 Hrany pravidelného čtyřstěnu

Máme červenou a modrou barvu. Kolika různými způsoby je možné obarvit hrany pravidelného čtyřstěnu? (*Poznámka: Dva modely pravidelného čtyřstěnu považujeme za různé, pokud je nelze umístit vedle sebe tak, aby jejich odpovídající hrany byly stejné barvy.*)



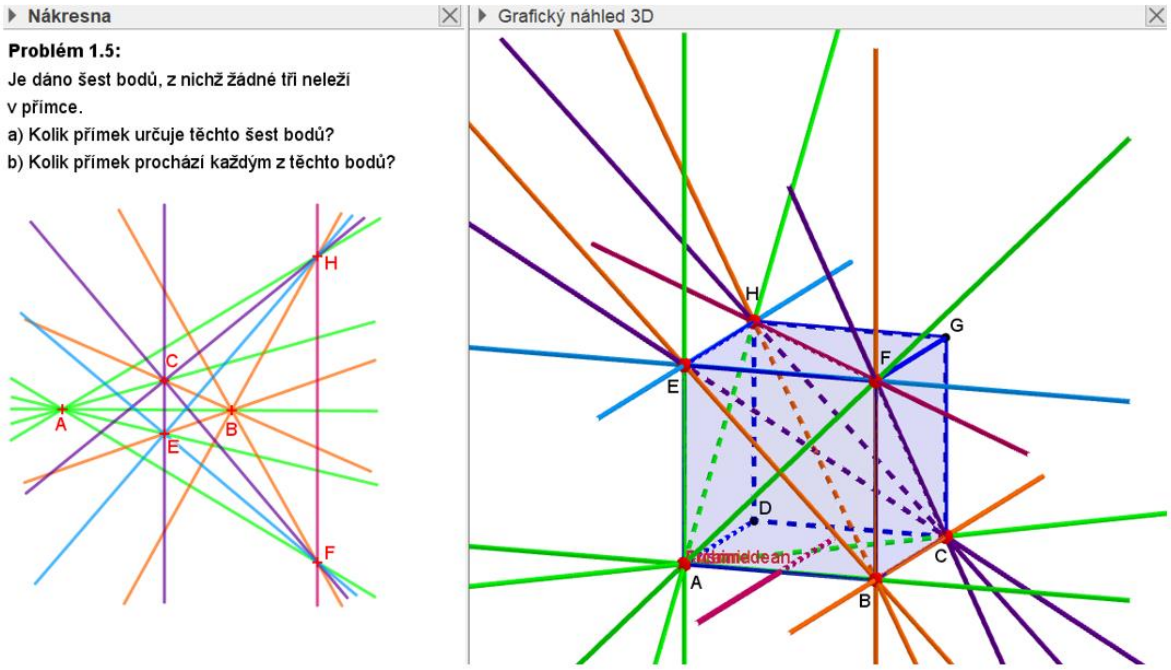
Obrázek 7: Hrany pravidelného čtyřstěnu – ukázka možnosti pohybování se čtyřstěny, učitelská verze, zdroj: autor.

Pro správné vyřešení tohoto problému si musí řešitel uvědomit, jaké zbarvení hran pravidelného čtyřstěnu lze jeho otáčením získat a které nikoliv. Tato skutečnost přímo ovlivňuje počet řešení problému. Pro lepší představu o rotaci pravidelného čtyřstěnu je GeoGebra výborným nástrojem, ať už ve spojení s ukázkou možných řešení ve třídě nebo ve spojení s online výukou.

3.5 Přímky procházející šesti body

Je dáno šest bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce.

a) Kolik přímek určuje těchto šest bodů?
b) Kolik přímek prochází každým z těchto bodů?



Obrázek 8: Přímky procházející šesti body – učitelská verze, zdroj: autor.

Jedná se o neurčitě zadaný problém, jenž nelze řešit bez použití konkretizace, která řešiteli umožní vytvořit si konkrétní představu o zadané situaci. To znamená, že bez pevně stanoveného výběru šesti bodů nejsme schopni tento problém vyřešit. Vyřešení této situace a následné uvědomění si, že počet řešení nezávisí na volbě polohy daných šesti bodů, kromě dané podmínky úlohy, vede k nalezení správného výsledku této úlohy. Tento problém lze řešit buď v rovině, nebo v prostoru. Jedinou nutností je správně zvolit 6 bodů podle dané podmínky. GeoGebra se opět ukazuje jako vhodný nástroj pro modelování a následné řešení tohoto problému.

4 Závěr

V článku jsme popsali několik možností využití internetového rozhraní GeoGebra Book a GeoGebra Classroom jako nástroje pro řešení geometricko-kombinatorických úloh. Software GeoGebra umožňuje efektivní propojení všech zmíněných oblastí: e-learning, online výuka,

kombinatorika a geometrie. Volili jsme záměrně jednodušší úlohy, protože jsme primárně chtěli rozvíjet geometricko-kombinatorické myšlení řešitelů. Obě tato témata, kombinatoriku a geometrii, považujeme za velmi důležitá nejen pro studenty všech typů a stupňů škol, ale především pro studenty učitelství matematiky a učitelství pro 1. stupeň základní školy. Své znalosti a dovednosti z geometrie a kombinatoriky mohou poté dále využívat ve své budoucí (kariéře) profesní praxi. Zároveň se domníváme, že je třeba využít každé příležitosti k propojení zdánlivě diferencovaných matematických disciplín. Propojením matematických oborů přispíváme k informovanosti studentů o matematice jako celku. Vytvořené dynamické GeoGebra applety sdílíme s našimi norskými kolegy z naší projektové partnerské NORD University v Bodø.

Poděkování

Tento článek vznikl jako jeden z výstupů projektu iTEM – Improve Teacher Education in Mathematics (Zlepšování výuky učitelů matematiky), EHP-CZ-ICP-2-018. Projekt iTEM je financovaný z fondů EHP 2014 – 2021 program Vzdělávání. Prostřednictvím Fondů EHP přispívají Island, Lichtenštejnsko a Norsko ke snižování ekonomických a sociálních rozdílů v Evropském hospodářském prostoru (EHP) a k posilování spolupráce s 15 evropskými státy.

Literatura:

[1] Abramovich, S., Pieper, A.: *Fostering recursive thinking in combinatorics through the use of manipulatives and computer technology*, The Mathematics Educator, edited by Front Matter (Athens, 1996). Volume 7, Issue 1, pp. 4-12.

[2] Accascina, G., Rogora, E.: *Using Cabri 3d diagrams for teaching geometry*, International Journal For Technology In Mathematics Education, edited by Colin Foster (Loughborough, 2006), pp. 11–22. URL, http://www.miktex.org. ISSN 1744 2710.

[3] Battista, M. T., Wheatley, G. H. and Talsma, G.: *The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in pre-service elementary teachers*, Journal for Research in Mathematics Education, edited by Patricio Herbst (online, 1982), pp. 332–340. ISSN 0021-8251.

[4] Benson, C. T., Jones, G. A.: *Assessing students' thinking in modelling probability contexts*, The Mathematics Educator, edited by Front Matter (Athens, 1999). Volume 4, Issue 2, pp. 1-21.

[5] Borovcnik, M., Peard, R.: *Probability in International Handbook*, Mathematics Education, edited by Arthur Bakker (Dordrecht, Netherlands, 1996). Part 1, pp. 239-288. ISBN 9789401071550.

[6] Clements, D. H.: *Geometric and spatial thinking in young children*, ERIC document ED436232, edited by *ERIC* (Washington, D.C, 1996).

[7] Čech, E.: *Jak vyučovati geometrii v primě*, Pěstování matematiky a fysiky 70, (Praha, 1940 – 1941), pp. 40 – 58.

[8] Deno, J. A.: *The relationship of previous experiences to spatial visualization ability*, Engineering Design Graphics Journal, edited by Nancy Study (Erie, 1995), Volume 59, Issue 3, pp. 5–17.

[9] Doulík, P., Eisenmann, P., Přibyl, J. and Škoda, J.: *Unconventional Ways of Solving Problems in Mathematics Classes*, The New Educational Review, edited by Stanisław Juszczyk (Gliwice, 2016), Vol. 43, No. 1, pp. 53 – 67. ISSN 1732-6729.

[10] Fennema, E., Tartre, L.: *The use of spatial visualization in mathematics by boys and girls*, Journal for Research in Mathematics Education, edited by Patricio Herbst (online, 1985), Volume 16, Issue 3, pp. 184–206.

[11] Jeřábek, J. a kol.: Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha 2017.

[12] Johnson, T. M., Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W. and Rous, A.: *Students' thinking and writing in the context of probability*, Written Communication, edited by Biddulph, F. & Carr, K. (University of Waikato Printery, Rotorlla, 1998). Volume 15, Issue 2, pp. 203-229.

[13] Kapur, J. N.: *Combinatorial Analysis and School Mathematics*, Educational Studies in Mathematics 3, edited by Arthur Bakker, David Wagner (online, 1970), pp. 111-127.

[14] Moses, B. E.: *The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving*, Dissertation thesis, edited by B. E. Moses (Indiana University, 1997), 38, 8, 4640A. (University Microfilms No. AAG7730309).

[15] Nisbet, S., Jones, G. A., Langrall, C. W. and Thornton, C. A.: *A dicey strategy to get your M & Ms*, Australian Primary Mathematics Classroom, (Australian Association of Mathematics Teachers Inc, Adelaide, 2000). Volume 5, Issue 3, pp 19-22.

[16] Smith, G. G., Gerretson, H., Olkun, S., Yuan, Y., Dogbey, J. and Erdem, A.: *Stills, not full motion, for interactive spatial training: American, Turkish and Taiwanese female pre-service teachers learn spatial visualization*, Computers & Education, edited by S. Bennett (online, 2009), Volume 52, Issue 1, pp. 201–209.

[17] Zimmermann, G. M., Jones, G. A.: *Probability simulation: What meaning does it have for high school students?*, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, (Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, Toronto, 2002). Volume 2, Issue 2, pp 221-236.

Mgr. Jiří Břehovský, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky FP TUL
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 17, Liberec 1
jiri.brehovsky@tul.cz

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky FP TUL
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 17, Liberec 1
daniela.bimova@tul.cz

Mgr. Petra Pirklová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky FP TUL
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 17, Liberec 1
petra.pirklova@tul.cz

DISTANČNÍ VÝUKA MATEMATIKY NA FAKULTĚ STAVEBNÍ ČVUT PRAHA

František Bubeník

Katedra matematiky Fakulty stavební ČVUT Praha

Abstrakt: V příspěvku je popsána problematika distanční výuky matematiky z různých hledisek, jejími výhodami, nevýhodami, specifickými vlastnostmi z hlediska studenta a z hlediska učitele, včetně užití Moodle a Microsoft Teams. Jsou zde diskutovány možnosti technického vybavení pro on-line výuku, jak vybavení studentů, tak vyučujících, možnosti psaní učitele na sdílenou desku jako na školní tabuli a různé metody a náměty, jak je možné zvýšit efektivitu distanční výuky v matematice a matematických předmětech.

Klíčová slova: distanční výuka, výuka matematiky.

Distance Teaching Mathematics at the Faculty of Civil Engineering of the Czech Technical University in Prague

Abstract: The paper describes the issue of distance learning of mathematics from various perspectives, its advantages, disadvantages, specific features from the perspective of students and teachers, including the use of Moodle and Microsoft Teams. The possibilities of technical equipment for online teaching, both the equipment of students and teachers, the possibilities of writing a teacher on a shared board and various methods and ideas on how to increase the effectiveness of distance learning in mathematics are discussed.

Key words: distance teaching, mathematics learning.

Úvod

Matematika patří k základním předmětům na všech stupních škol. Způsob výuky je specifický a je založen na jiné podstatě než způsob výuky v některých dalších předmětech. V matematice převažuje logická podstata předmětu, postupy, procedury apod. nad encyklopedickým učením dílčích slov nebo textu.

Na vysokých školách zejména technických, ekonomických a zemědělských je matematika v úvodu studia principiálně podobná a její výuka je analogická. Předměty matematiky obsahují základní pojmy, jejich význam, užití a manipulace se základními algebraickými operacemi, partie někde také nazývaná jako kalkulus. Taková výuka byla vždy neodmyslitelně spjata s učitelem a studentem v osobním kontaktu.

1 Krátké ohlédnutí do začátku

Pohlédneme-li do historie, z pohledu historického měřítka ještě nedávné, tak prezenční výuka matematiky a matematických předmětů bývala samozřejmostí a neuměli jsme si to představit jinak. Změna přišla krátce po začátku prudkého zhoršení hygienické situace a nastala velmi rychle. Nikdo nebyl na změnu připraven. Samozřejmě výukový proces musel nějak pokračovat a pedagogové i studenti se novým podmínkám učili za pochodu.

Najednou bylo zavedeno něco nového, něco jiného, něco, s čím jsme se dříve nesetkali, byla zavedena výuka „na dálku“. A jako komunikační prostředek byl nastaven softwarový produkt MS Teams a jako další výukový prostředek Moodle. Produkt MS Teams byl jak pro pedagogy, tak pro studenty na začátku neznámý. Teprve postupem času, kdy na vysoké školy přicházeli studenti, kteří končili střední školy také distančně, tak MS Teams používali na střední škole, a tak tento prostředek studenti znali. Aspoň tak, že se s ním setkali. Prostředek Moodle jsme používali částečně při výuce už dříve, většinou na cvičení, takže tento prostředek nebyl tak zcela neznámý, ale k dokonalému ovládání a k využití všech jeho možností bylo daleko.

2 První etapa

Distanční výuka vyžaduje specifický přístup, to je skutečnost, kterou nelze obejít. Klasickou výuku, tj. přednášku s výkladem a k tomu cvičení, realizovat distančně v začátcích v žádném případě nešlo. Důležitá otázka byla otázka materiálně technického vybavení.

Školní počítače byly většinou odpovídající požadavkům a kamerami a mikrofony vybaveny byly. Ale aby to šlo využít oboustranně na výuku, musí být také recipročně vybavení domácích počítačů studentů odpovídající požadavkům. A tady nastal velký problém. Domácí počítače studentů nebyly mnohdy vybaveny odpovídajícím způsobem. A vzhledem k hygienickým pravidlům, nebylo v začátcích ani snadné chybějící vybavení opatřit.

Materiálně technické vybavení na potřebné úrovni bylo nutné, aby měli všichni studenti, nikoliv pouze někteří. Kdyby potřebné vybavení neměl jeden student, nelze takto výuku realizovat, neboť ten jeden student by byl poškozen. V některých případech to bylo řešeno samostatným studiem z příslušné literatury, tištěných skript apod. Potom výuka spočívala v konzultacích na dané otázky. Ale tato forma nebyla efektivní. Byly potřeba grafické výstupy, bylo potřeba, aby vyučující měl možnost psát a studenti viděli, co píše.

Na Katedře matematiky jsme průběžně vyhodnocovali situaci a přijímali příslušná opatření. Pořídili jsme pro všechny vyučující užitečný výukový prostředek, desky na psaní, Wacom Inkspace App, částečně z podpory fakulty, částečně z vlastních prostředků katedry. Jsou to desky, na které je možné psát speciální tužkou, kreslit náčrtky a je možné sdílet desku, takže studenti vidí, co je napsáno. Bohužel ne všichni studenti měli takové vybavení, aby měli možnost sdílet recipročně desku k psaní, a tedy také možnost psát.

3 Druhá etapa

V pozdější době už byly organizovány různé kurzy užívání prostředků MS Teams a Moodle a byly k dispozici různé manuály, takže byly využity jejich širší možnosti. Prostředek MS Teams byl užíván primárně k interaktivnímu audiovizuálnímu spojení a Moodle byl využíván k zadávání samostatných úkolů, evidenci jejich vypracování a hodnocení výsledků.

3.1 Domácí úkoly a samostatné práce

Jsou dvě hlavní možnosti zadávání domácích úkolů a samostatných prací. Buď lze zadávat úlohy tak, že každému studentovi bylo dáno individuální zadání, nebo po skupinách stejné zadání. Cílem těchto samostatných úkolů je buď procvičení probrané látky, nebo prověření získaných znalostí. Hlavním problémem zadávaných úkolů při kontrole znalostí vždy bylo, je a vždy bude ověření autorství.

Pokud jsme zkusili zadávané samostatné práce kontrolovat každému studentovi, bylo patrné, že řešení jsou vypracována sice pečlivě a detailně, ale stalo se, že na dotazy k domácímu úkolu student nedovedl odpovědět anebo odpověděl zmateně a bylo patrné, že úlohu nevypracoval. Jde-li o procvičení probrané látky, je dokonce žádoucí, a to jsme také studentům oznamovali, mají-li možnost někoho, kdo jim s tím pomůže a kdo jim pomůže se látku naučit, je to pro ně přínosné. Ale pokud jde o kontrolu znalostí, chceme, abychom hodnotili, co vytvořil ten student, a nikoliv skupina kamarádů nebo příbuzných.

Žádný jednoduchý, efektivní způsob ověření autorství domácích úkolů k procvičení látky jsme nenašli, a tak jsme zadávali domácí úlohy už rovnou s výsledky a studenti neodevzdávali vypracované úlohy, ale odevzdávali, a to bylo povinné, jen tzv. Hlášení o úspěšnosti. To spočívalo v tom, že u každé úlohy student uvedl buď A, což znamená, že úlohu vyřešil, vyšlo to správně, postup řešení je mu jasný a nemá k tomu dotazy, nebo N, což znamená, že úloha mu nevyšla nebo ji vůbec neřešil. Tato N pak byla podkladem ke konzultacím, na které se student přihlásil.

3.2 Zkoušky z matematiky prezenčně

Vzhledem k problémům s ověřením autorství probíhaly zkoušky ve všech hlavních předmětech matematiky pouze prezenčně. Přitom byla respektována platná nařízená hygienická pravidla, počet osob ve zkušební místnosti, dodržení vzdáleností mezi osobami a další pravidla, včetně individuálního způsobu příchodu studentů do posluchárny, nikoliv ve skupinách a odchodu opět individuálně z posluchárny ven.

Bylo zjištěno, že výsledky zkoušek byly slabší, než když byla prezenční výuka. Není to tak velké překvapení, citelně chyběla systematická práce během semestru. V případě prezenční výuky měli studenti průběžně během semestru povinné PC testy, na základě kterých byly udělovány zápočty a příprava na testy zároveň sloužila jako příprava na finální zkoušku.

Na Katedře matematiky máme vypracován vlastní sofistikovaný systém průběžné kontroly znalostí s podporou počítačů. Toto testování je podrobně popsáno v [1]. Při distančním způsobu studia počítačové testy nemohly být, samozřejmě, realizovány a byly zrušeny.

4 Výhody a nevýhody

Distanční způsob výuky má řadu nevýhod, ale má také pro studenta některé nesporné výhody. Přednášky jsou slovně přednášeny i psány na sdílenou desku a tyto zápisy je možno uložit a student si je může znovu prohlédnout, případně stáhnout. Dále každá přednáška může být celá nahrána a student si ji může později znovu celou poslechnout, popřípadě stáhnout, pokud to považuje za potřebné. Stejně tak je možné pořídit nahrávku cvičení, Takové záznamy přednášek a cvičení se v případě prezenční výuky nepořizují.

Stejně jako v prezenční výuce je možné přednášky a cvičení velmi snadno obohatit o ilustrativní vložené obrázky, grafy, případně videa, což studenti vítají s povděkem.

5 Závěrem

Co vyjádřit na závěr? Nic překvapivě nového. Nepříznivá hygienická situace je fenomén, se kterým se budeme muset naučit nejen žít, ale i pracovat a studovat. Analýzy studijních výsledků z různých aspektů ještě zpracovány nejsou, jsou předmětem dalšího zkoumání. Určitě je vidět, že studijní výsledky studentů i v hygienicky nepříznivé době jsou dobré a jsou lepší, než se možná očekávalo. Je vidět, že kvalitní studenti dosahují dobrých výsledků i za nepříznivých okolností.

Literatura:

[1] Bubeník, F.: *Analýza testování v matematice s podporou počítačů*, Sborník příspěvků 5. konference Užití počítačů ve výuce matematiky, ISBN 978-80-7394-324-0, České Budějovice, str. 25 - 28, 2011.

František Bubeník
Katedra matematiky Fakulty stavební ČVUT Praha
Thákurova 7, PSČ 166 29, Praha 6
e-mail: frantisek.bubenik@cvut.cz

UŽITÍ PROGRAMU GEOGEBRA PŘI ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ V GEOMETRII

Štěpán Buzek

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Abstrakt: V nedávné době byly do programu GeoGebra implementovány nové funkce umožňující lépe pracovat a objevovat s množinami bodů daných vlastností. V tomto článku bych rád některé z těchto funkcí představil a na příkladu demonstroval jejich využití. Konkrétně se bude jednat o funkce *Množina bodů* a *Rovnice množiny bodů.*

Klíčová slova: GeoGebra, Množina bodů daných vlastností, dynamická geometrie

The use of GeoGebra to solving problems in geometry

Abstract: Recently, there was a few additions to GeoGebra, which are supporting work and exploration of sets of points of given attributes. In this article I would like to introduce and demonstrate some of these functions. Specifically, I would like to present functions *Locus* and *LocusEquation*.

Key words: GeoGebra, Set of points of given attributes, dynamic geometry

Úvod

V současné době se můžeme ve světě setkat s rostoucím trendem používání počítačů při výuce matematiky. Jedno z hlavních zastoupení mají programy DGS (Dynamic Geometry Systems), tedy programy, který umožňují práci s dynamickou geometrií. Mezi takové programy patří například GeoGebra.

Využívání těchto systémů ve výuce poskytuje žákům novou cestu při vymýšlení nových postupů v řešení problémů, vymýšlení nových postupů řešení problémů s využitím téměř neomezené výpočetní síly moderních počítačů.

Větší integrace systémů dynamické geometrie ve výuce matematiky samozřejmě vyvolává otázku, zda je tato integrace přínosná. Jediná studie samozřejmě nemůže tuto otázku zodpovědět. Proto vznikla studie *The Efectiveness of Dynamic Geometry Software Applications in Learning Mathematics: A Meta-Analysis Study.* V této studii autoři kombinují větší množství studií zabývající se vlivem zařazení DGS do výuky. Studie naznačují, že za vhodných podmínek (stupeň školy, poměr počítačů a žáků apod.) má integrace DGS do výuky pozitivní vliv na výsledky žáků.

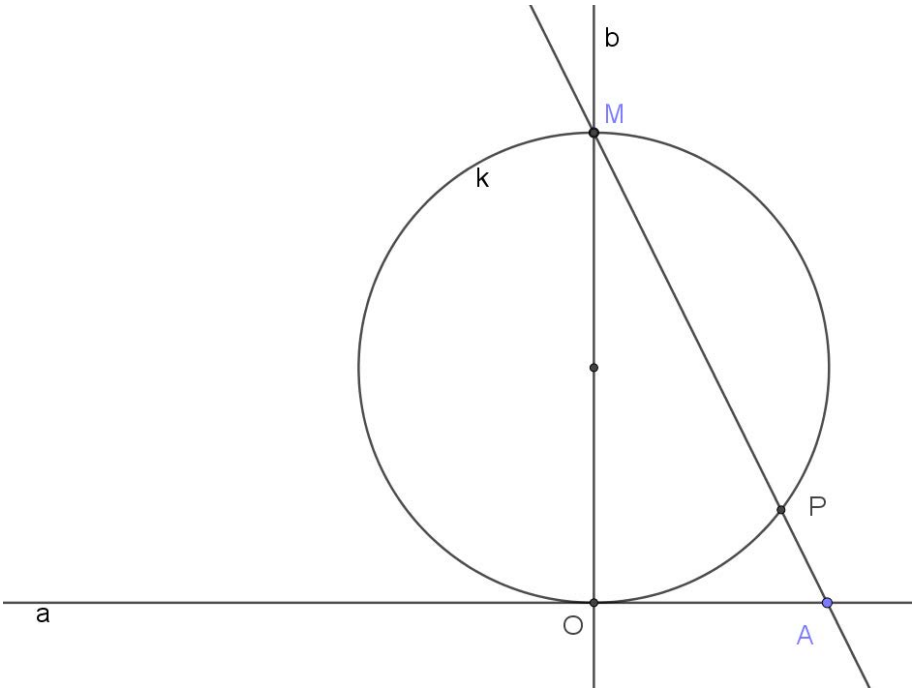
1 Funkce Locus a LocusEquation

V první kapitole článku si na příkladu představíme fungování metod *Locus* a *LocusEquation* na následujícím příkladě.

Výchozí situace: *Mějme dvě vzájemně kolmé přímky a, b, které se protínají v bodě O. Zvolme si body A a M, tak aby bod M ležel na přímce b a bod A na přímce a. Sestrojme kružnici k s poloměrem |MO| protínající přímku AM v bodě P.*

Zadání: *Jaká je množina bodů, kterou opisuje bod P při pohybu bodu M po přímce b?*

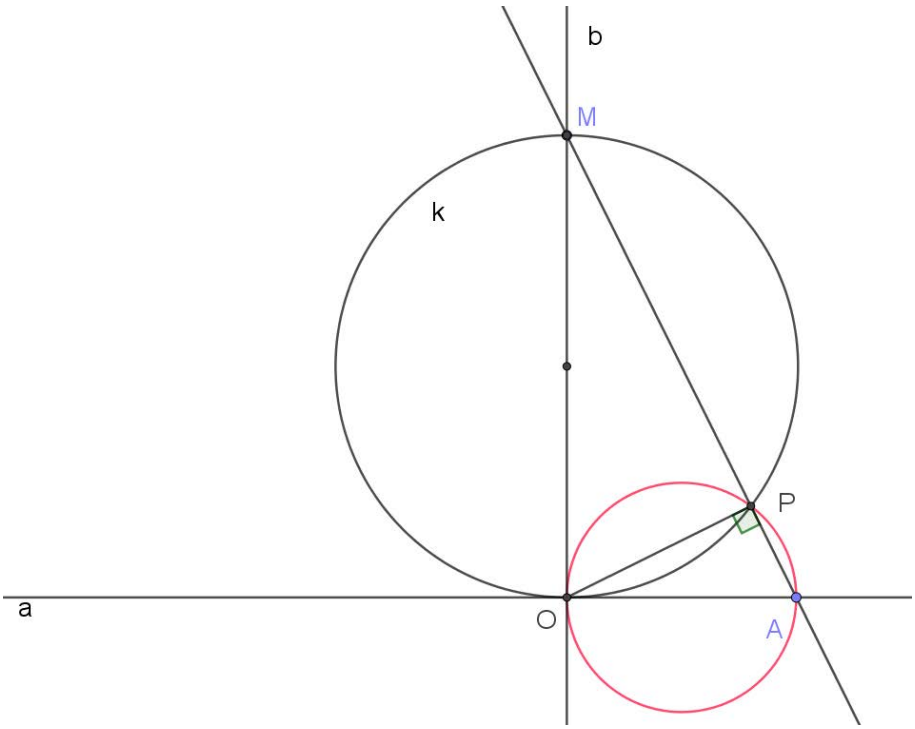
Prvním krok při hledání řešení se nebude lišit od postupu, který bychom aplikovali i kdybychom měli k dispozici pouze rýsovací potřeby a papír. Tedy načrtneme si výchozí situaci.



Obrázek 1: Náčrt výchozí situace

Kdybychom používali pouze papír a tužku, už bychom museli začít hledat řešení pouze na základě jakési matematické intuice.

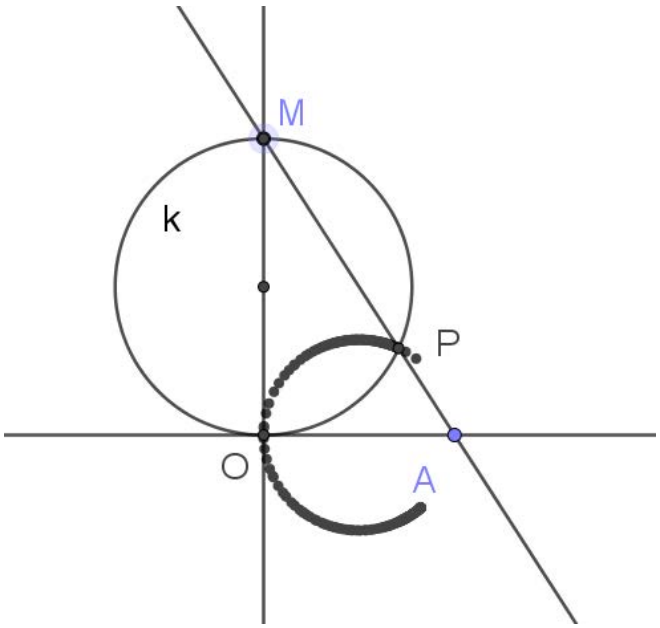
Musíme si povšimnout, že velikost úhlu *MPO* je devadesát stupňů. To můžeme odvodit z Thaletova teorému. Z této znalosti můžeme následně vyvodit velikost úhlu *OPA*, který musí mít tedy velikost také devadesát stupňů. Opačnou aplikací Thaletova teorému můžeme tedy dokázat, že naše hledaná množina je kružnice.



Obrázek 2: Hledaná množina bodů

V tomto řešení jsme museli podstoupit spoustu kroků, které nemusejí být na první pohled vůbec zřejmé. Konkrétněji, nemusí být vůbec zjevné, že klíčem k řešení této úlohy je úhel *OPA*. I když si uvědomíme, že úhel *OPA* je pravý, tak nám ještě pořád zbývá aplikace Thaletova teorému, což samo o sobě také nemusí být vůbec zřejmé.

V GeoGebře existují funkce, které nám toto uvědomění můžou do jisté míry usnadnit. Jednou ze základních funkcí, kterou v programu GeoGebra nalezne je funkce *Stopa bodu*. Tato funkce nám poměrně jednoduše umožní sledovat dráhu bodu, který jakýkoliv bod opisuje. Využití této funkce je snadné, stačí stisknout nad zvoleným bodem pravé tlačítko, následně se nám otevře nabídka základních nastavení. Jedno z tlačítek nese název *Stopa bodu*. Po kliknutí na toto tlačítko bude vybraný pod za sebou zanechávat stopu, čímž nám umožní vysledovat druh množiny bodů po které se pohybuje.



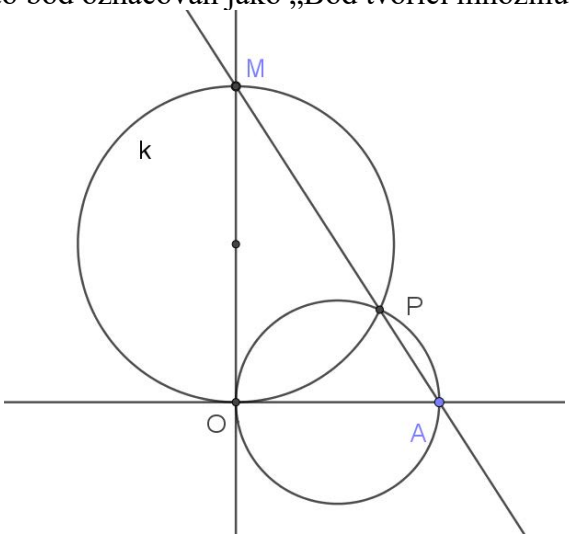
Obrázek 3 Použití funkce *Stopa bodu*

Použití této funkce nám umožnilo větší vhled od situace. Nyní by se mohlo zdát, že se bod *P* pohybuje po kružnici. Takovéto tvrzení by v tuto chvíli bylo ještě poměrně odvážné, ale každopádně se to tak jeví.

K hlubšímu prozkoumání můžeme využít funkci *MnozinaBodu (Locus)*. Jednou možností použití této funkce, která je využita i v tomto řešení, je využití dvou bodů.

První bod, který k tomu potřebujeme se nazývá *mover*, to je bod, který se pohybuje po nějakém objektu. V české lokalizaci je tento bod označován jako „bod na množině“. Objektem, po kterém se tento bod pohybuje může být např. kružnice, hyperbola parabola apod.

Druhý bod se nazývá *tracer,* to je bod, který je nějakým způsobem závislý na *moveru.* V české lokalizaci je tento bod označován jako „Bod tvořící množinu“.

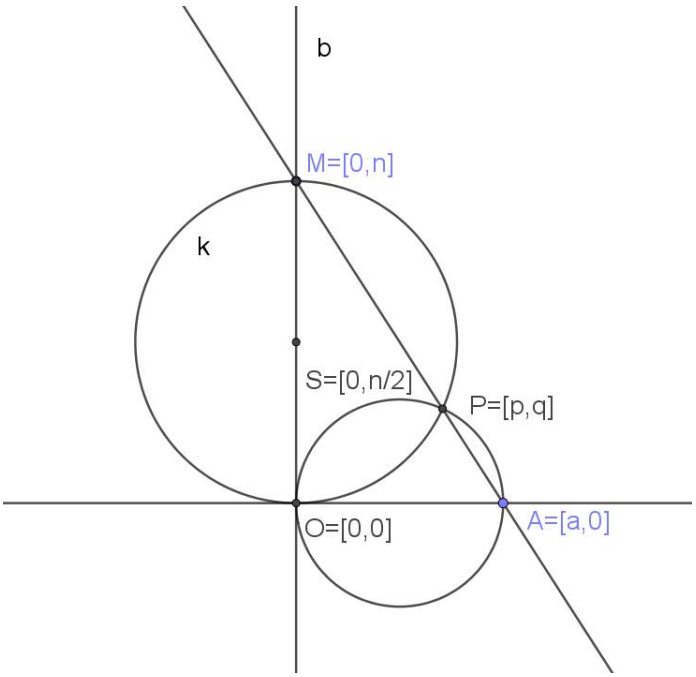


Obrázek 4 Použití funkce *Locus*

Při použití této funkce už můžeme vidět kružnici celou. V této fázi je to však stále pouze visuální pomůcka. V tomto bodě stále nemůžeme prohlásit, že se jedná o kružnici.

Pokud chceme jednoznačně určit, že se jedná o kružnici musíme získat její rovnici. To můžeme pomocí metody *RovniceMnozinyBodu (LocusEquation)*. Při použití této metody nejsou však ošetřeny některé krajní podmínky, daný výsledek tedy může dávat zkreslené výsledky.

Naznačíme si jakým způsobem daná funkce pracuje. Základním princem je popsání jednotlivých důležitých objektů pomocí rovnic. K tomu potřebuje zavést vhodnou soustavu souřadnic.



Obrázek 5 Zavedená souřadnicová soustava

Na základě této souřadné soustavy můžeme popsat důležité vlastnosti pomocí rovnic

$$P \in \mathrm{k} \quad \Leftrightarrow \quad H_1 : p^2 + \left(q - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4} = 0,$$

$$M, \mathrm{P}, \mathrm{A} \text{ kolineární} \quad \Leftrightarrow \quad H_2 : pn + aq - an = 0.$$

Rovnice, které jsme sestavili, nám říkají, že bod *P* leží na kružnici *k*, a že body *M, P, A* jsou kolineární, tedy leží na jedné přímce.

Následnou eliminací proměnných *moveru* získáme rovnici popisující výslednou množinu bodů.

Tuto eliminaci nám umožňuje i GeoGebra pomocí CAS jádra, které je v nynější edici implementováno.

```
Eliminovat({p^2+(q-n/2)^2-(n^2)/4,p*n+a*q-a*n}, {n})
→ {p² − p a + q²}
```

Obrázek 6 Eliminace v programu GeoGebra

Substitucí a úpravou vzorce pomocí doplnění na čtverec dostaneme následující rovnici

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}.$$

Nyní je zřejmé, že se jedná o kružnici se středem v bodě *[a/2, 0]* a poloměrem *a/2*.

Samozřejmě ve výuce na různých stupních školského vzdělávacího systému nebudeme používat všechny kroky, proto uvádím seznam jednotlivých kroků, který může učiteli pomoci určit na co je jeho třída připravena a na co ještě nebude.

1. Náčrt dané geometrické situace v programu DGS (můžeme využít jako prostor pro diskusi o možných řešení)
2. Demonstrace v programu DGS – pomocí funkce *Stopa bodu*
3. Ověření pomocí funkce *Množina bodů* – dostaneme pouze vizuální nápovědu
4. Sestavení nepočítačového důkazu – DGS můžeme využít k nalezení souvislostí mezi objekty
5. Hledání množiny bodů za využití počítače
    a. Zavedeme kartézskou soustavu souřadnic. Chceme si ji zadat, tak aby následné sestavování rovnic bylo co nejjednodušší.
    b. Sestavení algebraických rovnic, které analyticky popisují zadanou geometrickou situaci
    c. Získání rovnice množiny bodů pomocí eliminace vhodných proměnných
6. Srovnáme výsledky, které nám poskytl CAS s výsledky získanými pomocí DGS
7. Vyvodíme závěry na základě získaných informací

2 Závěr

Využívání systémů dynamické geometrie při výuce matematiky má jistě své místo. V metastudii uvedené v úvodu článku je naznačen pozitivní vliv na kvalitu výuky pomocí DGS.

V článku jsem se zabýval jedním typem příkladů, které by se pomocí DGS daly řešit. Jednoduché příklady by se daly využít i na ZŠ. Mám dobrou zkušenost s odvozením osy přímky pomocí DGS. Samozřejmě na ZŠ na druhém stupni nejsou podstatné všechny kroky uvedené v seznamu výše. Na ZŠ jsou vhodné první dva až čtyři kroky s tím, že čtvrtý určitě nezvládnou všechny třídy.

Důležitá bude příprava žáků na práci s DGS. Tento typ příkladů by měl být předkládán žákům, kteří již mají s DGS zkušenosti. Minimálně už ho umějí bezpečně ovládat. Tím je myšleno, že umějí narýsovat v programu danou situaci.

Příklad uvedený v tomto článku se řadí spíše k těm složitějším příkladům, avšak pro ilustraci principu slouží dostatečně.

Literatura:

[1] KOVÁCS, Zoltán, 2018. Using Automated Reasoning Tools in GeoGebra in the Teaching and Learning of Proving in Geometry. *International Journal of Technology in Mathematics Education* [online]. **25**(2), 19 [cit. 2021-08-19]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/326632420

[2] BLAŽEK, Jiří a Pavel PECH, 2017. Searching for loci using GeoGebra. *International Journal for Technology in Mathematics Education* [online]. **23**(2), 5 [cit. 2021-08-04]. Dostupné z: https://go.gale.com/ps/i.do?id=GALE%7CA551963334

[3] PECH, Pavel, 2007. *Selected topics in geometry with classical vs. computer proving*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Ptc. ISBN 978-981-270-942-8.

[4] GÜNZEL, Martin, 2012. *Integrace elektronických prostředí pro počítačem podporovanou výuku matematiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. ISBN 978-80-7394-386-8.

[5] GeoGebra: Manual, 2013. GeoGebra [online]. Saltzburg: IGI [cit. 2021-9-5]. Dostupné z: https://wiki.geogebra.org/en/Category:Manual_(official)

[6] JUANDI, Dadang, Yaya Sukjaya KUSUMAH, Maximus TAMUR, Krisna Satrio PERBOWO, Muhammad Daut SIAGIAN, Rini SULASTRI a Habibi R. P NEGARA. The Effectiveness of Dynamic Geometry Software Applications in Learning Mathematics: A Meta-Analysis Study. International Journal of Interactive Mobile Technologies (iJIM) [online]. 2021, 15(02), 18-37 [cit. 2021-7-21]. ISSN 1865-7923. Dostupné z: doi:10.3991/ijim.v15i02.18853

[7] JUANDI, D a N PRIATNA. Discovery learning model with geogebra assisted for improvement mathematical visual thinking ability. Journal of Physics: Conference Series [online]. 2018, 1013 [cit. 2021-7-21]. ISSN 1742-6588. Dostupné z: doi:10.1088/1742-6596/1013/1/012209

Štěpán Buzek
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
buzeks00@jcu.cz

ŘEŠENÍ ÚLOH VE ČTVERCOVÉ A TROJÚHELNÍKOVÉ MŘÍŽI POHLEDEM GEOGEBRA CLASSROOM

Jana Cachová, Lukáš Vízek

Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové

Abstrakt: Příspěvek přináší pohled na šetření se dvěma odlišnými skupinami respondentů, se studentkami učitelství pro 1. stupeň základní školy a s žáky 5. ročníku základní školy. Oběma skupinám byla předložena stejná sada úloh na geodeskách zaměřená na tvorbu kolmic. Byla zadána a vyhodnocena pomocí aplikace GeoGebra Classroom, která představuje všechna řešení z pohledu jednotlivých úloh a z pohledu jednotlivých respondentů. Ukazujeme na funkcionalitu programu GeoGebra a tudíž na další možnost užití počítačů v matematickém vzdělávání.

Klíčová slova: kolmice, geodesky, čtvercová mříž, trojúhelníková mříž, GeoGebra Classroom

Solving problems in square and triangular lattice from the point of view of GeoGebra Classroom

Abstract: This contribution provides an overlook on the research with two different groups of participants, with pre-service elementary school teachers and with fifth grade students. Both groups solved the same set of problems on geoboards focused on perpendiculars. They were assigned and evaluated in GeoGebra Classroom, which presents all solutions from the perspective of problems as well as respondents. We point out the functionality of the GeoGebra program and, so, other possibility of using computers in mathematics education.

Key words: perpendicular, geoboard, square lattice, triangular lattice, GeoGebra Classroom.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 29 (2021), No. 1

Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2021_Cachova_et_al.pdf

POROVNANIE VÝSLEDKOV ŠTUDENTOV PODĽA KONTEXTU ÚLOHY V TESTE Z VÝROKOVEJ LOGIKY.

Zoltán Fehér, Ladislav Jaruska, Katarína Szarka, Eva Tóthová Tarová

Univerzita J. Selyeho, Komárno

Abstrakt. Dôležitou úlohou matematiky je formovať myslenie študentov tak, aby vedeli aplikovať matematické poznatky aj v iných predmetoch. Logické myslenie je základom v rozvoji argumentačných schopností študentov. V našom článku sme sa zamerali na vyšetrenie úspešnosti študentov v riešení úloh na vybrané elementy výrokovej logiky, ktoré boli formulované v rôznych predmetových kontextoch STEM. Výsledky nášho prieskumu ukazujú značné rozdiely v úspešnosti respondentov v závislosti od predmetovo-špecifického kontextu úloh. Zistili sme, že úlohy s rovnakým logickým prvkom často vykazujú rôzne výsledky, ak sú umiestnené v rôznych kontextoch. Okrem vyhodnotenia testu poukážeme na niektoré nedostatky v riešení úloh.

Kľúčové slová: výroková logika, predmety STEM, empirický výskum

Comparison of students' results according to the context in a test of propositional logic.

Abstract. An important mathematics task is to form students' thinking to apply mathematical knowledge in other subjects. Logical thinking is the basis for developing students' argumentation skills. Our article focused on examining students' success in solving problems on selected elements of propositional logic in different STEM subject contexts. The results of our research show significant differences comparing the success rate of respondents considering the tasks´ subject-specific context. We have found that tasks with the same logical element often show different results when placed in different contexts.

Keywords: propositional logic, STEM subjects, empirical research

Úvod

Vyučovanie predmetov STEM (science, technology, engineering, mathematics) získava väčší význam hlavne z dôvodu zvýšenej potreby kvalifikovaných odborníkov pre modernú digitálno-technologickú spoločnosť. Prírodovedné predmety a matematika preto majú byť výraznejšie podporované v školskej výučbe.

Našou úlohou je hľadať nové efektívne metódy pre vyučovanie predmetov STEM, zvýšiť záujem žiakov študovať tieto predmety, ale pritom treba zistiť aj nedostatky a aktuálne problémy vo výučbe týchto predmetov. Na základe týchto zistení na pedagogických fakultách treba inovovať prípravu budúcich učiteľov, zvýšiť úroveň prírodovedného a matematického myslenia.

V našom projekte VEGA pod názvom „*Analýza prírodovedného a matematického vzdelávania na stredných školách a inovácia obsahu odborových didaktík*“, sme sa zamerali na aktuálne problémy vo vzdelávaní v prírodovedných predmetoch a v matematike. Predovšetkým sme chceli zmapovať hlavné atribúty prírodovedného myslenia a preskúmať spojitosti medzi prírodovedným a matematickým myslením žiakov. Súčasťou tohto výskumu je zistenie úrovne logického myslenia žiakov, znalosť základných prvkov výrokovej logiky.

V tomto článku uvedieme časť výsledkov prieskumu v teste z výrokovej logiky, ktorá bola uskutočnená na Univerzite J. Selyeho. Poukážeme na rozdiely v úspešnosti študentov v riešení úloh v závislosti od predmetovo-špecifického kontextu.

1 Matematika a prírodovedné myslenie

Matematika je abstraktná veda, ktorá získava nové poznatky axiomatickým spôsobom, používa okrem iného induktívne a deduktívne metódy logického myslenia na spoznanie vlastností abstraktných štruktúr. Prírodné vedy získavajú nové vedomosti predovšetkým na základe pozorovania prírodných javov a experimentovaním. Aj z týchto dôvodov matematika nepatrí medzi prírodné vedy, čo je v súčasnosti všeobecne akceptované. Myšlienkové postupy, ktoré ponúka matematika a systematický prístup v riešení problémov umožní aplikovať matematické vedomosti aj v iných vedeckých disciplínach ale aj v problémoch z každodenného života. Matematika ponúka systematický prístup riešiť rôzne problémy a jej aparát je vhodný na modelovanie prírodovedných javov [3].

Prírodovedné myslenie je špecifické z toho dôvodu, že je spojené s vedeckým poznávaním, riešením problémov súvisiacich s prírodnými javmi. Prírodovedné myslenie si vyžaduje využitie získaných vedomostí pri kritických úvahách a riešeniach problémov [1]. Vedecký výskum je v zásade činnosť zameraná na riešenie problémov, preto sa v jej priebehu objavujú aj všeobecné prvky metódy problem solvingu, ktoré Pólya [6] vypracoval na riešenie matematických problémov. Teda existujú myšlienkové postupy a metódy, ktoré vieme všeobecne uplatniť aj v problémoch z matematiky aj z prírodných vied. Aj podľa Ennisa [4] existuje všeobecná schopnosť myslenia, ktorú je možné použiť alebo uplatniť v rôznych kontextoch. Je to schopnosť kritického myslenia, ktorá je založená na logickom uvažovaní. Na druhej strane myslenie je vždy kontextovo-špecifické [5], preto rozvíjanie kritického myslenia v jednom kontexte resp. vo vedeckej disciplíne neznamená úspešné aplikovanie tejto schopnosti myslenia v inom kontexte [7]. Ako uvádzajú Csapó a Molnár [2] na analýzu schopnosti myslenia vždy potrebujeme určitý kontext.

2 Metodika prieskumu

V našom empirickom prieskume sme chceli vyšetriť znalosť vybraných prvkov výrokovej logiky na základe analýzy úspešnosti študentov v riešení úloh a overiť závislosť výsledkov od kontextu úlohy. Na základe teoretických poznatkov môžeme predpokladať, že predmetovo-špecifický kontext úloh má vplyv na výsledky testu.

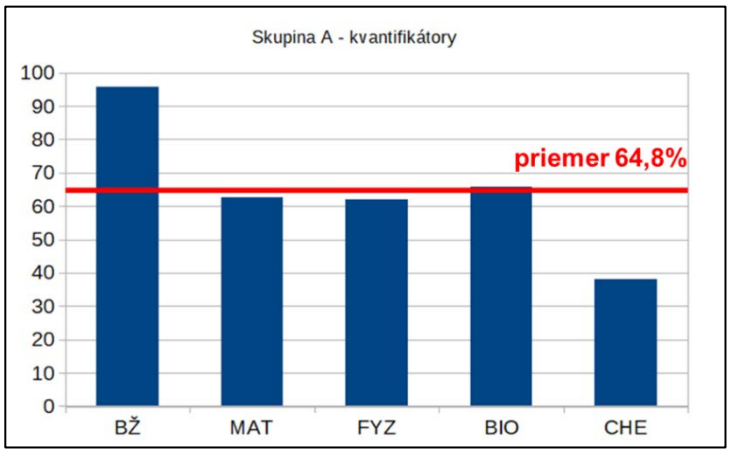
Na vykonanie prieskumu sme vytvorili test, ktorý obsahoval 15 úloh na vybrané prvky výrokovej logiky v kontexte matematiky, fyziky, biológie, chémie a bežného života. Úlohy boli rozdelené do troch skupín, každá skupina obsahovala 5-5 úloh s rôznym kontextom. V skupine A sme sledovali správne pochopenie kvantifikátorov „*aspoň*“, „*najmenej*“, „*najviac*“, v skupine B v každej úlohe študenti mali určiť negáciu daného tvrdenia a skupina C obsahovala úlohy na tvorbu úsudkov na základe daných tvrdení.

Všetky úlohy testu, okrem jednej boli zadané s výberom odpovede zo 4 resp. 5 možností. Maximálny počet bodov v teste bol 15, t.j. 1 bod za každú správnu odpoveď. Prieskum bol realizovaný online v období február – apríl 2021, účasťou študentov Pedagogickej fakulty. Test vyplnilo celkovo 191 študentov rôznych pedagogických študijných programov. Po validácii údajov štatistickú analýzu sme vykonali na vzorke 184 respondentov.

Väčšina respondentov (165, 89,7 %) bol ženského pohlavia a študoval učiteľstvo pre 1. stupeň ZŠ (151, 82,1 %). Vo vekovej skupine od 18 do 25 rokov bolo 136 (73,9 %) študentov, študenti vo veku nad 25 rokov boli väčšinou externí študenti. Pomer respondentov podľa pohlavia a veku korešponduje so zložením študentov na Pedagogickej fakulte. Študenti, ktorí sa zúčastnili testu približne v rovnakom pomere boli absolventi gymnázií (48,6 %) alebo iných stredných škôl (51,4 %).

3 Porovnanie výsledkov testu podľa kontextu

Priemerné bodové hodnotenie študenta v teste bolo 8,20 bodov, štandardná odchýlka 2,45 bodov. To predstavuje 54,7%-nú úspešnosť. Vo vyhodnotení výsledkov sa budeme venovať úspešnosti respondentov v troch skupinách úloh, v ktorých porovnáme úspešnosť podľa predmetovo-špecifického kontextu. V úlohách skupiny A priemerná úspešnosť bola 64,8 %. Na obrázku 1 vidíme porovnanie jednotlivých úloh podľa kontextu.



Obrázok 1. Percentuálna úspešnosť v úlohách skupiny A

Najnižšiu úspešnosť, výrazne pod priemerom, mala úloha z chémie. V prvej ukážke porovnáme túto úlohu s úlohou z matematiky.

Ukážka I:

a) Riešením nerovnosti je množina celých čísel najmenej -2 a najviac 2. Koľko riešení má nerovnosť?

b) Chlór vo svojich zlúčeninách sa najčastejšie vyskytuje v nepárnych oxidačných číslach z intervalu –I až VII. Najviac v koľkých oxidačných stavoch sa môže vyskytovať chlór?

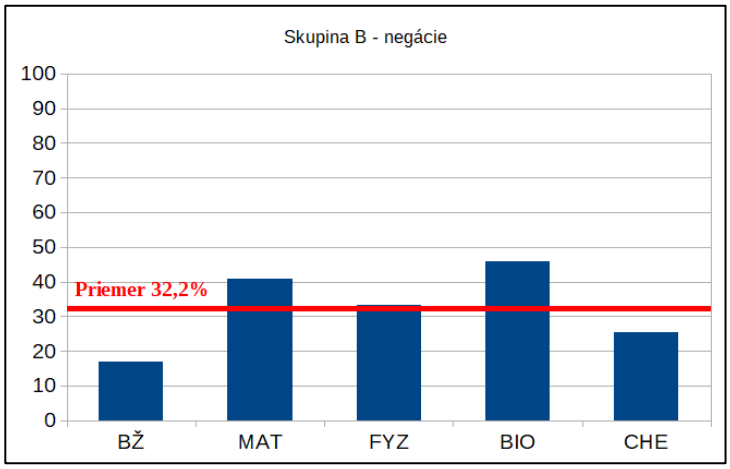
Riešenie obidvoch úloh je množina celých čísel, ktoré spĺňajú podmienku „*najmenej m a najviac n*“. Pritom oxidačné čísla môžu mať len nepárne hodnoty. Úlohu z matematiky riešilo správne 62,5 % študentov, úlohu z chémie 38 %, teda rozdiel v úspešnosti týchto dvoch úloh je výrazný.

V úlohách skupiny B študenti mali určiť negáciu daného tvrdenia. Priemerná úspešnosť bola 32,2 %, a ako vidíme na obrázku 2 úspešnosť každej úlohy bola pod 50%-nou hodnotou. Teda negáciu výrokov správne vedela určiť len menej ako polovica respondentov bez ohľadu na kontext úlohy. V ukážke porovnáme úlohu z matematiky a z fyziky.

Ukážka II. Treba určiť negáciu daného výroku.

a) Pre každý kosoštvorec je súčet vnútorných uhlov 360 stupňov.
b) Vyparovanie z voľného povrchu kvapalín prebieha pri každej teplote.

V úlohe z matematiky 40,8 % odpovedí bolo správne, na úlohu z fyziky odpovedalo správne 33,2 % respondentov. Rozdiel vo výsledkoch môže byť spôsobené kontextom úlohy, keďže z hľadiska logiky v obidvoch úlohách sú tvrdenia formulované v tvare „pre každý prvok *x* platí vlastnosť *A*“. Negáciou je výrok v tvare „existuje prvok *x* pre ktoré neplatí vlastnosť *A*“.



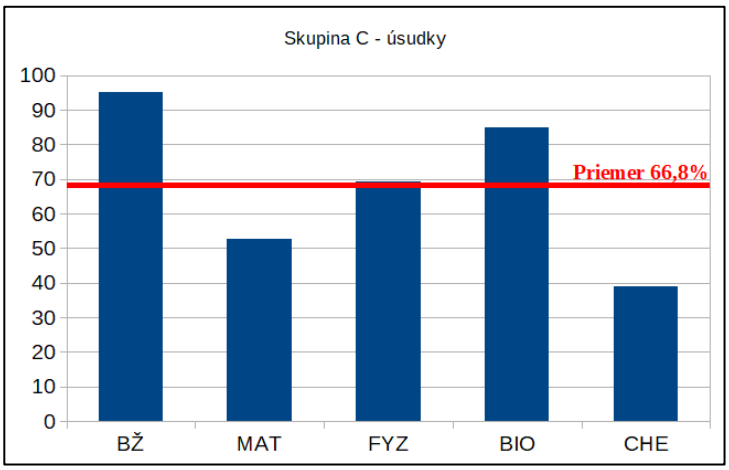
Obrázok 2. Percentuálna úspešnosť v úlohách skupiny B

Tretia skupina obsahovala úlohy na tvorbu úsudkov na základe tvrdení. V skupine C dosiahli respondenti najvyššiu priemernú úspešnosť 66,8 %. Aj v tomto prípade môžeme pozorovať výrazné rozdiely výsledkov podľa kontextu úloh, napríklad aj v nasledujúcich úlohách z fyziky a z biológie.

Ukážka III.

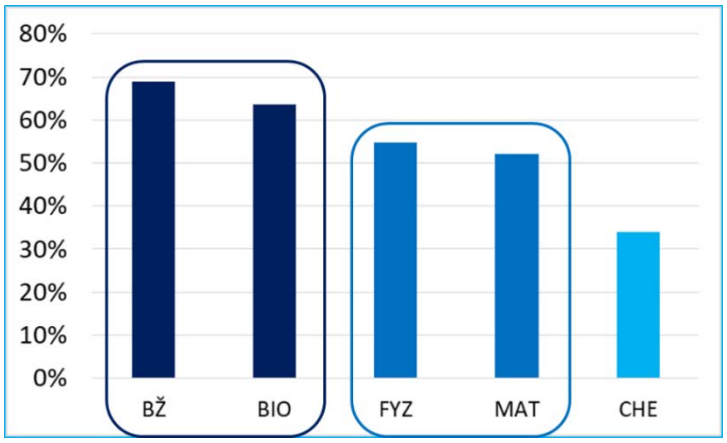
a) Rýchlosť šírenia zvuku závisí od hustoty prostredia, v ktorom sa šíri. Čím vyššia je hustota prostredia, tým rýchlejšie sa v ňom šíri zvuk. Hustota železa je vyššia ako hustota vzduchu, takže ... (dokončite vetu).
b) Čím nižšiu telesnú hmotnosť má vták, tým viac vajec znáša. Orol má veľkú telesnú hmotnosť, preto… (dokončite vetu).

V týchto úlohách porovnávame dve veličiny, hustotu a rýchlosť resp. počet a hmotnosť, z čoho vieme určiť správnu konklúziu. Úspešnosť 69,4 % v úlohe z fyziky a 84,9 % v úlohe z biológie preto môže byť dôsledkom rôzneho kontextu.



Obrázok 3. Percentuálna úspešnosť v úlohách skupiny C

Hlavným cieľom nášho prieskumu bol overiť predpoklad, že predmetovo-špecifický kontext úlohy má vplyv na riešenie úlohy. Na základe vyhodnotenia percentuálnej úspešnosti študentov v jednotlivých kontextoch môžeme potvrdiť tento predpoklad. Výsledky úloh podľa kontextu majú štatisticky signifikantný rozdiel na základe Friedmanovho testu (Q = 153, df = 4, p = 0,000).



Obrázok 4. Percentuálna úspešnosť podľa kontextu úloh

Zároveň sme určili aj poradie predmetov podľa úspešnosti. Respondenti dosiahli najväčšiu úspešnosť v úlohách z bežného života (69,0 %) a z biológie (63,7 %). Úlohy z fyziky (54,7 %) a z matematiky (52,0 %) majú približne rovnakú hodnotu úspešnosti. Respondenti boli najmenej úspešný z chémie (34,0%)

Výsledky testu sme porovnali aj podľa typu ukončenej strednej školy respondenta. Respondenti, ktorí absolvovali gymnázium dosiahli lepšie výsledky (58,2 %) v celom teste v porovnaní so študentmi, ktorí absolvovali iný typ strednej školy (51,1 %). Rozdiel vo výsledkoch dvoch skupín respondentov je štatisticky významný podľa Mann-Whitney testu

(U = 3172,5, p = 0,004). Lepšie výsledky v prospech žiakov gymnázií sme zistili aj v úlohách skupiny A a skupiny C.

Záver

V našom prieskume sme overili závislosť úspešnosti riešenia úloh od predmetovo-špecifického kontextu úloh v teste z výrokovej logiky. Výsledky ukazujú rozdiely v úspešnosti riešenia jednotlivých úloh vzhľadom na ich kontext. Zistili sme, že úlohy jednej skupiny zameraných na daný prvok výrokovej logiky často vykazujú rôzne výsledky, ak sú umiestnené v rôznych predmetových kontextoch STEM ako aj z bežného života.

V poradí predmetov podľa úspešnosti najnižšiu úspešnosť mali úlohy z chémie, vo všetkých troch skupinách úloh tieto úlohy mali podpriemerné výsledky. Jedným z dôvodov nízkej úspešnosti môže byť odlišná štruktúra učebných osnov chémie na našich školách v porovnaní s biológiou a fyzikou ale aj vyskytovanie viacerých chemických pojmov v texte úlohy. Treba poznamenať aj to, že vyučovanie chémie na 2. stupni ZŠ sa začína o rok neskôr ako biológie a fyziky.

Respondenti dosiahli najlepšie výsledky v úlohách z bežného života aj v celkovom poradí aj v dvoch skupinách úloh. Formulácie úloh v kontexte z bežného života sú pre žiakov najviac známe, sú najčastejšie používané v rámci vyučovania matematiky.

Poďakovanie
Príspevok vznikol v rámci projektu VEGA č. 1/0663/19 „*Analýza prírodovedného a matematického vzdelávania na stredných školách a inovácia obsahu odborových didaktík*“.

Literatúra:

[1] Adey, P., Csapó, B.: *Developing and assessing scientific reasoning*. In: B. Csapó a G. Szabó (ed.): Framework for diagnostic assessment of science. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 17–53, 2011.

[2] Csapó, B., Molnár, Gy.: Gondolkodási készségek és képességek fejlődésének mérése. (Meranie rozvoja zručností a schopností myslenia.) Budapest. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2012.

[3] Csapó, B., Szendrei, M.: Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez. (Obsahový rámec pre diagnostické hodnotenie matematiky). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 2011.

[4] Ennis, R. H.: Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research, Educational researcher, vol. 18, no. 3, pp. 4-10, 1989.

[5] McPeck, J. E.: Critical thinking and subject specificity: A reply to Ennis., Educational researcher, vol. 19, no. 4, pp. 10-12, 1990.

[6] Pólya, Gy.: A gondolkodás iskolája (How to solve it). Gondolat Kiadó, Budapest, 1969.

[7] Wiliam. D.: Principled curriculum design. SSAT (The Schools Network) Ltd. 2013.

Zoltán Fehér, Ladislav Jaruska
Katedra matematiky
Fakulta ekonómie a informatiky
Univerzita J. Selyeho
Bratislavská cesta 3322, 945 01 Komárno, SR
feherz@ujs.sk, jaruskal@ujs.sk

Katarína Szarka
Katedra chémie
Pedagogická fakulta
Univerzita J. Selyeho
Bratislavská cesta 3322, 945 01 Komárno, SR
szarkak@ujs.sk

Eva Tóthová Tarová
Katedra biológie
Pedagogická fakulta
Univerzita J. Selyeho
Bratislavská cesta 3322, 945 01 Komárno, SR
tothovatarovae@ujs.sk

ROZŠÍŘENÁ REALITA VE VYBRANÝCH ÚLOHÁCH STEREOMETRIE

Věra Ferdiánová, Martin Plinta, Martina Procházková

Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita

Abstrakt: Rozšířená realita (AR) je fenoménem posledních let, zejména v rámci herního průmyslu, který zareagoval velmi rychle a vyvinul hry, jež jsou dostupné široké hráčské veřejnosti. Tým softwaru GeoGebra vyvinul rozšířenou realitu využitelnou ve výuce matematiky a jedním z prvních propagátorů byl Tim Brzezinski. V příspěvku si představíme vybrané stereometrické úlohy s využitím AR, jenž se jeví "nepřehledné" při řešení ve volném rovnoběžném zobrazení.

Klíčová slova: Rozšířená realita, GeoGebra, stereometrie

The augmented reality in chosen problems of stereometry

Abstract: Augmented Reality (AR) has been a phenomenon in recent years, especially within the gaming industry, which has responded very quickly and developed games that are accessible to the general gaming public. The GeoGebra software team developed augmented reality for use in mathematics education, and one of the early promoters was Tim Brzezinski. In this paper, we will present selected stereometric problems using AR that appear "opaque" when solved in a free-parallel view.

Key words: Augmented reality, GeoGebra, stereometry.

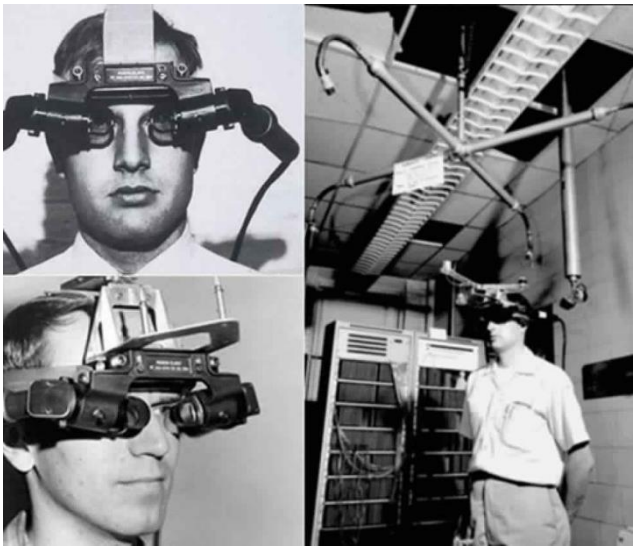
Úvod

Pojem rozšířená realita lze snadno zaměnit s realitou virtuální. Tyto koncepty spolu sice do jisté míry souvisí, není je však možné mezi sebou volně zaměňovat. Mezitím, co technologie virtuální reality předkládá svému uživateli prostředí kompletně generované výpočetními technologiemi, rozšířená realita pouze obohacuje okolní svět v reálném čase.

Přesněji řečeno, slovním spojením rozšířená realita (někdy také augumentovaná realita z anglického augmented reality, zkráceně AR) rozumíme technologii, která nám umožňuje pozorovat reálný svět doplněn o další objekt, či objekty. Ty mohou být různého druhu. Mohou působit na řadu smyslů svého uživatele. Nejčastěji dochází ke stimulaci zraku. Je však možné obohatit také vnímání zvuku, chuti, čichu, či hmatu.

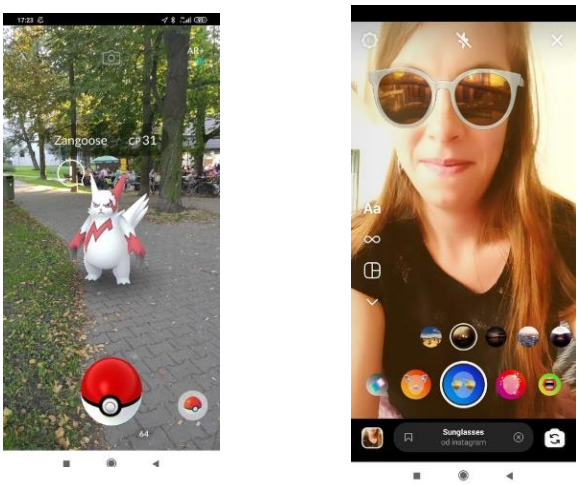
Historie vývoje této technologie je velmi spletitá. Její první kapitoly se začaly psát na konci šedesátých let minulého století. V Americe bylo světu představeno zařízení dnes přezdívané Damoklův meč, které svým uživatelům dokázalo promítnout v reálném prostoru hrany

mnohostěnu (například krychli). Zároveň byl přístroj schopen reagovat na pohyb a dokázal tak zprostředkovat pohled na zobrazovaný objekt z různých úhlů. Další vývoje byl zaměřen na různé tréninkové situace od simulace opravy tiskárny, medicínských postupů apod. [1]



Obrázek 1: Damoklův meč [2]

Náhlavní displeje (head mounted display - HMD) bývají velmi často zaměňovány s pojmem 3D brýlí. Průhledové náhlavní displeje využívají technologie na principu polopropustných zrcadel, na které se promítá obraz z displeje a zároveň uživatel vidí reálný svět. Další technologie byly paralelně vytvořeny s vývojem smartphonů a tabletů. Ty k práci s rozšířenou realitou využívají jednak svůj software, ale především čočku fotoaparátu a gyroskopy. Jejím prostřednictvím pak uživatelé vidí na svých obrazovkách okolní realitu obohacenou o požadovaný objekt.



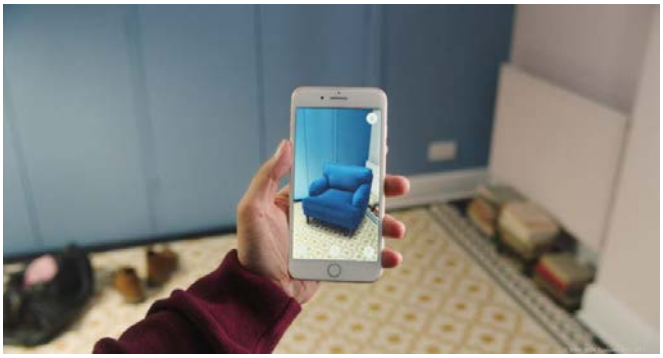
Obrázek 2: Ukázky rozšířené reality v dnešní době prostřednictvím mobilních zařízení

1 Využití rozšířené reality ve výuce

Azuma [1] definuje rozšířenou realitu jako systémy mající následující tři vlastnosti:

- kombinují reálné a virtuální
- jsou interaktivní v reálném čase
- jsou registrované ve 3D

Díky snadné dostupnosti zprostředkujících technologií nabízí dnes rozšířená realita celou řadu uplatnění. Vedle zábavy – tedy herního průmyslu (např. známá hra Pokémon Go), či filtrů fotoaparátů sociálních sítí – našla své uplatnění rozšířená reality u celé řady obchodních řetězců (IKEA, Sephora, Nike, apod.), medicíně, architektuře, či turismu. Krom zmíněného nabízí také velký potenciál v rámci vzdělávání.



Obrázek 3: Ukázka aplikace obchodního řetězce [3]

Použití technologie rozšířené reality v průběhu edukace nabízí celou řadu výhod. Jednak může vést ke zkvalitnění vzdělávacích výstupů, ale také k zefektivnění samotného procesu výuky. Důvodů, proč tuto technologii implementovat do výuky se nabízí hned několik: poskytuje autentické a kontextové učení, podporuje konstruktivistické vzdělávací metody, dává každému žáku možnost dojít k poznání svou vlastní cestou, představuje možnost učit se z chyb bez reálných důsledků.

1.1 Rozšířená realita a geometrie

V současné době se geometrie vyučuje na střední škole i na obou stupních škol základních. Hraje důležitou roli při pochopení statistických, algebraických a aritmetických problémů. Přitom bylo zjištěno, že žáci se při učení potýkají s řadou problémů. Samotné pochopení může být náročné především pro jejich abstraktnost a komplexnost. Z toho důvodu pak nejnáročnější část představuje stereometrie, kdy je nezbytné ovládat alespoň základy prostorové představivosti, bez které žáci nedokážou plně porozumět potřebným souvislostem.

Studium geometrie, respektive řešení geometrických úloh je pro žáky vzhledem k výše zmíněným důvodům často velmi náročné. Aby se pro ně matematika stala zábavnou, je třeba, aby byla daná problematika vysvětlena co nejsrozumitelněji a především nejnázorněji. Jednu z možností, jak tohoto nelehkého cíle dosáhnout představuje rozšířená realita.

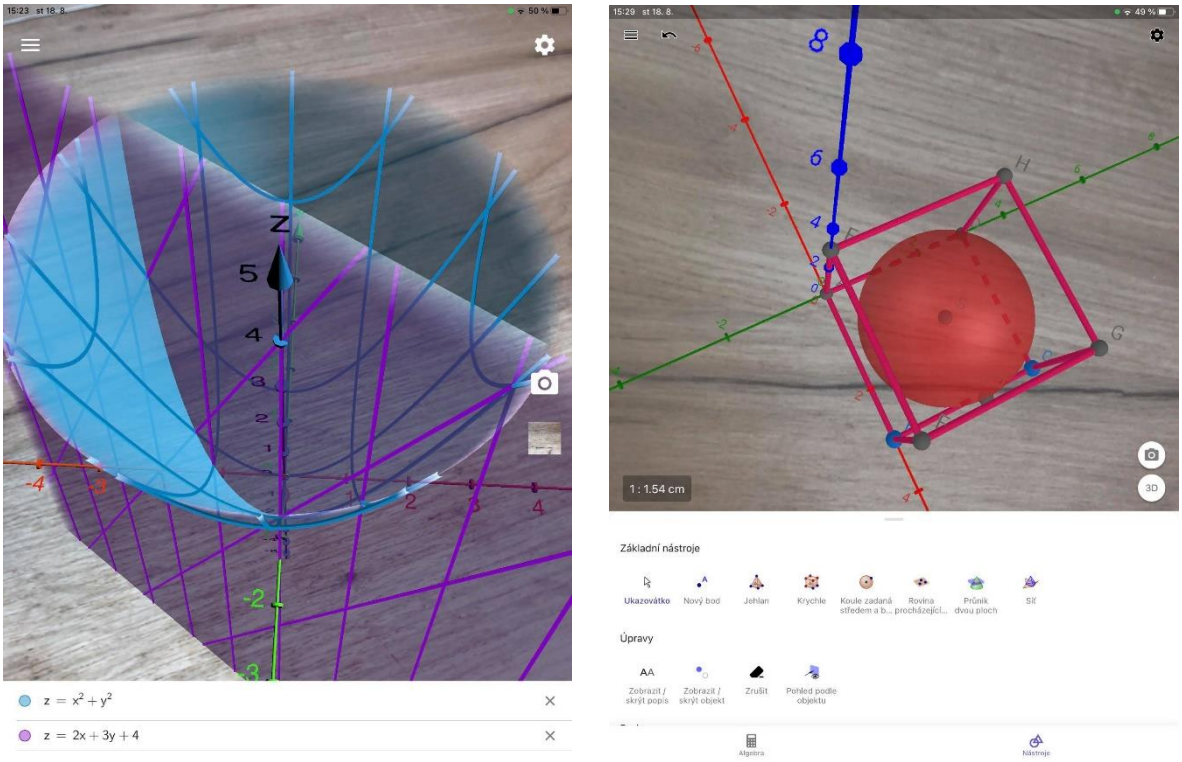
Jednoduchým příkladem využití této moderní technologie může být promítnutí trojrozměrného objektu, namísto prezentace dvourozměrného obrázku, či rysu. Zvýšená dostupnost mobilních telefonů a připojení k internetu tak skýtá možnost, jak každý z žáků může daný objekt sám prozkoumat. Vytváří tak autentické prostředí pro vlastní studium geometrických vlastností.

1.2 Rozšířená realita v prostředí aplikací GeoGebra

Programů, které nabízí využití technologie rozšířené reality uzpůsobených pro potřeby výuky geometrie je hned několik. Lze je nalézt v databázi aplikací jednotlivých marketů (Google Play pro Android, Apple store pro iOS) a mnoho z nich je dokonce zdarma. Nejpestřejší škálu možností v rámci volně dostupných programů nabízí například vývojářský tým aplikací GeoGebra.

GeoGebra implementovala rozšířenou realitu do dvou svých aplikací: GeoGebra AR a GeoGebra 3D. V počátcích byl vývoj zaměřen zejména pro iOS, jelikož většina zařízení od firmy Apple měla požadované technické parametry a přizpůsobené prostředí.

GeoGebra AR umožňuje svým uživatelům zobrazit do rozšířené reality celou řadu ploch. Jednu z možností užití představuje výběr z nachystané nabídky (např. točité schodiště, Kleinova lahev apod.) a vedle toho nabízí také objektů, které je možné do aplikace zadat pomocí předpisu rovnice (Obr. 4). Další z výhod také je, že pokud máte vytvořeny materiály vhodné pro 3D prostředí, můžete je pomocí GeoGebra serveru nahrát do zařízení a znova využít (Obr. 4).



Obrázek 4: GeoGebra a rozšířená realita

Velkou podporu pro práci (nejen) s aplikací GeoGebra AR lze nalézt e-knize, sepsané Timothym Brezinskym. Jeho na internetu volně dostupná kniha Augmented Reality: Ideas for Student Explorations (Rozšířená realita: Nápady pro studentské zkoumání) nabízí mnoho inspirace a podrobných návodů, jak s programem pracovat

Druhá ze zmíněných aplikací, tedy GeoGebra 3D, představuje obdobu známé aplikace GeoGebra pro rýsování v prostoru s následnou možností promítnutí takto zkonstruovaného objektu do rozšířené reality – tedy například na zem, či školní lavici.

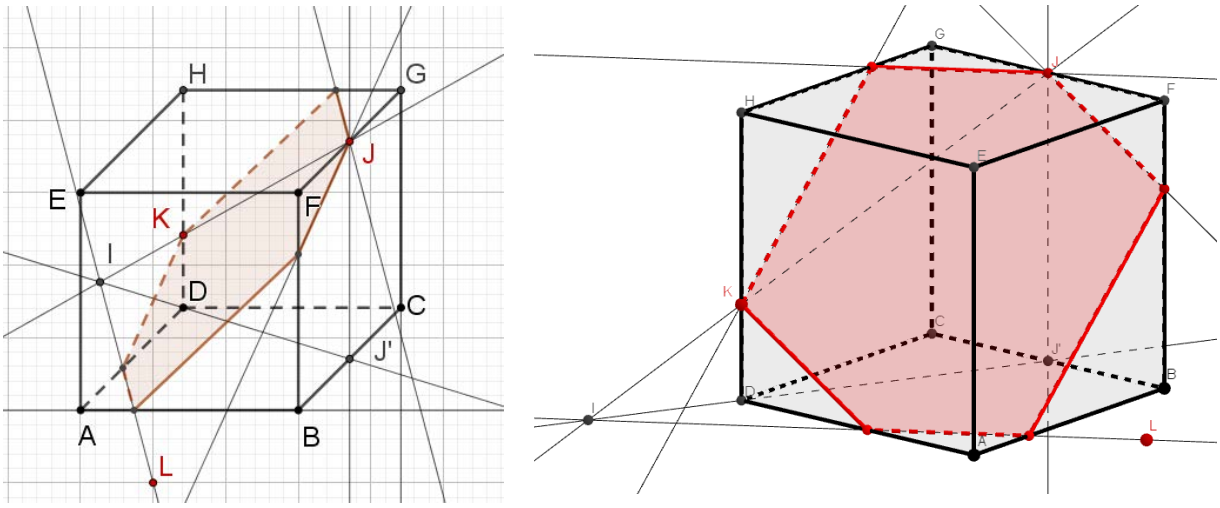
2 Stereometrické problémy

Zobrazení různých těles v rámci výuky stereometrie je vizualizováno za pomocí volného rovnoběžného promítání. U volného rovnoběžného promítání uživatel může zvolit poloměr zkosení φ a koeficient zkrácení q. Ve standardní výuce využíváme úhel zkosení 45° a zkrácení na ½. Tím, že ztrácíme informaci z třetího prostoru mohou nastat následující situace:

- jednotlivé hrany tělesa se překrývají,
- bod leží na jiné hraně tělesa, než je viditelný,
- spojnice hledaného řezu se překrývá s hranou,
- bod řezu leží na „pseudoprůsečíku“ mimoběžných hran tělesa,
- nevhodné intuitivní označení rovin, jenž mají společnou průsečnici.

Příklad 1. Mějme krychli ABCDEFGH s délkou strany 6 cm. Jsou dány body řezu KJL, kde bod K leží na hraně DH tak, že $|DK| = \frac{1}{3}|DH|$. Bod J půlí hranu FG a bod L leží před hranou AB v rovině podstavy.

Příklad sám o sobě je komplikovaný na středoškolské úrovni, jelikož student nemůže použít jeden ze základních stereometrických důsledků na konstrukci řezu. V principu se využije pomocná rovina řezu, kterou zkonstruujeme promítnutí bodu K a bodu J do podstavy krychle.



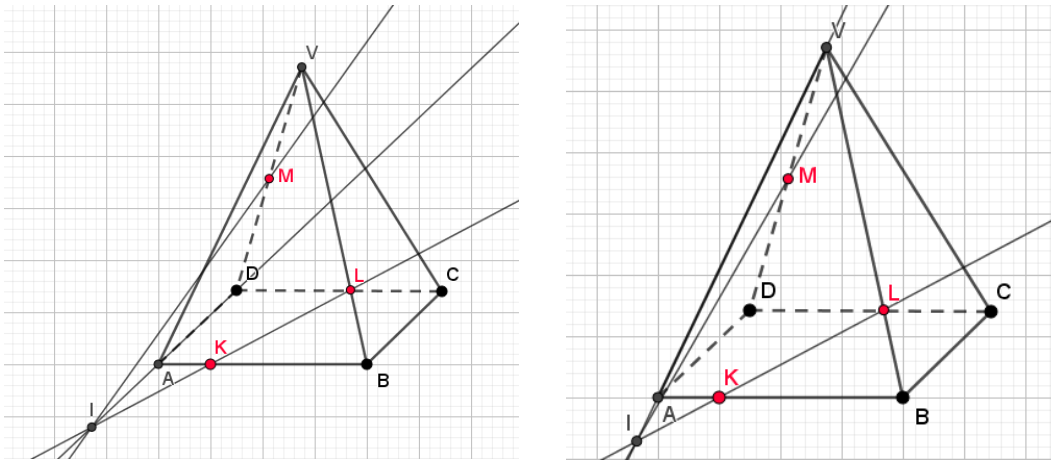
Obrázek 5: Ukázky řešení Příkladu 1 v GeoGebře

Průnikem přímek KJ a DJ´se získá pomocný bod I, jenž leží v rovině podstavy krychle, a proto i přímka IL se nachází v rovině podstavy. Následně už konstrukce řezu není technicky náročná.

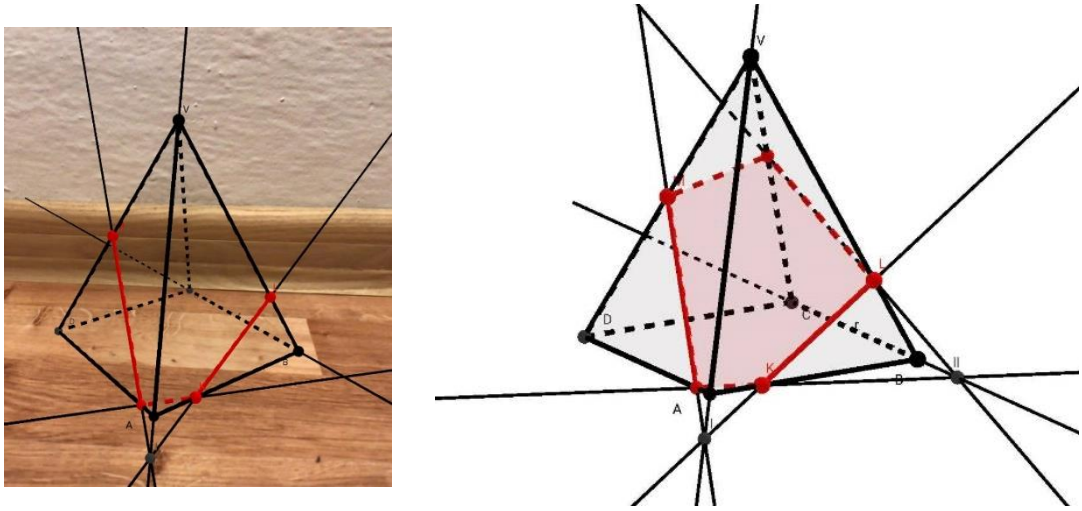
Problém nejčastěji nastává u bodu L, jelikož někteří studenti se mylně domnívají, že leží v čelní rovině stěny ABEF. Minoritní skupina studentů spojí rovnou body KJL a tam, kde protnou hrany krychle označí body řezu. Při využití trojrozměrného reálného i digitálního modelu v AR byla většina problémů z pochopení pozice bodu L odstraněna. Studenti taktéž ocenili kontrolu pomocí funkce rovina, jenž využili v rámci autokorekce.

Příklad 2. Mějme čtyřboký jehlan ABCDV s podstavou čtverce o délce strany 4 cm a výšce 5 cm. Jsou dány body roviny řezu KLM. Bod K leží na hraně AB tak, že $|AK| = \frac{1}{4}|AB|$. Bod L leží na hraně BV tak, že $|BL| = \frac{1}{4}\ |BV|$ a bod M je střed hrany DV.

Druhou velkou skupinou řezů v rámci středoškolské výuky tvoří řezy na jehlanu s podstavou čtverce. U těchto úloh si studenti uvědomují, že je potřeba aplikovat své znalosti získané na krychli a využít je při konstrukci řezu na jehlanu. Poměrová část studentů si při první konstrukci uvědomí, že stěny jehlanu nejsou rovnoběžné. Pomocí dobrých otázek je vhodné k tomuto zjištění dojít a vyvodit daný důsledek. Ostatním studentům je důležité explicitně připomenout, že stěny jehlanu nejsou rovnoběžné, proto nemohou využít rovnoběžnosti strany řezu. U konstrukce řezu jehlanu se studenti mohou setkat s problematikou, že část řezu se překrývá s jednou z hran jehlanu nebo nevhodně zvolí průsečnici dvou rovin na základě mylné interpretace pozice bodu řezu. Mylná interpretace může nastat při určení pozice bodu L, jelikož se podle některých studentů nachází na „pseudoprůsečíku“ mimoběžek BV a CD, taktéž může být bod L interpretován, že se nachází v podstavě jehlanu (Obr. 6). Tyto mylné prvotní kroky, vedou ke kompletní nesprávné konstrukci řezu. V rámci volného rovnoběžného promítání můžeme lehce zkorigovat bod L, jelikož při zvolení úhlu $\varphi = 60°$ nedochází k tvorbě „pseudoprůsečíku“. V rámci distanční výuky je proto vhodné začlenit taktéž možnost využití GeoGebry 3D, jenž napomáhá k prohloubení prostorové představivosti.



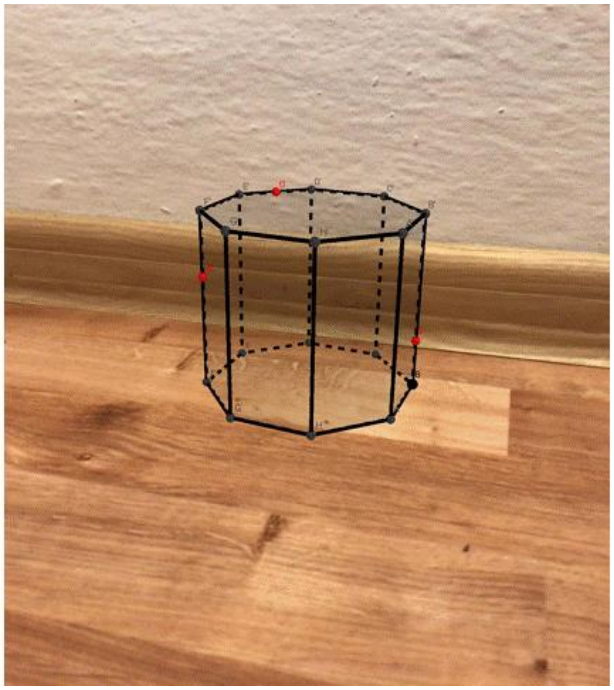
Obrázek 6: Nejčastěji zvoleny průsečnice na začátku řešení Příkladu 2



Obrázek 7: Ilustrace konstrukce v prostředí AR a výsledné řešení v GeoGebře 3D

Příklad 3. Mějme pravidelný osmiboký hranol s délkou strany podstavy 5 cm a s výškou 11 cm. Jsou zadány body roviny řezu OPN tak, že bod P leží na hraně BB' 3 cm od bodu B. Bod N leží na hraně FF' 4 cm od bodu F' a bod O půlí hranu E'D'.

Další z příkladu je spíše určen do semináře na gymnáziu nebo na střední stavební školu, kde si student může ověřit a upevnit své získané znalosti a dovednosti ze stereometrie. Nejčastější komplikací u studentů bude orientace mezi přímkami a nalezení vhodných průsečnic rovin.



Obrázek 8: Řešení konstrukce Příkladu 3 v prostředí AR

Závěr

Rozšířená realita je v dnešní době součástí našich životů a běžný uživatel se již s ní může setkat i v každodenních činnostech. Z pohledu výuky je vhodné využít možností, které nabízí a rozšířit, tak prostorovou a geometrickou představivost u studentů. Vhodnost těchto prostředků přišla zejména v době povinné online výuky, jelikož se museli najít různé nové vhodné prostředky, jež mohou studenti využívat doma. Student, pokud disponuje mobilním zařízením vhodným pro rozšířenou realitu, si při konstrukci může pomoci zobrazením problému ve stylu drátěného tělesa. V příspěvku proto byly představeny příklady, jež jsou komplikované z pohledu geometrické a prostorové představivosti. I když nám nové technologie velmi napomáhají, zejména v distanční výuce, do klasických hodin geometrie je stále vhodné kombinovat výklad s reálných objektem (drátěným tělesem nebo jiným typem modelu), jelikož studenti stále potřebují ovládat dovednosti rýsování. Pomocí klasických konstrukčních dovedností u studentů dochází k propojení jednotlivých znalostí ze stereometrie.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za podpory SGS01/PřF/2020-2021 – Podpora vědecké činnosti studentů v dílčích oblastech matematiky.

Literatura:

[1] Azuma, R.T.: A Survey of Augmented Reality, *Presence: Teleoperators and Virtual Environments* 6 (4), 1997, str. 355 -385.

[2] VR Education. Dostupné https://vreducation.cz/wp-content/uploads/2019/12/The-Sword-of-Damocles.jpg (citováno 5. 11. 2021)

[3] CzechCrunch. Dostupné https://cc.cz/wp-content/uploads/2017/09/ikea-place-820x436.jpg (citováno 5. 11. 2021)

Věra Ferdiánová
Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
30. dubna 22, Ostrava
Vera.Ferdianova@osu.cz

Martin Plinta
Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
30. dubna 22, Ostrava
P21143@student.osu.cz

Martina Procházková
Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
30. dubna 22, Ostrava
P20026@student.osu.cz

SIMULACE HODU KOSTKOU V PROGRAMU GEOGEBRA

Jan Fiala, Andreas Lindner

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Johannes Keppler Universität Linz

Abstrakt: Applety jsou vhodným dynamickým didaktickým prostředkem ve výuce matematiky na školách. Příspěvek představuje některé nástroje a příkazy programu GeoGebra, které lze využít ke generování náhodných čísel, a obsahuje podrobné návody na vytvoření jednoduchých appletů pro simulaci náhodného pokusu hodu hrací kostkou, které si mohou učitelé i žáci sami vytvořit a zařadit do výuky pravděpodobnosti.

Klíčová slova: matematika, didaktika matematiky, pravděpodobnost, simulace, hrací kostka, GeoGebra.

Dice roll simulation in GeoGebra

Abstract: Applets are a suitable dynamic didactic tool in the teaching of mathematics in schools. The paper introduces some GeoGebra tools and commands that can be used to generate random numbers, and provides step-by-step instructions for creating three simple applets to simulate a random dice roll attempt that teachers and students can create and incorporate into probability teaching.

Key words: Mathematics, Didactic of Mathematics, Probability, Simulation, Dice, GeoGebra.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 29 (2021), No. 1.
Dostupné z: `http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2021_Fiala_et_al.pdf`

ÚSPEŠNOSŤ ŠTUDENTOV STREDNÝCH ŠKÔL NA SLOVENSKU I V MAĎARSKU V RIEŠENÍ ÚLOH Z INFORMATIKY TESTU STEM – VÝSLEDKY PILOTNÉHO PRIESKUMU

Štefan Gubo, Ladislav Végh, György Juhász

Univerzita J. Selyeho, Fakulta ekonómie a informatiky, Katedra informatiky

Abstrakt: Na Univerzite J. Selyeho jeden prebiehajúci projekt VEGA má za cieľ zmapovať hlavné atribúty prírodovedného a matematického myslenia študentov 1. a 2. ročníka stredných škôl na Slovensku i v Maďarsku. Pre tento účel boli vypracované a adaptované online dostupné dotazníky a didaktické testy. V príspevku predstavujeme čiastočné výsledky pilotného prieskumu, ktorý bol realizovaný na vzorke 129 študentov. Budeme sa zameriavať na vyhodnotenie odpovedí na 4 úloh z informatiky testu STEM.

Kľúčová slova: STEM, informatika, algoritmické myslenie, pilotný prieskum

Success of secondary school students in Slovakia and Hungary in solving computer science tasks of STEM test – results of a pilot study

Abstract: At J. Selye University, one ongoing VEGA project aims to map the main attributes of natural-scientific and mathematical thinking of 1st and 2nd year secondary school students in Slovakia and Hungary. For this purpose, online questionnaires and didactic tests were developed and adapted. In this paper, we present partial results of a pilot survey, which was conducted on a sample of 129 students. We will focus on the evaluation of answers to 4 computer science tasks of STEM test.

Key words: STEM, informatics, algorithmic thinking, pilot study.

Úvod

Z rôznych medzinárodných štúdií (PISA, TIMSS) vyplýva, že v hospodársky vyspelých krajinách záujem o predmety STEM (veda, technológia, inžinierstvo a matematika) u študentov stredných škôl klesá – napriek tomu, že na pracovnom trhu je nedostatok profesionálov s kompetenciami STEM [1] [2]. Práve preto je veľmi dôležité zmapovať hlavné atribúty prírodovedného a matematického myslenia študentov stredných škôl. V tomto príspevku najprv uvádzame hlavné ciele jedného projektu VEGA a potom predstavujeme čiastočné výsledky pilotného prieskumu, ktorý bol realizovaný na vzorke 129 študentov. Pri vyhodnocovaní sa budeme zameriavať na vyhodnotenie študentských odpovedí na 4 úloh z informatiky.

1 Stručný popis projektu VEGA

Na Univerzite J. Selyeho (Komárno, Slovenská republika) prebiehajúci projekt VEGA s názvom „*Analýza prírodovedného a matematického vzdelávania na stredných školách a inovácia obsahu odborových didaktík*“ má za cieľ formou reprezentatívneho prieskumu zmapovať hlavné atribúty prírodovedného, matematického a algoritmického myslenia študentov 1. a 2. ročníka stredných škôl na Slovensku i v Maďarsku. Do projektu sú zapojené tri fakulty: Pedagogická fakulta UJS, Fakulta ekonómie a informatiky UJS a Fakulta stredoeurópskych štúdií UKF v Nitre.
Hlavné ciele projektu sú sformulované nasledovne:

- preskúmať spojitosti medzi prírodovedným, matematickým a algoritmickým myslením a postojmi študentov, ďalej medzi sociálno-ekonomickými podmienkami a učebným štýlom študentov,
- stanoviť faktory ovplyvňujúce vzťah študenta k prírodovedným predmetom a matematike,
- zmapovať stratégie používané v procese vyučovania prírodovedných predmetov a matematiky,
- zmapovať názory pedagógov súvisiace s ťažkosťami pri osvojovaní si učiva v rámci uvedených predmetov,
- zistiť, ako ovplyvňuje používanie prostriedkov IKT a digitálnej mobilnej technológie vzťah študentov k uvedeným predmetom,
- sformulovať metodické odporúčania k inovácii daných predmetov.

Na zistenie vzťahov medzi prírodovedným a matematickým myslením, prírodovednej atitúdy študentov a ich vzťahu k prírodovedným predmetom a matematike boli vypracované a adaptované online dostupné dotazníky a didaktické testy. Najrozsiahlejší merací nástroj prieskumu (test STEM) obsahuje 20 úloh z predmetov biológia, chémia, fyzika, matematika a informatika. V online systéme si študenti najprv musia zvoliť jazyk (slovenský alebo maďarský) a potom sa môžu prihlásiť pomocou unikátneho identifikačného kódu a zadaním hesla. Po prihlásení sa objaví stránka so zoznamom výskumných nástrojov: podkladový dotazník, test STEM, test logického myslenia (12 úloh, Ravenove progresívne matice), test induktívneho myslenia a Kolbov dotazník učebného štýlu.

2 Vyhodnotenie úloh pilotného prieskumu z informatiky

Test STEM sme vyskúšali v rámci pilotného prieskumu na vzorke 129 študentov z dvoch gymnázií na Slovensku (jedno s vyučovacím jazykom slovenským a jedno s vyučovacím jazykom maďarským) a z jedného gymnázia v Maďarsku. Vzhľadom na nepriaznivú epidemiologickú situáciu, sme nemali možnosť byť prítomný pri zbere dát, a preto študenti výskumné nástroje vyplnili samostatne v domácom prostredí.

V teste každá úloha mala nasledovnú štruktúru: *otázka*, *popis* a *možné odpovede*.

1. úloha (*výmena zvierat*):
Najmenej koľko susedných výmen je potrebných v prípade, že chceme zmeniť poradie štyroch zvierat na opačné?

Popis: Tri zvieratá stoja v rade, zoradené od najvyššieho po najnižšie. Môžeme vymeniť vždy iba dve susedné zvieratá (napr. na začiatku môžeme vymeniť žirafu so slonom, ale nemôžeme vymeniť žirafu s levom, keďže nie sú priamo vedľa seba). K tomu, aby poradie zvierat bolo opačné, potrebujeme najmenej 3 susedné výmeny.
Možné odpovede: a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8
Správna odpoveď: c)

	a)	b)	c)	d)	e)
výmena zvierat (N=129)	27 %	9 %	**56 %**	6 %	2 %

Tabuľka 1: percentuálne rozdelenie správnych (zelená) a nesprávnych (červená) odpovedí na 1. úlohu; zdroj: vlastné spracovanie

Tabuľka 1. obsahuje percentuálne rozdelenie správnych (zelená) a nesprávnych (červená) odpovedí na túto úlohu. Viac ako polovica študentov úlohu úspešne vyriešila. O niečo viac ako štvrtina študentov označila ako správnu odpoveď možnosť **a)** pravdepodobne na základe toho, že počet potrebných susedných výmen je daný počtom zvierat v rade. Títo študenti pravdepodobne nepochopili, že prečo sú potrebné práve 3 susedné výmeny na zmenu poradia týchto zvierat.

2. úloha (*vojaci*):
Minimálne koľkokrát musí čln prejsť rieku tak, aby sa každý vojak dostal na druhú stranu a aby sa chlapci spolu s člnom nachádzali na počiatočnom brehu rieky?

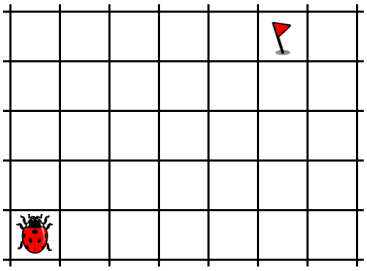
Popis: Rota 10 vojakov dôjde k rieke, ktorú musia prejsť. Rieka je hlboká a v blízkosti sa nenachádza žiadny most. Na brehu rieky sú dvaja chlapci s člnom. Čln je však taký malý, že sa doň zmestí iba jeden vojak alebo dvaja chlapci (každá osoba vie riadiť čln a každý z chlapcov môže prejsť aj sám).
Možné odpovede: a) 10 b) 30 c) 40 d) 60 e) 70
Správna odpoveď: c)

	a)	b)	c)	d)	e)
vojaci (N=129)	16 %	33 %	**43 %**	7 %	1 %

Tabuľka 2: percentuálne rozdelenie správnych (zelená) a nesprávnych (červená) odpovedí na 2. úlohu; zdroj: vlastné spracovanie

Táto úloha už bola náročnejšia, dokázala ju úspešne vyriešiť menej ako polovica študentov (viď tabuľka 2). To naznačuje, že žiaci na konci základnej školy ešte nemajú dostatočné skúsenosti s algoritmizáciou. Tretina študentov označila možnú odpoveď **b)**, pravdepodobne nesprávne určili počet krokov potrebných na najrýchlejší presun vojaka, nerátajúc, že na privedenie člna späť na východiskový breh bude potrebný ďalší prechod. Celkom pozoruhodný je pomerne vysoký počet študentov, ktorí označili odpoveď ako možnosť **a)**, pričom si neuvedomili, že po presune vojaka sa musí vrátiť aj čln, takže 10 prechodov na presun všetkých vojakov zjavne nebude stačiť. Možné odpovede **d)** a **e)** považovala za správnu iba malá časť študentov.

3. úloha (*robot lienka*):
Pomocou ktorej postupnosti príkazov sa dostane lienka k červenou zástavou označenému cieľu na obrázku vpravo?



Popis: Robot lienka pozná tri základné príkazy: pomocou ide jeden krok dopredu, pomocou sa otočí o 90 stupňov doprava, a pomocou sa otočí o 90 stupňov doľava. Postupnosť týchto príkazov vie lienka aj viackrát opakovať.

Možné odpovede:

a)

b)

c)

d)

e)

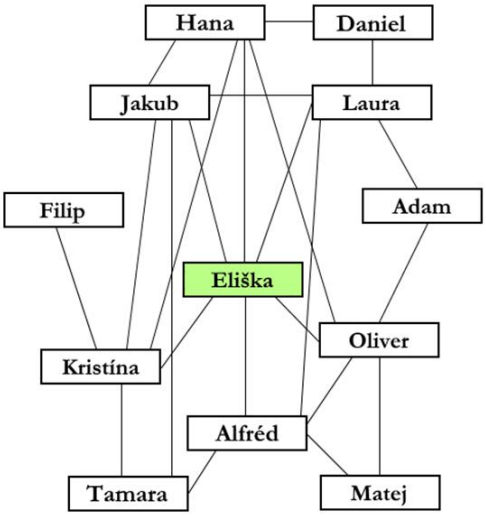
Správna odpoveď: b)

	a)	b)	c)	d)	e)
robot lienka (N=129)	6 %	**38 %**	16 %	17 %	22 %

Tabuľka 3: percentuálne rozdelenie správnych (zelená) a nesprávnych (červená) odpovedí na 3. úlohu; zdroj: vlastné spracovanie

Táto úloha súvisí s vykonávaním algoritmov, kde študenti mali nájsť postupnosť príkazov, ktorá umožní lienke dostať sa k červenou zástavou označenému cieľu. Percentuálne rozdelenie študentských odpovedí je zhrnuté v tabuľke 3. Je zaujímavé, že táto úloha sa ukázala ako najťažšia zo všetkých štyroch, keďže správnu odpoveď zadala len o niečo viac ako tretina študentov. Nízky počet študentov, ktorí označili možnosť **a)** je pochopiteľný, pretože po vykonaní tejto postupnosti príkazov sa robot lienka vráti na miesto štartu. Nesprávne odpovede **c)**, **d)** a **e)** študenti označili približne v rovnakom pomere. Vylúčiť tieto odpovede už bolo ťažšie, pretože po vykonaní týchto postupností príkazov robot lienka dosiahne pole susediace s cieľom označenou červenou zástavou.

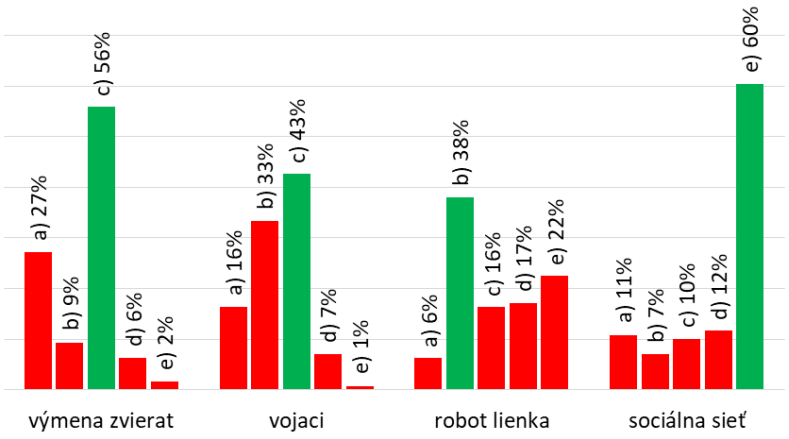
4. úloha (*sociálna sieť*):
Eliška pridala jednu fotografiu. S ktorými priateľmi môže Eliška zdieľať fotografiu, ak nechce, aby túto fotografiu videl Alfréd?
Popis: Eliška sa spolu s kamarátmi zaregistrovali na sociálnej sieti. Obrázok zobrazuje jednotlivé priateľstvá. Čiara znamená, že dotyčné osoby sa poznajú. Ak používateľ zdieľa fotografiu s niektorým priateľom na sociálnej sieti, tak túto fotografiu vidia aj jeho priatelia.
Možné odpovede: a) Hana, Kristína, Laura
b) Hana, Kristína, Oliver
c) Jakub, Kristína, Alfréd
d) Jakub, Oliver, Laura
e) Jakub, Hana, Kristína
Správna odpoveď: e)



	a)	b)	c)	d)	e)
sociálna sieť (N=129)	11 %	7 %	10 %	12 %	**60 %**

Tabuľka 4: percentuálne rozdelenie správnych (zelená) a nesprávnych (červená) odpovedí na 4. úlohu; zdroj: vlastné spracovanie

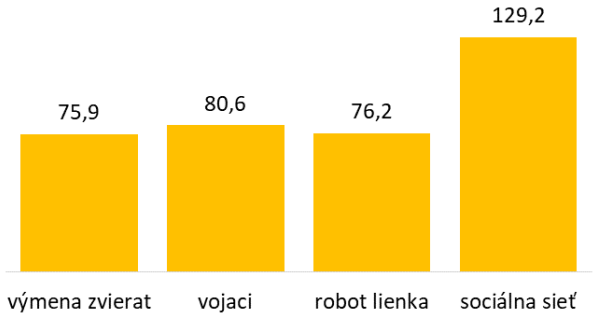
Táto úloha sa ukázala ako najjednoduchšia zo štyroch úloh, keďže takmer dve tretiny študentov označili správnu odpoveď (viď tabuľka 4). Rozdelenie nesprávnych odpovedí je takmer rovnaké. Zaujímavé je, že boli aj študenti, ktorí si vybrali odpoveď **c)**, keďže v tejto odpovedi je uvedený aj Alfréd, ktorý by nemal vidieť zdieľanú fotografiu.



Obrázok 1: Percentuálne rozdelenie správnych (zelená) a nesprávnych (červená) odpovedí na jednotlivé úlohy; zdroj: vlastné spracovanie

3 Vyhodnotenie úloh z informatiky podľa času riešenia

Keďže počas pilotného prieskumu študenti test STEM vyplnili samostatne v domácom prostredí, považovali sme za dôležité vyhodnotiť úlohy z informatiky podľa času riešenia (vrátane času potrebného na prečítanie zadania úlohy). Príliš málo času by mohlo naznačovať, že respondent jednoducho označil odpoveď bez toho, aby si prečítal zadanie úlohy. Priemerné časy riešenia úloh v sekundách sú znázornené na obrázku 2, z ktorého vyplýva, že študenti strávili najdlhší čas s riešením 4. úlohy (*sociálna sieť*). Na obrázku 1 si môžeme všimnúť, že práve pri tejto úlohe dosiahli najvyššiu úspešnosť (60 %). Priemerné časy riešenia ostatných troch úloh sú zhruba rovnaké.

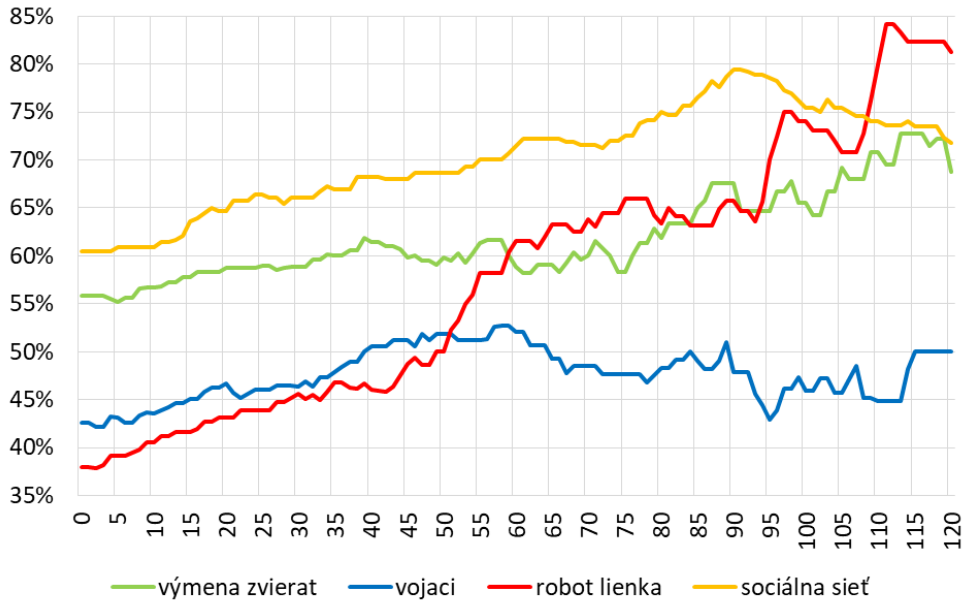


Obrázok 2: Priemerné časy riešenia úloh z informatiky v sekundách; zdroj: vlastné spracovanie

Môžeme konštatovať, že študenti, ktorí odpovedali správne, venovali dostatok času na prečítanie a pochopenie textu úlohy. Toto je obzvlášť viditeľné v prípade 3. úlohy (*robot lienka*), kde vykonanie postupností príkazov uvedených v možných odpovediach vyžaduje dlhší čas. Priemerný čas riešenia správnych odpovedí bol najvyšší v 4. úlohe (*sociálna sieť*), čo tiež nie je prekvapujúce, nakoľko pochopenie zadania tejto úlohy a analýza grafu priateľstiev môže byť časovo náročné.

V prípade 1. a 2. úlohy (*výmena zvierat* a *vojaci*) sme zistili, že študenti, ktorí pri riešení strávili najviac času, neoznačili správnu odpoveď. Zaujímavosťou je, že v 2. úlohe (*vojaci*) najvyšší priemerný čas riešenia mala odpoveď **a)**, keďže túto odpoveď možno po pozornom prečítaní textu ľahko vylúčiť. Tu si študenti pravdepodobne nesprávne pochopili význam prechodu riekou a považovali pohyb člna tam a späť za jeden prechod.

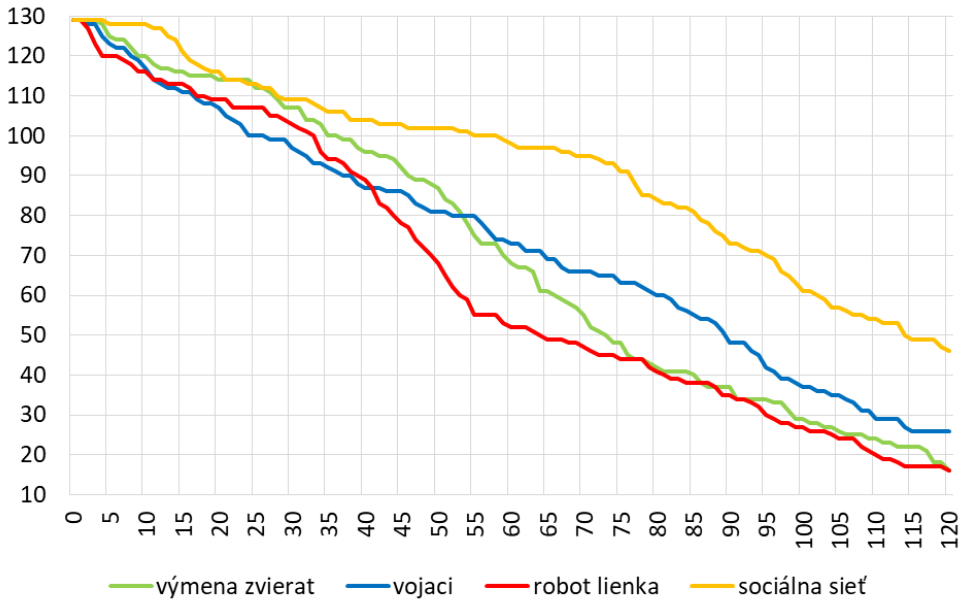
Graf na obrázku 3 zobrazuje zmenu úspešnosti študentov v riešení úloh z informatiky berúc



Obrázok 3: Zmena úspešnosti v riešení úloh berúc do úvahy iba odpovede nad stanovený čas riešenia; zdroj: vlastné spracovanie

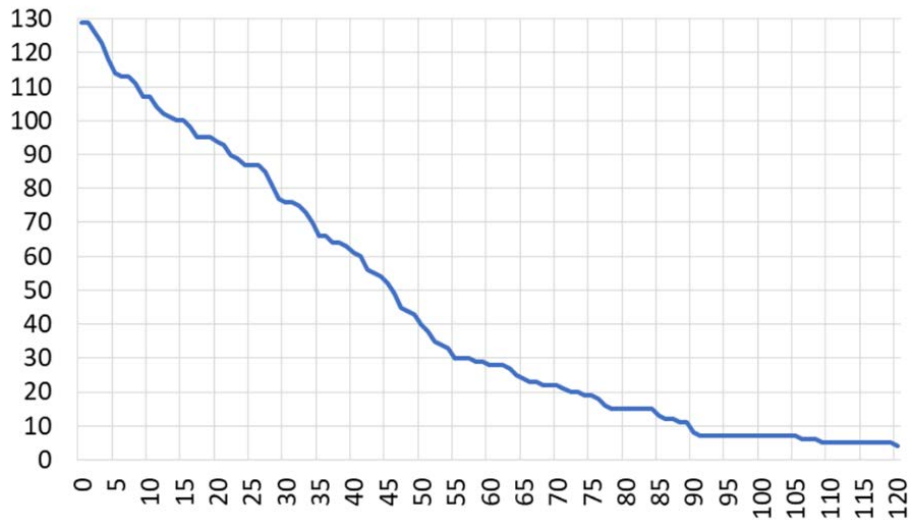
do úvahy iba odpovede nad stanovený čas riešenia, ktorý je zobrazený na vodorovnej osi. Z grafu je vidieť, že počas prvých 40 sekúnd sa zvyšuje efektivita študentov pri každej úlohe. Predpokladáme, že vo všetkých štyroch prípadoch si pozorné čítanie textu úlohy vyžaduje aspoň 30 sekúnd. Tiež si môžeme všimnúť, ako riešenie 3. úlohy (*robot lienka*), ale aj 4. úlohy (*sociálna sieť*) závisí od času riešenia. Pre tieto dve úlohy platí, že študenti, ktorí riešeniu venovali viac času, boli väčšinou úspešní. V prípade 1. úlohy (*výmena zvierat*) nárast nie je taký výrazný, kým v prípade 2. úlohy (*vojaci*) možno pozorovať mierny pokles nad 60 sekúnd. Príčinu týchto javov možno vysvetliť tak, že na riešenie týchto dvoch úloh nestačilo podrobné preskúmanie vstupných údajov, ale dôraz sa kládol na nájdenie optimálneho riešenia.

Graf na obrázku 4 pre každú úlohu znázorňuje pokles počtu študentských odpovedí na zadané úlohy berúc do úvahy iba odpovede nad stanovený čas riešenia, ktorý je zobrazený na vodorovnej osi. Najmenší pokles bol pozorovaný v prípade 4. úlohy (*sociálna sieť*) a najväčší pokles v prípade 3. úlohy (*robot lienka*). Na základe týchto údajov môžeme odhadnúť počet študentov, ktorí sa postavili zodpovedne k riešeniu úloh. Za predpokladu, že prečítanie textu každej úlohy trvá aspoň 30 sekúnd, počet takýchto študentov možno odhadnúť na 90 až 110.



Obrázok 4: Pokles počtu študentských odpovedí na zadané úlohy berúc do úvahy iba odpovede nad stanovený čas riešenia; zdroj: vlastné spracovanie

Graf na obrázku 5 ukazuje pokles počtu študentských odpovedí na všetky 4 úlohy berúc do úvahy iba odpovede nad stanovený čas riešenia. Na základe toho možno povedať, že 76 študentov sa venovali riešeniu všetkých štyroch úloh aspoň pol minúty.



Obrázok 5: Pokles počtu študentských odpovedí na všetky 4 úlohy berúc do úvahy iba odpovede nad stanovený čas riešenia; zdroj: vlastné spracovanie

Hodnotenie spoľahlivosti subtestu obsahujúceho týchto štyroch úloh sa uskutočnilo pomocou Cronbachovho koeficientu alfa. V našom prípade je hodnota tohto koeficientu 0,663, čo je tesne pod hranicou 0,7. Preto za účelom zvýšenia reliability testu STEM sme po vyhodnotení pilotného prieskumu prepracovali úlohy z informatiky a vykonali nasledovné zmeny v znení týchto úloh.

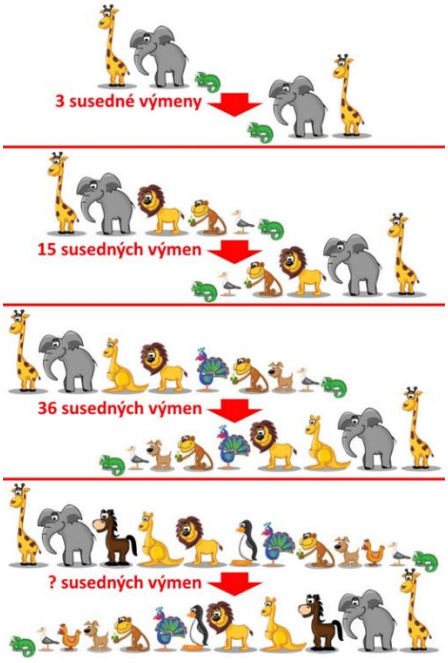
Záver

Na základe získaných výsledkov môžeme konštatovať, že väčšina respondentov pilotného prieskumu dokázala úspešne vyriešiť úlohy testu STEM z informatiky.

Berúc do úvahy priemerný čas riešenia úloh, vo všetkých štyroch úlohách sa potvrdilo, že študenti, ktorí označili správne odpovede, venovali riešeniu dostatočný čas. Ak vezmeme do úvahy iba odpovede nad stanoveným časom riešenia, možno pozorovať zvýšenie úspešnosti v riešení týchto úloh.

Za účelom zvýšenia reliability testu STEM sme po vyhodnotení pilotného prieskumu prepracovali úlohy z informatiky a vykonali nasledovné zmeny v znení týchto úloh.

1. úloha MODIFIKOVANÁ (*výmena zvierat*):
Odhadni, najmenej koľko susedných výmen je potrebných v prípade, že chceme zmeniť poradie 12 zvierat na opačné?
Popis: Zvieratá stoja v rade, zoradené od najvyššieho po najnižšie. Môžeme vymeniť vždy iba dve susedné zvieratá (napr. v prvom prípade môžeme vymeniť žirafu so slonom, ale nemôžeme vymeniť žirafu s chameleónom, keďže nie sú priamo vedľa seba).
Ak v rade stoja 3 zvieratá, na zmenu ich poradia na opačné sú potrebné najmenej 3 susedné výmeny, v prípade 6 zvierat je potrebných najmenej 15 susedných výmen, a v prípade 9 zvierat je potrebných najmenej 36 susedných výmen.



Možné odpovede: a) 45 b) 55 c) 66 d) 78 e) 91
Správna odpoveď: c)

<u>2. úloha MODIFIKOVANÁ</u> <u>(*vojaci*):</u>
Ako sa môže dostať vojak na druhý breh rieky tak, aby sa chlapci spolu s člnom nachádzali na východiskovom brehu rieky? Zadaj možnú postupnosť krokov prechodu cez rieku!

Popis: Vojak dôjde k rieke, ktorou musí prejsť. Rieka je hlboká a v blízkosti sa nenachádza žiadny most. Na brehu rieky sú dvaja chlapci s člnom. Čln je však taký malý, že sa doň zmestí iba vojak alebo dvaja chlapci (každá osoba vie riadiť čln a každý z chlapcov môže prejsť aj sám).
Odpovede (ku každému priraď čísla od 1 po 4):
a) Chlapec v žltom tričku prevesluje rieku
b) Chlapec v modrom tričku prevesluje rieku
c) Obaja chlapci preveslujú rieku
d) Vojak prevesluje rieku
Správna odpoveď: c-1, a-2, d-3, b-4 alebo c-1, b-2, d-3, a-4

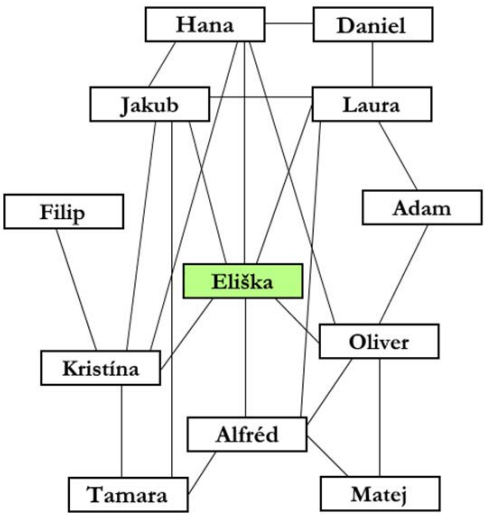
3. úloha MODIFIKOVANÁ (*robot lienka*):
Ku ktorej zástave sa dostane robot lienka, ak vykoná postupnosť príkazov na obrázku vpravo?

Popis: Robot lienka pozná tri základné príkazy: pomocou ide jeden krok dopredu, pomocou sa otočí o 90 stupňov doprava, a pomocou sa otočí o 90 stupňov doľava. Postupnosť týchto príkazov vie lienka aj viackrát opakovať.

Možné odpovede: a) k sivej
b) k zelenej
c) k modrej
d) k žltej
e) k oranžovej

Správna odpoveď: b)

4. úloha (*sociálna sieť*):
Eliška chce na sociálnu sieť pridať jednu fotografiu, ale nechce, aby túto fotografiu videl Alfréd. Označ správnu odpoveď!



Popis: Eliška sa spolu s kamarátmi zaregistrovali na sociálnej sieti. Obrázok zobrazuje jednotlivé priateľstvá. Čiara znamená, že dotyčné osoby sa poznajú (napr. Oliver a Eliška sa poznajú, ale Tamara a Eliška nie). Ak používateľ zdieľa fotografiu s niektorým priateľom na sociálnej sieti, tak túto fotografiu vidia aj jeho priatelia.

Možné odpovede: a) Eliška by mala zdieľať fotografiu s Hanou, Kristínou a Laurou
b) Eliška by mala zdieľať fotografiu s Hanou, Kristínou a Oliverom
c) Eliška by mala zdieľať fotografiu s Jakubom, Kristínou a Alfrédom
d) Eliška by mala zdieľať fotografiu s Jakubom, Oliverom a Laurou
e) Eliška by mala zdieľať fotografiu s Jakubom, Hanou a Kristínou

Správna odpoveď: e)

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol vďaka podpore projektu VEGA „*Analýza prírodovedného a matematického vzdelávania na stredných školách a inovácia obsahu odborových didaktík*" (VEGA 1/0663/19).

Literatura:

[1] Joyce, A.: *Stimulating interest in STEM careers among students in Europe: Supporting career choice and giving a more realistic view of STEM at work*. Paper presented at the 3rd Education and Employers Taskforce Research Conference. London : Education and Employers Taskforce, 2014.

[2] European Schoolnet: *Science, Technology, Engineering and Mathematics Education Policies in Europe*. Scientix Observatory report. Brussels : European Schoolnet, 2018. ISBN 978-94-9291-350-0.

RNDr. Štefan Gubo, PhD.
Univerzita J. Selyeho, Fakulta ekonómie a informatiky, Katedra informatiky
Bratislavská cesta 3322, SK-94501 Komárno, Slovenská republika
gubos@ujs.sk

PaedDr. Ladislav Végh, PhD.
Univerzita J. Selyeho, Fakulta ekonómie a informatiky, Katedra informatiky
Bratislavská cesta 3322, SK-94501 Komárno, Slovenská republika
veghl@ujs.sk

Dr. habil. PaedDr. György Juhász, PhD.
Univerzita J. Selyeho, Pedagogická fakulta, Katedra chémie
Bratislavská cesta 3322, SK-94501 Komárno, Slovenská republika
juhaszg@ujs.sk

MULTIMEDIÁLNA PODPORA EDUKAČNEJ AKTIVITY V MATEMATIKE TECHNOLÓGIOU ROZŠÍRENEJ REALITY

Jana Hnatová[1], Adam Hnať[2], Alžbeta Bučková[3]

[1]Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta, Katedra matematickej edukácie, SR
[2]Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta humanitných vied, Katedra mediamatiky a kultúrneho dedičstva, SR
[3]Technická univerzita v Košiciach, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra počítačov a informatiky, SR

Abstrakt: Jednou z dostupných „nových“ technológií, ktoré je možné zaradiť aj do výučby matematiky na primárnom stupni vzdelávania, je technológia rozšírenej reality (AR). Táto technológia umožňuje integrovať do reálneho prostredia virtuálne prvky poskytujúce žiakom pridanú hodnotu v podobe doplnkových informácií a dynamického zážitku. V príspevku konkretizujeme možnosti multimediálnej podpory matematickej edukačnej aktivity zameranej na identifikáciu priestorových geometrických útvarov pomocou modelu TPACK.

Klíčová slova: Model TPACK, technológia rozšírenej reality, matematické primárne vzdelávanie.

Multimedia support for educational activity in mathematics with augmented reality technology

Abstract: One of the available "new" technologies that can be included in the teaching of mathematics at primary level of education is augmented reality (AR) technology. This technology makes it possible to integrate virtual elements into the real environment, providing pupils with added value in the form of additional information and a dynamic experience. In this paper, we specify the possibilities of multimedia support of mathematical educational activities aimed at the identification of spatial geometric shapes using the TPACK model.

Key words: TPACK model, augmented reality technology, mathematical primary education.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 29 (2021), No. 1

Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2021_Hnatova_et_al.pdf

EULEROVA FAKTORIZAČNÍ METODA

Jaroslav Hora

KMT FPE ZČU Plzeň

Abstrakt: Existuje řada metod, jak rozložit složené přirozené číslo N v součin faktorů. Jedním z elementárních postupů je metoda Fermatova, která využívá zápisu čísla N ve tvaru rozdílu čtverců, který je ovšem nutno nalézt: $N = x^2 - y^2$. Půvabná a žákům posledních ročníků ZŠ i středoškolským studentům dostupná je Eulerova metoda. Je využitelná v případě, že N lze zapsat dvěma různými způsoby ve tvaru součtu dvou čtverců přirozených čísel. Takováto vyjádření dnes můžeme nacházet i s pomocí počítače.

Klíčová slova: Složená přirozená čísla, faktorizace, algoritmy pro faktorizaci přirozených čísel.

Euler's Factorization Method

Abstract: There are a number of methods to decompose a compound natural number N into the product of factors. One of the elementary methods is the Fermat method, which uses the notation of the number N as a difference of squares, which, however, must be found: $N = x^2 - y^2$. Euler's method is charming and accessible to the last years of elementary school and high school students. It is available when N can be written in two different ways in the form of the sum of two squares of natural numbers.

Key words: Composite natural numbers, factorization, algorithms for factorization of natural numbers.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 29 (2021), No. 1

Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2021_Hora.pdf

EFEKTIVITA VÝUKY STŘEDOVÉ SOUMĚRNOSTI PŘI VZDĚLÁVÁNÍ DISTANČNÍM ZPŮSOBEM

Miroslava Huclová

31. základní škola Plzeň, Elišky Krásnohorské 10, 323 00 Plzeň

Abstrakt: První část článku se zabývá legislativním rámcem distanční výuky a nastavenými nástroji pro tento způsob výuky na základní škole. Druhá část článku uvádí konkrétní způsob synchronní a asynchronní výuky ve vzdělávací oblasti matematika a její aplikace. Stanovené výzkumné otázky a jejich analýza přináší odpovědi na efektivitu distanční výuky v učivu středová souměrnost. V článku je zaznamenán pohled žáků na distanční výuku z mnoha úhlů.

Klíčová slova: distanční výuka, synchronní a asynchronní výuka, formativní a sumativní hodnocení, středová souměrnosti, Office 365, Microsoft Teams.

The effectiveness of teaching central symmetry in distance learning

Abstract: The first part of the article deals with the legislative framework of distance education and the set tools for this method of teaching in primary school. The second part of the article presents a specific method of synchronous and asynchronous teaching in the field of mathematics and its applications. The established research questions and their analysis provide answers to the effectiveness of distance learning in the curriculum of central symmetry. The article records the view of students on distance learning from many angles.

Key words: distance learning, synchronous and asynchronous learning, formative and summative assessment, central symmetry, Office 365, Microsoft Teams.

Úvod

Školní rok 2020/2021 přinesl školám povinnost vzdělávat své žáky distančním způsobem. Pro každého zúčastněného byl tento krok výrazným předělem. Po stanovení právních rámců, metodik pro distanční vzdělávání a školních strategií pro tento způsob výuky to byl pedagog, žák i rodiče, kteří se museli vypořádat se zcela novými situacemi. Cestu, kterou prošli všichni uvedení, jsem zaznamenala v textu a přináší exkurz do realizovaných hodin matematiky na základní škole. Vyústěním je odpověď na kvalitativní výzkum ve všech stanovených otázkách. Zejména analýza výzkumných otázek opřená o názory a pohledy žáků přináší zajímavý exkurz do jejich vnímání a prožívání celé doby. Z tohoto důvodu je příspěvek unikátním pohledem na mimořádnou situaci, která v našich životech vznikla.

1 Problematika distanční výuky a její nastavení

1.1 Legislativní rámec

Distanční výuka ve školním roce 2020/2021 z důvodu pandemie SARS-CoV-2 probíhala na základních školách v České republice od 14. října 2020. Právním dokumentem pro uvedený způsob výuky byla novela zákona č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání, tzv. školského zákona. Novela vstoupila v platnost dne 25. 8. 2020. Školský zákon stanovil povinnost distančního způsobu vzdělávání za podmínek stanovených v § 184a. Odstavec 1, § 184a uvedeného zákona stanovil, že distanční výuka bude probíhat dle stávajícího ŠVP. Odstavec 2, § 184a stanovil povinnost žáků vzdělávat se distančním způsobem výuky. Způsob poskytování vzdělávání a hodnocení výsledků vzdělávání distančním způsobem přizpůsobuje škola podmínkám žáka pro toto vzdělávání. [1]
Uvedená základní škola na základě platných právních dokumentů zvolila strategii distanční výuky pro své žáky s ohledem na stávající hardwarové a softwarové vybavení. Uplatnila zkušenosti pedagogů a odezvu žáků a jejich zákonných zástupců ze školního roku 2019/2020. Došlo k úpravě základního pedagogického dokumentu školy. Školní řád stanovil povinnost distanční výuky. [2] S podrobným plánem distanční výuky, včetně pravidel pro žáky a zákonné zástupce, počtu hodin a hodnocení byli seznámeni zaměstnanci školy, žáci a zákonní zástupci. Dokument byl zveřejněn na webových stránkách školy.

1.2 Nastavené nástroje školy pro distanční výuku

Základní škola využila pro distanční výuku souboru cloudových služeb Office 365 a školní informační systém Škola OnLine.
Metodici ICT stanovili s vedením školy strategii se zaměřením na konkrétní využití při distanční výuce. V platformě Microsoft Teams měla každá třída školy založen svůj Tým (VII. C). Vlastníci týmu byli všichni pedagogové, kteří ve třídě učí. Členové týmu byli žáci třídy. Tým měl své kanály s názvem předmětů (Matematika, Český jazyk…).
Školní informační systém Škola OnLine byl využit pro rozvrh hodin distanční výuky a pro zadávání úkolů. Tato strategie byla volena pro snadný přístup zákonných zástupců a žáků k uvedeným údajům. Z tohoto důvodu byla i veškerá elektronická komunikace a zadávání úkolů vedena vždy pro tento informační systém. Duplicitně byly veškeré podstatné informace ukládány i na webové stránky školy. Na stránkách školy byl k dispozici žákům a zákonným zástupcům rezervační systém. Žáci i zákonní zástupci zde měli možnosti rezervace termínu k individuální rezervaci s jakýmkoli pedagogem školy.
Nezanedbatelnou oblastí pro úspěšné vedení tohoto způsobu výuky bylo proškolení pedagogů v platformách Office 365, zejména Microsoft Teams a proškolení všech žáků během prvního měsíce školního roku. Pedagogové, žáci a zákonní zástupci měli během celého období této formy vzdělávání metodickou podporu ve formě studijních materiálů, které odrážely aktuální problematiku, a servisní podporu hardware a software. Všechny tyto činnosti zvládali metodici ICT. Uvedené faktory přispěly k úspěšnému zapojení žáků do distanční výuky.

1.3 Asynchronní a synchronní způsob výuky

Výuka probíhala asynchronní a synchronní formou. Při asynchronní výuce pracovali žáci vlastním tempem na zadaných úkolech. [3] Pro řešení úkolů mohli využívat platforem dostupných v souboru cloudových služeb Office 365, učebnice, pracovní listy a sešity.
Při synchronní výuce byl učitel propojen s žáky prostřednictvím jednotné komunikační platformy Microsoft Teams v reálném čase. Třída ve stejný čas na stejném virtuálním místě pracovala na úkolech, komunikovala s pedagogem, popřípadě plnila zadané úkoly ve skupinových místnostech pod dohledem svého pedagoga. Rozvrh hodin byl po celou dobu distanční výuky neměnný a respektoval časovou flexibilitu žáků, jejich věk a aktivity žáků. Zřetel při tvorbě rozvrhu byl dbán i na sourozence ve škole tak, aby se mohli vystřídat při online výuce. Každá třída měla v rozvrhu hodin zařazenou třídnickou hodinu se svým třídním učitelem. Učitel komunikoval s žáky a pomáhal řešit jejich problémy, které nastolila uvedená forma výuky. Nedocenitelnou roli plnil v absenci sociálních kontaktů. V tomto časovém úseku si žáci mohli popovídat mezi sebou, řešit své těžkosti, stesky či radosti a úspěchy.
Nedílnou úlohou na realizované výuce byly podmínky, které vytvořili rodiče v domácím prostředí. Každá rodina se dle svých možností snažila vytvořit odpovídající podmínky pro své dítě. Rodiče i po konzultacích s ICT metodiky školy zajistili svým dětem odpovídající vybavení pro online výuku. Jednotlivých případech pomohla hardwarové vybavení pro žáky zajistit Správa informačních technologií města Plzně (příspěvková organizace města Plzeň).
Při tomto nastavení byl docílen stav, kdy žáci školy nezůstali mimo systém a každý žák pracoval přiměřeně svým možnostem a podmínkám.

2 Akční výzkum

2.1 Cíle výzkumu

V rámci výzkumu jsou cíleně získány potřebné informace o dosažené úrovni znalostí a dovedností vzdělání žáka základní školy při distanční výuce v porovnáním s prezenčním způsobem výuky. Výzkum probíhal u žáků 7. ročníku. Cílem výzkumu bylo stanovit dosažený vědomostní a dovedností profil žáka a jeho rozvoj klíčových kompetencí, zejména digitální gramotnosti a informatického myšlení. Výsledky byly analyzovány s ohledem na stanovená kritéria výzkumu.

2.2 Kategorie výzkumu

S ohledem na stanovený cíl je řazen výzkum do uvedených kategorií:

- Účel výzkumu: Popis;
- Charakteristika výzkumu: Akční výzkum;
- Výzkumná strategie: kvalitativní výzkumná strategie;
- Přístup kvalitativního výzkumu: Případová studie – Studium sociálních skupin (skupina žáků). [4]

2.3 Praktická část výzkumu

Pro výše uvedený výzkum jsou specifikovány základní kroky:
Oblast výzkumu: dosažený vědomostní a dovedností profil žáka při distanční výuce a jeho rozvoj klíčových kompetencí, zejména digitální gramotnosti a informatického myšlení. [5]
Výzkumný problém: Jaká je úroveň znalostí a dovedností žáka základní školy při distanční výuce v porovnáním s prezenčním způsobem výuky?
Účel výzkumu: Zjištění efektivnosti distanční výuky na základní škole s ohledem na stávající legislativní rámec a způsob výuky.
Význam pro vědu: Výzkum poukáže na nastavení distančního způsobu výuky, jeho efektivitu a rozvoj klíčových dovedností žáků na základní škole. Důležité informace poskytne výsledek výzkumu pro další strategii vzdělávání nejen na základních školách. Výzkum má mít rovněž význam pro tvůrce a producenty moderních výukových prostředků a pomůcek vhodných pro výuku s využitím informačních technologií.

2.4 Základní výzkumné otázky

Jaké mají znalosti žáci, kteří se učí distanční výukou v porovnání s žáky, kteří se učili prezenční výukou?
Jaké mají dovednosti žáci, kteří se učí distanční výukou v porovnání s žáky, kteří se učili prezenční výukou?
Jaký je rozvoj klíčových kompetencí žáků, kteří se učí distanční výukou?
Jaký je vztah žáka k distanční výuce?
Jaké vidí žák pozitiva a negativa distanční výuky?

2.5 Omezení výzkumu

Omezení a vymezení kvalitativní části výzkumu je dáno předmětem zájmu, tedy předmětem matematika na 31. základní škole v Plzni. Omezení se týká i konkrétního učiva – středová souměrnost. Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace odpovídá ŠVP s názvem Škola pro 21. století [6], který vychází z RVP ZV. Závěry se týkají matematickému profilu žáka této školy.
Z toho plynou následující omezení výzkumu:
Studii a její závěry je nutno brát jako lokální, protože výzkum je prováděn žácích konkrétní základní školy. Toto je zároveň výhodou (skupina respondentů je homogenní a procházela po celou dobu stejnými podmínkami vzdělání na stejné škole) a nevýhodou (pro širší zobecnění jde o menší výzkumný vzorek). Všech těchto omezení je si autorka vědoma a je na ně brán zřetel při interpretaci výsledků.

2.6 Realizace výzkumu

Při výzkumu bylo postupováno následujícím způsobem:

- analýza platného legislativního rámce pro distanční způsob výuky;
- analýza situace na vybrané ZŠ – nastavení distanční výuky na konkrétní základní škole, její podmínky a realizace;
- výběr vhodných skupin pro výzkum (Skupina D, Skupina P);

- sestavení dotazníku s otázkami, které jsou v kontextu s výzkumným problémem pro Skupinu P;
- analýza písemných prací Skupiny P;
- oslovení žáků (respondentů), vysvětlení účelu výzkumu, získání souhlasu s podmínkami výzkumu, zpřístupnění výzkumných otázek na síťových discích;
- sběr, zpracování, doplnění a analýza získaných kvalitativních dat;
- vyhodnocení výzkumu.

Časová realizace výzkumu:
Výzkum probíhal v období školního roku 2020/2021.

2.7 Role výzkumníka ve vztahu k terénu

Výzkumník v terénu má vzhledem k terénu roli zasvěceného výzkumníka (člověka, který se stýká se svými respondenty mimo rámec výzkumu); volně dle [7]

3 Situace školy realizující výzkum

3.1 Matematika a její aplikace – středová souměrnost

Výzkum se zaměřuje na učivo vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace z tematického okruhu Geometrie v rovině a v prostoru. Očekávaný výstupem žáka je načrtnout a sestrojit obraz rovinného útvaru ve středové souměrnosti, určit středově souměrný útvar a střed souměrnosti útvaru. Rozvojem klíčových kompetencí směřuje žák k řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi a ke zdokonalování grafického projevu.

3.2 Nástroje a způsob asynchronní výuky učiva středové souměrnosti

Pro asynchronní podporu středové souměrnosti měli žáci připraveni v platformě Microsoft Teams souhrnný materiál pro učivo středová souměrnost. Přehledné uspořádání všech materiálů zajišťoval kanál s názvem Matematika. Karta Soubory obsahovala složku Středová souměrnost. Zde měli žáci k dispozici prezentace s materiály pro výuku daného učiva (shodné útvary, vzor a obraz středové souměrnosti, střed souměrnosti, označení středové souměrnosti). Připravená videa byla umístěna v další kartě Video SS. Obsahovala podrobný postup k sestrojení obrazů ve středové souměrnosti se středem S. V tištěné podobě měli žáci k dispozici doma učebnici Matematika pro 7. ročník základní školy 3, Shodnost, středová souměrnost, čtyřúhelníky, hranoly a hybridní pracovní sešit Matematika s nadhledem 7.

3.3 Nástroje a způsob synchronní výuky učiva středové souměrnosti

Synchronní výuka probíhala v počtu dvě hodiny týdně v celkové dotaci 7 hodin. Motivační úvod tematického celku začínal sdílením připravené prezentace. S využitím nabídky Sdílet bylo provedeno připomenutí učiva z 6. ročníku – osová souměrnost. Vhodnou diskusí s žáky byla provedena motivace pro nové učivo. S využitím nabídky Předat řízení se mohli žáci aktivně účastnit pohybu v prezentaci a svým komentářem opakovat učivo nejen sobě, ale i svým

spolužákům. Pro vlastní sestrojení obrazu útvarů ve středové souměrnosti bylo použito motivační video. Postupním rýsováním obrazu bodu, úsečky, přímky, trojúhelníku a čtyřúhelníků získali žáci znalosti a dovednosti pro sestrojení obrazů rovinných útvarů. Videa byla doplněna komentářem pedagoga. V této fázi je více než kdy jindy důležité zdůraznit žákům odpovědnosti za své vzdělání. Zpětnou vazbou pro učitele je ukázka narýsovaných objektů na kameru.

Upevňování a procvičování učiva docházelo při rýsování figur. Zadání rýsoval pedagog do dynamického matematického software GeoGebra. Žáci si do sešitu rýsovali dané figury a prováděli náčrty, či konstrukci obrazů ve středové souměrnosti. S využitím dynamického pohybu figury byla vedena diskuse se žáky o poloze vzoru a obrazu vzhledem k pozici středu souměrnosti, či naopak. Žáci byli motivováni k využití programu pro domácí přípravu. Při modelování figur dbal pedagog na druhy a tloušťku čar při konstrukci a správné označení všech bodů. Vystřižení figury středově souměrných útvarů a vložením do digitální online tabule Microsoft Whiteboard umožnilo s využitím grafického tabletu doplnit zápis středové souměrnosti. Žáci mohli využít sdílení a sami dopisovat zápis pod dohledem pedagoga. Celá vyučovací hodina byla v platformě Microsoft Teams nahrávána. Video z celé hodiny měli žáci k dispozici v kartě Příspěvky.

Dalším nástrojem pro upevňování a procvičování učiva bylo využití pracovního sešitu Matematika s nadhledem 7. Pedagog měl hybridní pracovní sešit k dispozici v digitální podobě a sdílel ho s žáky. Žáci rýsovali do svého pracovního sešitu, zpětnou vazbou a kontrolou byla finální figura zobrazená a narýsovaná v hybridním pracovním sešitu. Poslední fází pro osvojení učiva a fixaci bylo online cvičení s využitím webových stránek. Žák po vyzvání využil nabídku Požádat o řízení a zaškrtnul správnou odpověď. Pedagog diskutoval s žáky o možných řešeních. Práce s chybou posunula žáky v dalších znalostech. Zároveň zde byla zřejmá motivace k procvičení učiva i mimo online výuku. Odkazy na interaktivní cvičení vytvořené v aplikaci Learning Apps měli žáci zaslané do elektronické konverzace hodiny. Interaktivní cvičení souvisela s daným tématem a doplnila škálu digitálních materiálů, které mohli žáci využít v online výuce.

3.4 Reflexe výuky a ověření získaných znalostí a dovedností

Pro ověření získaných znalostí učiva byl sestaven kvíz v platformě Microsoft Forms. Kvíz obsahoval otázky s obrázky rovinných útvarů. Žák měl s využitím volby vybrat středově souměrné útvary, souměrnost útvarů, shodnost útvarů či správný obraz útvaru ve středové souměrnosti. K ověření získaných dovedností byl zadán úkol v platformě Microsoft Teams. Žáci doma rýsovali středově souměrné figury. Prvním typem příkladů bylo narýsovat obrazy zadaných rovinných útvarů dle zadaného středu souměrnosti S, druhý typ příkladů bylo dorýsování útvaru tak, aby bod S byl jeho střed souměrnosti. V posledním typu příkladu měli žáci sami podle zadaných rozměrů sestrojit rovinný útvar, správně vyznačit střed souměrnosti dle zadání a narýsovat obraz útvaru. U všech figur měli žáci napsat zápis.

3.5 Formativní a sumativní hodnocení

Formativní hodnocení probíhalo průběžně během výuky. Žákům byla při odevzdávání úloh poskytována zpětná vazba prostřednictvím platformy Microsoft Teams nebo školního informačního systému Škola OnLine. Zejména v grafickém projevu byli upozorňováni na kvalitu rýsování. Sumativní hodnocení probíhalo na konci učiva středová souměrnost.

Zaznamenalo souhrnné informace o znalostech a dovednostech žáků podle nastavených kritérií a v souladu s klasifikačním řádem školy.

4 Výzkum

4.1 Výzkumný vzorek

Výzkumným vzorkem byla skupina žáků 7. ročníku uvedené školy ze školního roku 2020/2021 označená jako Skupina D (skupina distanční). Kontrolním vzorkem byla skupina žáků 7. ročníku ze školního roku 2016/2017 uvedené školy označená jako Skupina P (skupina prezenční). Obě skupiny měly na výuku matematiky stejného pedagoga, obě skupiny se vzdělávaly podle stejného ŠVP. Pedagog byl v obou třídách zároveň i třídním učitelem – má tedy dostatečný přehled o všech charakteristikách žáka. Pro výzkum byly použity stejné úlohy u obou skupin. Zdrojem dat Skupiny P pro uvedený výzkum byly archivované čtvrtletní písemné práce, sešity z písemných prací a hodnocení pedagoga v daném učivu. Vše podpořené zkušenostmi z výuky a znalostí terénu.

Výzkumného šetření se zúčastnilo 47 respondentů:

- 7. ročník (2020/2021) Skupina D – 23 žáků,
- 7. ročník (2016/2017) Skupina P – 26 žáků. Skupina P byla do výzkumu zařazena pro první dvě výzkumné otázky.

4.2 Dotazníkové šetření

Pro výzkum byl jako zdroj kvalitativních dat vytvořen elektronický dotazník s využitím aplikace Microsoft Forms. V dotazníku respondenti odpovídali elektronicky na stanovené výzkumné otázky. Otázky v dotazníku byly voleny s ohledem jejich věkovou kategorii. Po skončení elektronického dotazování byl s žáky veden skupinový rozhovor o dané otázce. Postřehy byly zaznamenány do připraveného formuláře.
Základní okruhy. První okruh otázek se zabývá znalostmi žáka v učivu středová souměrnost. Druhý okruh otázek se zabývá dovednostmi žáka v učivu středová souměrnost. Třetí část zkoumá vztah žáka k distanční výuce. Poslední část otázek se pohledem žáka na pozitivita a negativita distanční výuky.

5 Vyhodnocení dotazníků v kontextu výzkumných otázek

5.1 Znalosti žáků v učivu středová souměrnost

Skupina D
Otázka dotazníku: Dokážeš určit středově souměrné útvary (vlajky, písmena, útvary) ve středové souměrnosti?
Třináct žáků (57 %) odpovědělo, že vždy dokážou určit středově souměrné útvary. Deset žáků (43 %) volilo odpověď někdy. Odpověď nikdy nevolil žádný žák.
Otázka dotazníku: Dokážeš určit správný obraz útvaru (úsečky, trojúhelníku, čtyřúhelníku) ve středové souměrnosti se středem S?

Čtrnáct žáků (65 %) odpovědělo, že vždy dokážou určit správný obraz útvaru ve středové souměrnosti se středem D. Devět žáků (35 %) volilo odpověď někdy. Odpověď nikdy nevolil žádný žák.
Při skupinovém rozhovoru žáci pozitivně hodnotili využití výpočetní techniky při určování středově souměrných útvarů a jejich obrazů. Ocenili jiné formy a metody výuky, dostatek aplikací, prezentací a materiálů na určování středů souměrnosti. Vyhovovalo jim doplnění středů souměrnosti a obrazů útvarů do elektronických materiálů a práce s ICT.
Analýza znalostí
Kvíz zadaný v platformě Microsoft Forms byl sestaven ze stejných útvarů, které měla ve čtvrtletní písemné práci a v písemných pracích kontrolní skupina (Skupina P). Sumativní hodnocení kvízu: výborně: 7 žáků, chvalitebně: 9 žáků, dobře: 5 žáků, dostatečně: 2 žáci, nedostatečně: 0 žáků.
Skupina P
Pro analýzu výsledků byla použita čtvrtletní písemné práce, sešity z písemných prací, sumativní hodnocení a zkušenosti pedagoga v daném učivu.
Sumativní hodnocení středově souměrných útvarů a obrazů útvarů ve čtvrtletní písemné práci: výborně: 6 žáků, chvalitebně: 8 žáků, dobře: 7 žáků, dostatečně: 5 žáků, nedostatečně: 0 žáků.
Analýza a odpověď na výzkumnou otázku:
Znalosti žáků, kteří se učili distančně, jsou stejné v učivu středová souměrnost v porovnání s žáky, kteří se učili prezenčně. Tento závěr je podepřen výsledky v sumativním hodnocení a pozorováním pedagoga.

5.2 Dovednosti žáků v učivu středová souměrnost

Skupina D
Otázka dotazníku: Dokážeš narýsovat obraz útvaru (úsečky, trojúhelníku, čtyřúhelníku) ve středové souměrnosti se středem S?
Patnáct žáků (65 %) odpovědělo, že vždy dokážou narýsovat obraz útvarů. Osm žáků (35 %) volilo odpověď někdy. Odpověď nikdy nevolil žádný žák.
Otázka dotazníku: Jaká je tvá kvalita rýsování středové souměrnosti se středem S?
Dvacet žáků (65 %) odpovědělo, že rýsují kvalitně. Tři žáci (13 %) odpovědělo že rýsují nekvalitně.
Otázka dotazníku: Jaká je tvá přesnost rýsování středové souměrnosti se středem S?
Šestnáct žáků (70 %) odpovědělo, že rýsují přesně. Sedm žáků (30 %) volilo odpověď, že nerýsuji přesně.
Otázka dotazníku: Ve škole bys rýsoval lépe než doma?
Patnáct žáků (65 %) odpovědělo, že ve škole by rýsovali lépe než doma. Osm žáků (35 %) odpovědělo opačně.
Při skupinovém rozhovoru žáci pozitivně hodnotili využití výpočetní techniky při rýsování. Líbila se jim vazba, kdy pedagog rýsoval figury v programu GeoGebra a oni rýsovali do sešitu. Sami si také vyzkoušeli rýsování v programu GeoGebra doma. Při výuce ocenili využití videa, nahrávání hodiny a zápisy s využitím grafického tabletu. Připustili, že kvalita rýsování doma není vysoká. Typy a tloušťky čar mnohdy nezohledňují. Na zápis zapomínají.
Analýza znalostí
Odevzdaný úkol v platformě Microsoft Teams byl sestaven ze stejných figur, které měla ve čtvrtletní písemné práci a v písemných pracích kontrolní skupina (Skupina P). Sumativní

hodnocení úkolu: výborně: 3 žáci, chvalitebně: 6 žáků, dobře: 10 žáků, dostatečně: 4 žáci, nedostatečně: 0 žáků.
Skupina P
Pro analýzu výsledků byla použita čtvrtletní písemné práce, sešity z písemných prací, sumativní hodnocení a zkušenosti pedagoga v daném učivu.
Sumativní hodnocení narýsovaných obrazů rovinných útvarů ve čtvrtletní písemné práci: výborně: 6 žáků, chvalitebně: 9 žáků, dobře: 8 žáků, dostatečně: 3 žáci, nedostatečně: 0 žáků.
Analýza a odpověď na výzkumnou otázku:
Dovednosti žáků, kteří se učili distančně, jsou nižší v učivu středová souměrnost v porovnání s žáky, kteří se učili prezenčně. Tento závěr je podepřen výsledky v sumativním hodnocení a pozorováním pedagoga. Zejména je zřejmé nekvalitní rýsování. Zde byla zřejmá absence prezenční účasti při hodinách a vedení i dohled pedagoga na průběh a kvalitu rýsování.

5.3 Rozvoj klíčových kompetencí žáků

Skupina D
Otázka dotazníku: Jaký přínos pro Tebe měla distanční výuka (co nového jsi se naučil atd.)?
Žáci zadávali svoji odpověď do textového pole. Jako přínos uváděli: lépe umím pracovat s mobilem a počítačem, umím lépe komunikovat přes počítač nebo mobil, umím pracovat s programy v počítači, vím, jak se učit podle počítače, orientuji se lépe v internetovém prostředí, jsem zodpovědný při učení, umím si rozvrhnout práci na den a týden, jsem více samostatný při učení, poznal jsem sám sebe, poznala jsem svoje schopnosti, více poslouchám při hodině, umím více pracovat na sobě.
Při skupinovém rozhovoru žáci pozitivně hodnotili nově získané dovednosti, o kterých byli schopni hovořit, obhajovat je a pojmenovat nové příklady v užití a praxi. Vyzdvihovali zejména využití ICT, komunikace přes platformy, vyhledávání informací, ale i rozvoj svých schopností v oblasti učení, plánování a rozvržení pracovního a volného času.
Analýza a odpověď na výzkumnou otázku:
Pro žáky měla distanční výuka významný přínos v rozvoji jejich klíčových kompetencí. Je u nich zřejmý výrazný posun v digitální gramotnosti, ale rozvoj schopností cílevědomě pracovat, respektovat svůj čas, řešit problémy a účinně komunikovat.

5.4 Vztah žáka k distanční výuce

Skupina D
Otázka dotazníku: Jak hodnotíš distanční výuku?
Žáci zadávali svoji odpověď do textového pole. Distanční výuku hodnotili takto: moc se mi nelíbí, raději bych byla ve škole; zpočátku se mi to líbilo, teď už se těším do školy; distanční mi vylepšila známky, ale doma mě to nebaví; je dobrá jen občas; někdy je v pohodě, někdy bych potřebovala výklad normálně, nebo-li ve škole; je pro mě těžký se dokopat k úkolům, ale už si nedokážu představit, že bych se vrátila do školy; distanční výuku hodnotím kladně ale i záporně: kladně, že jsem si odpočinul od školy, záporně, že jsem se nenaučil tolik kolik bych se naučil ve škole; distanční výuka je pro mě psychicky náročná; moc se mi to nelíbí, raději bych byla ve škole; super, nemusím brzo vstávat.
Při skupinovém rozhovoru žáci zaznamenali svůj pohled v časové ose. Od počátečního nadšení nad absencí školy, přes radost z nového druhu výuky, nových metod a práce s ICT až po slábnoucí motivaci z dlouhého úseku bez sociálních kontaktů a ztrátu motivace k práci a učení.

Někteří žáci se dokážou systematicky stále připravovat na výuku, u některých je zřejmá slábnoucí motivace až apatie z jednotvárného způsobu a stylu života. Žáci také zdůrazňovali vliv rodinného prostředí. U žáků, kde je zřejmá pomoc rodičů jsou výsledky a motivace výrazně lepší než u žáků, kde pomoc a motivace rodiny chybí. I tyto faktory žáci zmínili a uměli pojmenovat při skupinovém rozhovoru. Převážná část skupiny se těší na návrat do školy. Jsou jedinci, kterým distanční výuka vyhovuje. Neví, jak si zvyknou na návrat to školy. Jednotně žáci konstatují, že jejich úroveň znalostí a dovedností ve všech předmětech je nižší, než když chodili do školy.
Analýza a odpověď na výzkumnou otázku:
Žáci po dobu distanční výuky prošli výrazným vývojovým procesem. Byli nuceni se přizpůsobit novým technologiím, novým metodám práce. Nároky, které na ně byly kladeny byly obtížné. Jejich názory zaznamenané v této otázce jsou přínosným exkurzem do jejich vnímání a řešení celé doby distanční výuky.

5.5 Jaká vidí žák pozitiva a negativa distanční výuky

Skupina D
Otázka dotazníku: Vypiš klady distanční výuky.
Žáci zadávali svoji odpověď do textového pole. Jako klady uváděli: pozdější vstávání; nemusí dojíždět do školy; lepší známky; více času na učení; menší časová dotace hodin; mohu si rozplánovat den, jak chtějí.
Otázka dotazníku: Vypiš zápory distanční výuky.
Žáci zadávali svoji odpověď do textového pole. Jako zápory uváděli: nenaučí se tolik, kolik ve škole; mají hodně úkolů; látka se těžko pochopí, a proto se jí málo naučí; když nepochopí výklad nemá ho kdo doma vysvětlit; technické problémy při online hodinách; nestabilní internet doma; nevidí své spolužáky; pořád tráví čas u počítače; nedokáže se přinutit při hodině dávat pozor; při online hodinách je nikdo nekontroluje; chybí živý výklad učitele.
Při skupinovém rozhovoru žáci zopakovali a obhajovali své názory. Nejvíce jim chybí kontakt se spolužáky. Jsou si vědomi, že známky neodpovídají jejich znalostem a dovednostem. Doufají, že po návratu do školy se vše dokážou doučit
Analýza a odpověď na výzkumnou otázku:
Žáci umí pojmenovat klady a zápory distanční výuky. Hodnocení provádí ve svých činnostech běžného dne. Jsou schopni sebehodnocení. Nechybí jim vize a přání dohnat své znalosti a dovednost po návratu do školy.

6 Závěr

Uvedený výzkum přinesl zajímavý pohled na efektivitu distanční výuky, podhled z pozice žáků, jejich názory, zkušenosti a postoj. Tento cenný exkurz je souhrnným postojem za celé období, které jsme prožili.
I přes uvedené těžkosti má distanční výuka potenciál. Zejména v oblasti digitální gramotnosti je cenou zkušeností, které bychom mohli využít v procesu učení i v budoucích letech.

Literatura:

[1] Zákon, kterým se mění zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon), ve znění pozdějších předpisů. In: *Sbírka zákonů*. 24. 8. 1920. ISSN 1211-1244.

[2] Školní řád a pravidla pro hodnocení výsledků žáků. *31. základní škola* [online]. 1. 9. 2020 [cit. 2021-03-21]. Dostupné z: https://zs31.plzen.eu/dokumenty/skolni-rad/skolni-rad.aspx.

[3] *Metodické doporučení pro vzdělávání distančním způsobem* [online]. 1. Praha: MŠMT ČR, 2020 [cit. 2021-03-18]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/file/53906_1_1/

[4] Švaříček, R., Šeďová, K. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál, 2007. ISBN 978-80-7367-313-0.

[5] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. 1. Praha: MŠMT ČR, 2021 [cit. 2021-04-15]. Dostupné z: https://revize.edu.cz/files/rvp-zv-2021.pdf.

[6] Škola pro 21. století – ŠVP 31. základní školy. *31. základní škola* [online]. 1. 9. 2020 [cit. 2021-03-19]. Dostupné z: https://zs31.plzen.eu/dokumenty/svp/skola-pro-21-stoleti-svp-31-zakladni-skoly.aspx.

[7] Heindl, J. *Kvalitativní výzkum: základní teorie, metody a aplikace*. Praha: Portál, 2008. ISBN 978-80-7367-485-4.

[8] Vašutová, J. *Profese učitele v českém vzdělávacím kontextu*. Brno: Paido, 2004. ISBN 80-315-082-4.

Miroslava Huclová
31. základní škola Plzeň
Elišky Krásnohorské 10, 323 00 Plzeň
huclovami@zs31.plzen-edu.cz

EDUBO – EDUKAČNÍ PLATFORMA PRO BEZPEČNOU ON-LINE VÝUKU

Antonín Jančařík

Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta

Abstrakt: Cílem příspěvku je představit projekt Edubo, na kterém v rámci projektu OP PIK spolupracuje Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy s komerčními firmami. Cílem projektu Edubo je komplexní řešení větší dostupnosti výpočetní techniky a jejího efektivního využívání ve výuce. Kromě hardwarového řešení je řešena i metodická podpora a tvorba konkrétních nástrojů pro výuku. Jádrem výzkumu, který realizuje Pedagogická fakulta, je návrh a evaluace open source aplikace pro plánování a realizaci výuky.

Klíčová slova: nouzová distanční výuka, plánování výuky, hodnocení výuky, ICT ve vzdělávání

Edubo – Education Platform for Safe On-line teaching

Abstract: The aim of this paper is to present the Edubo project, on which the Faculty of Education of Charles University cooperates with commercial companies within the OP EIC project and whose goal is to offer comprehensive solutions aimed at greater availability of computer technology and its effective use in teaching. In addition to the hardware solution, the project also addresses methodological support and the creation of specific tools for teaching. The core of the research carried out by the Faculty of Education is the design and evaluation of an open-source application for teaching planning and implementation.

Key words: emergency remote learning, lesson planning, teaching evaluation, ICT in education

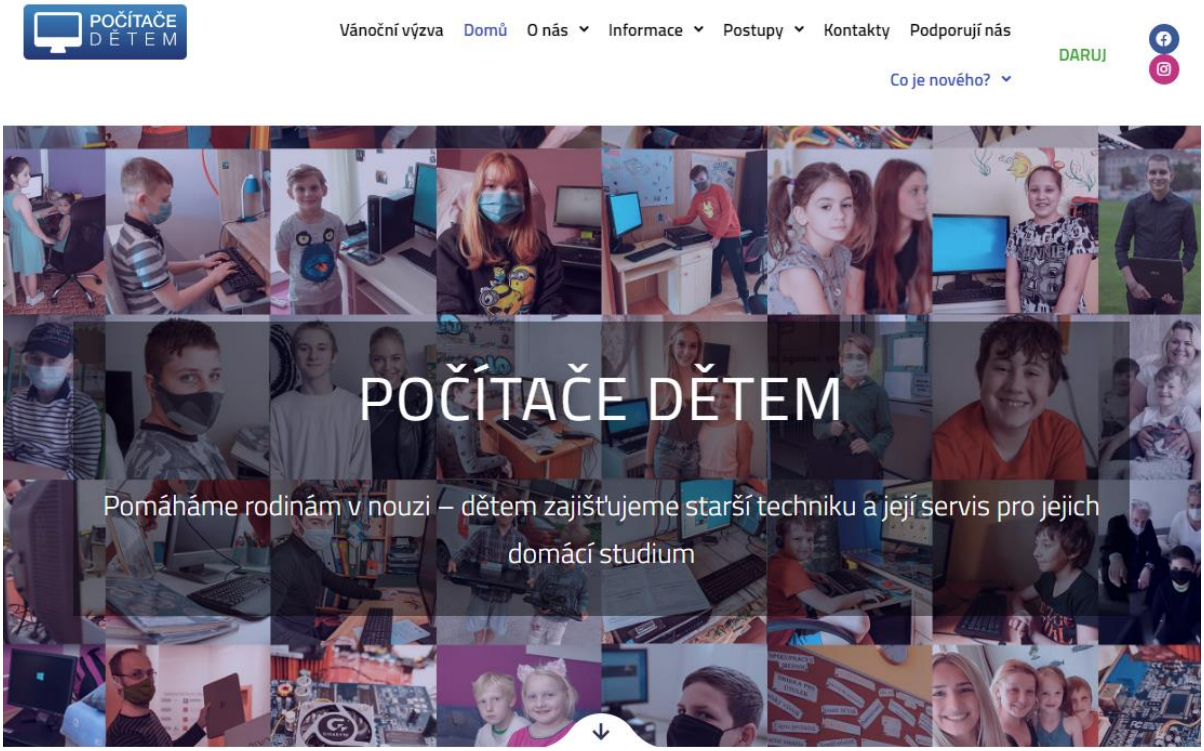
Úvod

Zajištění výpočetní techniky a kvalitních výukových programů je jen jedním z předpokladů rozvoje digitální a matematické gramotnosti a zkvalitnění výuky na školách. Výzkumy ovšem ukazují, že samotné zpřístupnění ICT může mít v některých případech nejen nulový [1], ale i záporných efekt [2,3]. Proto je nutné klást důraz nejenom na vybavení škol a žáků výpočetní technikou, ale také na rozvoj kompetencí umožňujících jejich efektivní využití, a to jak na straně žáků, tak učitelů.

V příspěvku představíme jeden z plánovaných výstupů projektu Edubo, na kterém v rámci projektu OP PIK spolupracuje Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy se společnostmi Mironet a Mr. Cloud.

1 Projekt Edubo

Výzkumný projekt EDUBO (EDUkační platforma pro Bezpečnou On-line výuku) navazuje na předchozí spolupráci výše uvedených partnerů v rámci charitativního projektu Počítače dětem. Projekt Počítače dětem reagoval na uzavření škol kvůli pandemii covid 19 a s ní spojenou nouzovou distanční výuku (ERL – [4,5]). Cílem projektu je zajistit výpočetní techniku a zpřístupnit výuku na dálku žákům základních a středních škol. Projekt je specifický tím, že se zaměřuje na up-cyklaci, tedy renovaci a opětovné uvádění do provozu, starší výpočetní techniky. Cílem projektu je zpřístupnit dětem dvacet tisíc počítačů. Pedagogická fakulta podpořila projekt i tím, že se její studenti do projektu zapojili jako dobrovolníci.



Obrázek 1: Webové stránky projektu Počítače dětem

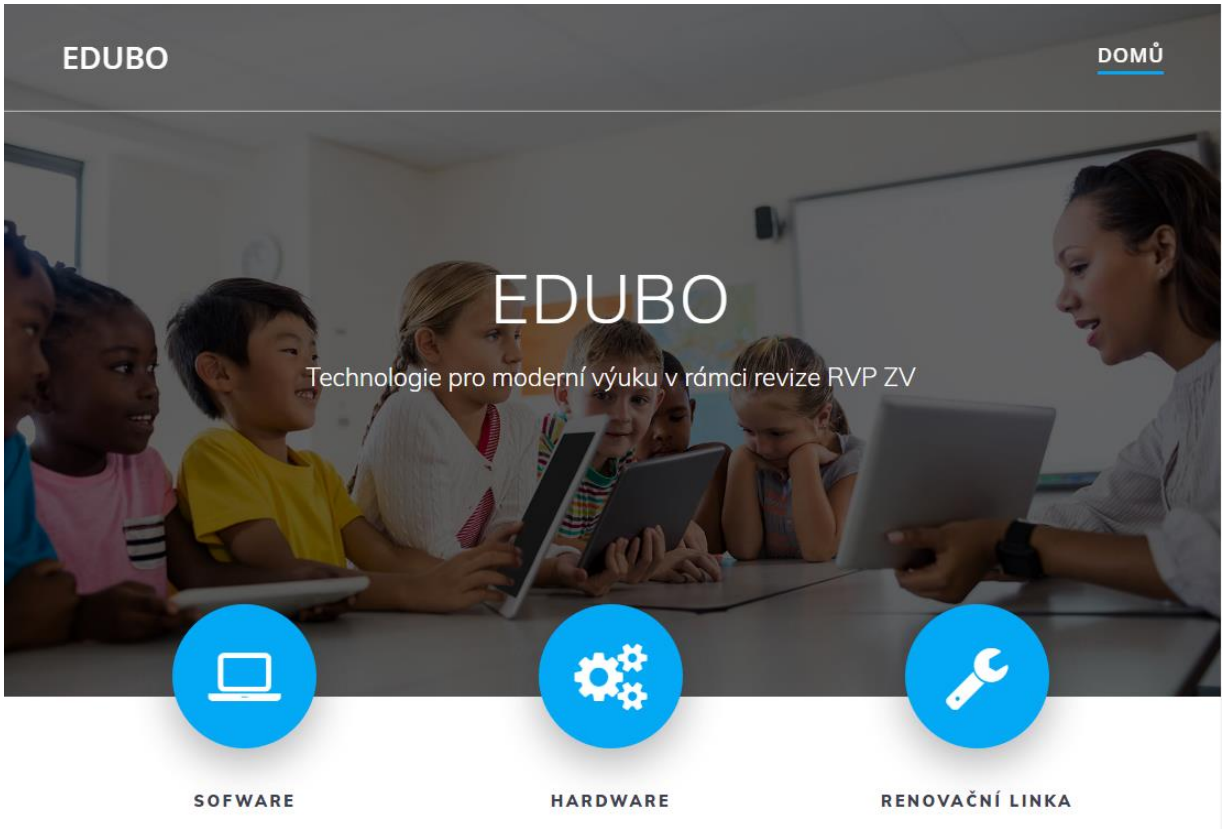
1.1 Cíle projektu

Zkušenosti ukazují, že nestačí dětem dodat kvalitní výpočetní techniku, ale je nutné řešit řadu návazných otázek, od potřeby zajištění vhodného datového připojení až po vytvoření bezpečného prostředím pro práci v on-line prostředí. Protože cílem charitativního projekt nebyl a ani neměl být vývoj a výzkum, dohodli se výše zmiňovaní partneři na přípravě a podání projektu Edubo, jehož cílem je řešit některé z těchto otázek. Jedná se především o:

- Vývoj technologií pro levné opravy, renovaci a recyklaci stávajícího vybavení žáků a škol a prodloužení životnosti IT techniky na školách, a to formou vývoje renovační linky. Na základě dosavadních zkušeností se ukazuje, že renovace výpočetní techniky

není pouze technický, ale především logistický problém, protože vhodné plánování dokáže významným způsobem zefektivnit a zlevnit celý proces up-cyklace.

- Návrh vhodného moderního technického řešení pro žáka a učitele umožňující přechod na výuku podporující digitální kompetence tak, jak to vyžaduje plánovaná revize RVP. Výstupem je návrh vhodné konfigurace pro žáka i učitele a návrh inteligentní mobilní učebny.
- Vývoj open source platformy pro základní a střední školy, která by sloužila pro efektivní plánování a realizace výuky jak v prezenční, tak i distanční a hybridní formě výuky. Tato platforma bude v dalších textu blíže představena.



Obrázek 2: Webové stránky projektu Edubo

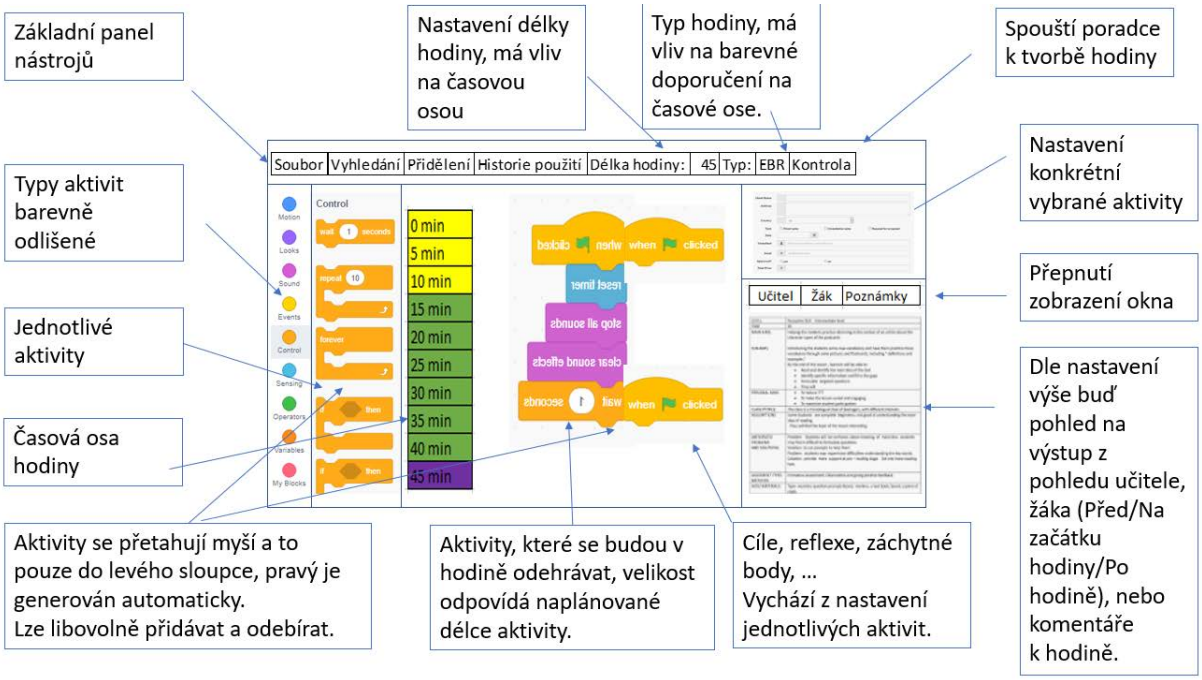
1.2 Softwarové řešení pro plánování a realizaci výuky

Důležitou součástí projektu je vývoj softwarové platformy. Na základě rozsáhlého šetření, do kterého bylo zapojeno v pilotní fázi zapojeno 113 a v hlavním průzkumu 1009 respondentů, byly zmapovány potřeby učitelů a vytvořen přehled nástrojů, které ve výuce používají. Ukázalo se, že učitelé využívají širokou paletu nástrojů a hlavním problémem při výuce není ani tak nedostupnost nástroje s danou funkcionalitou, ale nutnost používat širokou paletu programů. Proto se vývoj soustředil na návrh platformy, která by umožňovala integrovat jednotlivé nástroje a zjednodušila přístup k nim (např. formou zprávy jednotlivých uživatelských účtů).

Současně se ukázala potřeba plánování cílů výuky, sledování jejich dosažení a jejich vhodné komunikace jak se žáky, tak i s jejich rodiči, resp. zákonnými zástupci.

Proto řešitelský tým přistoupil k vývoji platformy, který bude sloužit k plánování nejen jednotlivých hodin, ale celých výukových celků a bude umožňovat vhodně rozvrhovat nejen jednotlivé aktivity, ale přidávat k nim i další rozšiřující výukové materiály, a tak vhodným způsobem individualizovat výuku. V době vzniku tohoto článku je dokončen návrh první verze platformy, jejíchž hlavní nástroje představím. Jedná se o plánování výukové hodiny a výukového celku.

1.2.1 Plánování výukové hodiny



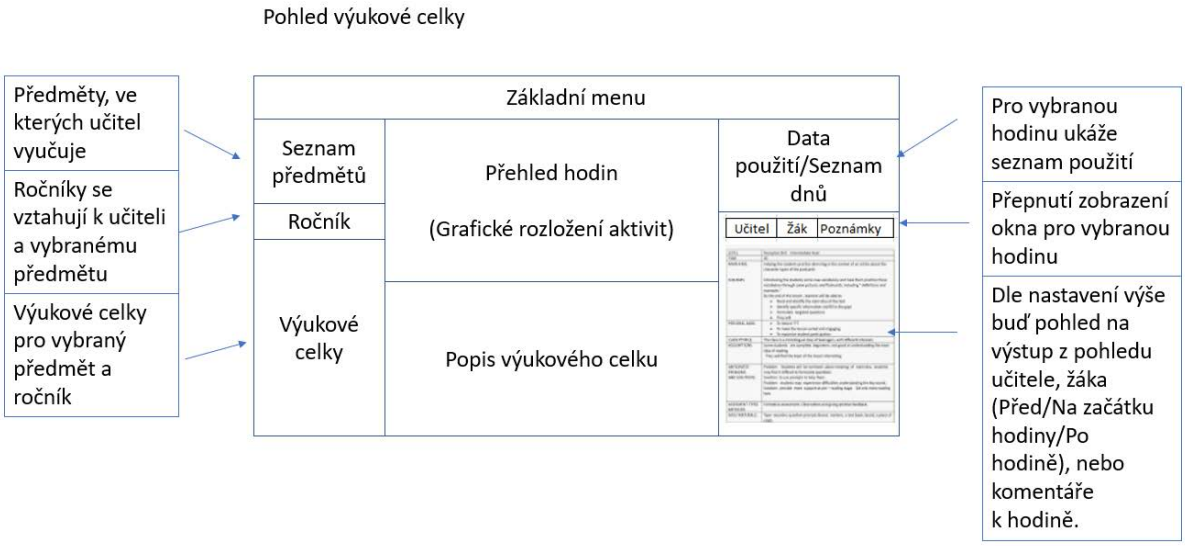
Obrázek 3: Plánování vyučovací hodiny

Plánování hodiny je realizováno v interaktivním prostředí, kde učitel zařazuje na časovou osu hodiny jednotlivé aktivity a doplňuje k nim základní informace jako je délka, odkazy na materiály, které mají být s aktivitou spjaty, a určuje, zda budou žákům dostupné před, v průběhu, nebo po vyučovací hodině. Systém umožňuje přidávat konkrétní materiály i pro vybrané skupiny žáků. U každé vyučovací hodiny i jednotlivých aktivit je možné stanovit cíle a zároveň určit, jakým způsobem budou dosahovány. Software bude využívat dostupné databáze výukových materiálů a pomáhat s jejich vyhledávání. Samozřejmě návrhy jednotlivých hodin i jejich částí bude možné sdílet s dalšími učiteli.

1.2.2 Plánování výukového celku

Navržený systém nepracuje pouze s jednotlivými hodiny (i když jejich plánování tvoří jádro systému), ale umožňuje plánovat širší výukové celky, skládající se z více vyučovacích hodin. Díky barevnému rozlišení jednotlivých typů aktivit tak systém bude poskytovat učiteli

okamžitý přehled o jejich zastoupení a rozložení. V druhé fázi vývoje je cílem do systému integrovat nástroje, které bude přímo doporučovat zařazení různých forem výuky (např. skupinovou práci).



Obrázek 4: Plánování výukového celku

Závěr

V rámci příspěvku byly představeny výstupy z první fáze vývoje softwarové platformy Edubo – nástroje pro plánování výuky. V současné době jsou tyto výstupy konzultovány s další partnery a odborníky v oblasti vzdělávání s cílem zkvalitnit celý proces přípravy, realizace a hodnocení výuky. V průběhu roku 2022 by měl projekt postoupit do druhé fáze, ve které bude dokončen vývoj první verze software a zahájen zkušební provoz. Finální verze produktu, která vznikne na základě zkušebního provozu a probíhajících diskusí s odbornou veřejností, bude dostupná v první polovině roku 2023. Vývoj aplikace však neskončí spolu s projektem. Zdrojový kód platformy bude poskytnut jako open source, předpokládáme tak její další vývoj na akademické půdě. Pokud vás projekt zaujal a máte zájem na jeho realizaci participovat, můžete kontaktovat autora tohoto příspěvku.

Literatura:

[1] O'Sullivan, C.Y., & Weiss, A. R. (1999). *Student work and teacher practices in science: A report on what students know and can do*. Washington, DC: U. S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement (OERI).

[2] Ravitz, J., Mergendoller, J. & Rush,W. (2002). *Cautionary tales about correlations between student computer use and academic achievement*. Paper presented at annual meeting of the American Educational Research Association. New Orleans, LA.

[3] Hull, A. N.; & Brovey, A. J. (2004). The Impact of the Use of Dynamic Geometry Software on Student Achievement and Attitudes towards Mathematics. *Action Research Exchange*, 3(1).

[4] Brom, C.; Lukavský, J.; Greger, D.; Hannemann, T.; Straková, J.; Švaříček, R. Mandatory home education during the COVID-19 lockdown in the Czech Republic: A rapid survey of 1st-9th graders' parents. *Frontiers in Education* 2020*, 5(103)*.

[5] Hodges, C.; Moore, S.; Lockee, B.; Trust, T.; Bond, A. *The Difference Between Emergency Remote Teaching and Online Learning*. Available online: https://bit.ly/3hx5amz

Doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
M. Rettigové 4, 116 39 Praha 1
antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

SKÚMANIE ÚSPEŠNOSTI ŠTUDENTOV APLIKOVANIA VÝROKOVEJ LOGIKY PRI RIEŠENÍ ÚLOH S FYZIKÁLNYM A REÁLNYM KONTEXTOM

Ladislav Jaruska, Zoltán Fehér, Katarína Szarka, Eva Tóthová Tarová

Univerzita J. Selyeho, Komárno

Abstrakt: Logika odhaľuje vzťahy a súvislosti medzi výrokmi. Ovládanie logiky a logického myslenia hráva dôležitú úlohy v mnohých oblastiach myslenia. S logikou a výrokmi sa študenti stretávajú najčastejšie v oblastiach matematiky. Úspešné osvojovanie si prírodovedných poznatkov tiež vyžaduje istú úroveň logického myslenia študentov. V našom článku sme sa zamerali na prezentovanie analýzy úspešnosti študentov v riešení úloh na vybrané elementy výrokovej logiky, formulovaných vo fyzikálnom a reálnom kontexte. Porovnávanie výsledkov rôznych predmetovo-špecifických kontextových úloh prezrádza, že žiaci dosiahli odlišné úspešnosti pri riešení úloh s rovnakým logickým prvkom.

Klíčová slova: výroková logika, predmety STEM, empirický výskum

Examining the success of students applying propositional logic in solving tasks with physical and real context

Abstract: Logic reveals the relationships and connections between statements. Controlling logic and logical thinking play important roles in many areas of thinking. Students with logic and statements most often meet in various areas of mathematics. Successful acquisition of science knowledge also requires a certain level of logical thinking of students. Our article focused on presenting an analysis of students' success in solving problems on selected elements of propositional logic, formulated in physical and real contexts. Comparing the results of different subject-specific context tasks reveals that students have achieved different successes in solving problems with the same logical element. In addition to the evaluation of the test, we will point out some shortcomings in solving tasks.

Keywords: propositional logic, STEM subjects, empirical research

Úvod

S rozvojom matematiky vznikajú aj rôzne spôsoby myslenia. Problematika matematického vzdelávania je stále prioritou, požiadavky na kvalitu matematického vzdelávania sú stále veľmi aktuálne. Matematické poznatky ovplyvňujú úroveň vyučovania iných predmetov: fyziky, chémie, biológie, informatiky atď. Vyučovanie matematiky sprostredkúva na jednej strane

špecifické učivo, na druhej strane rozvíja logické myslenie, ktoré je neoddeliteľnou súčasťou vyučovacieho procesu. V tomto procese sa odovzdávajú určité poznatky a účastník procesu ich prijíma, spracováva a následne aplikuje. Matematická logika je časť matematiky, ktorá sa vyskytuje vo všetkých ostatných častiach matematiky a rôznych prírodovedných disciplínach. Základom matematickej logiky je výroková logika, ktorá je vyjadrovacím prostriedkom matematiky, s ktorým sa možno stretnúť v rôznej terminológii i v rozličných matematických vetách.
Cieľom projektu VEGA Univerzity J. Selyeho pod názvom „*Analýza prírodovedného a matematického vzdelávania na stredných školách a inovácia obsahu odborových didaktík*“ je zmapovať hlavné atribúty prírodovedného myslenia a preskúmať spojitosti medzi prírodovedným a matematickým myslením žiakov, zistenie úrovne logického myslenia žiakov, znalosť základných prvkov výrokovej logiky.
V našom článku prezentujeme časť výsledkov prieskumu v teste z výrokovej logiky, ktorá bola uskutočnená na Univerzite J. Selyeho. Poukážeme na úspešnosť študentov v riešení úloh fyzikálnym a reálnym kontextom.

1 Postavenie výrokovej logiky

Vedné disciplíny sa zaoberajú spoznávaním určitých oblastí reality. Ich metódou je pozorovanie, zber dát a vyvodzovanie záverov na základe faktov. Predmetom logiky je myslenie. Jej úlohou je analyzovať spôsoby myslenia, definovať správne formy myslenia a vytvoriť správne pravidlá vyvodzovania. Logika skúma a odhaľuje spojitosti a súvislosti medzi tvrdeniami, ovládanie ktorého je veľmi dôležité v rôznych oblastiach myslenia.
Pomocou našich logických schopností môžeme vyvodiť závery na základe našich existujúcich, neúplných vedomostí. Pravda logiky, bez ohľadu na osobu a okolnosti, je nespochybniteľná. K logickým spôsobom získaným poznatkom sa dostávame skúmaním kauzálnych vzťahov, pričom sa opierame o naše predchádzajúce poznatky a skúsenosti [12].
Dôležitým základným pojmom logiky je výrok, ktorý možno definovať ako tvrdenie, o ktorom je možné jednoznačne rozhodnúť, či je pravdivé alebo nepravdivé, pričom žiaden iný informačný obsah tohto tvrdenia nevyhodnocujeme. Logika študuje všeobecné formy usudzovania na symbolickej úrovni, v ktorej sa ignoruje konkrétny obsah jednotlivých tvrdení [9].
K tomuto rozhodnutiu o pravdivosti napomáha pozorovanie, experimentovanie a zovšeobecňovanie, ako aj výsledky dosiahnuté v jednotlivých vedných disciplínach. Oznamovacie vety používané v každodennej reči zvyčajne nevyjadrujú asertívne informácie hodnotou výroku, pretože tvrdenie často zahŕňa čas, stav prostredia a určitú úroveň všeobecného vzdelania, jedným slovom posúdenie pravdivosti vety je zahrnutý aj v kontexte [12].
Sú názory, podľa ktorých existuje všeobecná schopnosť myslenia, ktorú je možné použiť alebo uplatniť v rôznych kontextoch [6]. Na druhej strane jestvujú také názory, že myslenie je vždy kontextovo-špecifické [11], preto rozvíjanie kritického myslenia v jednom kontexte resp. vo vedeckej disciplíne neznamená úspešné aplikovanie tejto schopnosti myslenia v inom kontexte [13].
Zákony myslenia sú univerzálne. Dôležité však je, aké jazykové nástroje používame na diskusiu o logike. Pri opise každej disciplíny boli zvyčajne vyvinuté špeciálne jazykové nástroje na opis faktov a boli vyvinuté špeciálne formy inferencie, ktoré sú špecifické pre danú disciplínu.

Napríklad v matematike sa vyvinul špeciálny jazykový a notačný systém, ako aj niektoré inferenčné pravidlá typické pre matematiku. Matematická logika je odvetvie logiky, ktorej úlohou je skúmať a rozvíjať správne formy myslenia a správne pravidlá vyvodzovania v rámci matematiky.
Matematika, ako vedná disciplína a ako vyučovací predmet, môže formovať myslenie študentov takým spôsobom, aby vedeli aplikovať matematické poznatky aj v iných predmetoch a riešiť každodenné problémy aj mimo školy [5]. Vo vyučovaní matematiky je potrebné uplatňovať logické postupy, ktoré je možné využiť pri riešení matematických úloh ako aj pri ich aplikácii v praxi. V matematike sa úlohy veľmi často riešia pomocou matematickej logiky, ktorá zároveň podporuje rozvoj logického myslenia [10]. Základom matematickej logiky je výroková logika, ktorá ako matematická disciplína tvorí základný aparát pre logické uvažovanie, ktoré podporuje vedecké myslenie [4].
Výroková logika sa zaoberá tvorbou výrokov, ich spájaním navzájom, zisťovaním logickej pravdivosti týchto výrokov a ich spojení a zaoberá sa i niektorými spôsobmi odvodzovania. Zahrňuje skúmanie, ktoré sa týka logického spájania výrokov. Výroková logika je vyjadrovací prostriedok matematiky, s ktorým sa možno stretnúť v rôznej terminológii i v rozličných matematických vetách. Výroková logika formalizuje jazyk, prostredníctvom ktorého formulujeme matematické výroky, a stanovuje pravidlá, na základe ktorých z výrokov vieme usudzovať nové výroky, analyzuje formy výrokových štruktúr a rozvíja metódy dokazovania [13]. Dôležitosť výrokovej logiky spočíva v tom, že je základným spôsobom vyjadrovania matematických myšlienok. Ide o špeciálne formulované oznamovacie vety, o ktorých pravdivosti má zmysel uvažovať. Vďaka tomu vieme nielen korektne formulovať tvrdenia a úsudky o matematických objektoch alebo ich vlastnostiach, ale ich následne aj dokázať resp. vyvrátiť, čiže jednoznačne rozhodnúť o ich pravdivosti resp. nepravdivosti [3], [7].
Výroková logika je oblasť matematickej logiky, ktorá študuje také formy usudzovania, pre ktoré platnosť záverov nezávisí od obsahu a ani od vnútornej štruktúry výrokov, ale výlučne len od pravdivosti či nepravdivosti týchto výrokov [9].

2 Metodika prieskumu

Cieľom nášho empirického prieskumu bolo zistiť znalosť vybraných elementárnych prvkov výrokovej logiky na základe analýzy úspešnosti študentov v riešení úloh s rôznym kontextom. Nástrojom prieskumu bol test, ktorý obsahoval 15 úloh na vybrané prvky výrokovej logiky v kontexte matematiky, fyziky, biológie, chémie a bežného života. Úlohy boli rozdelené do troch skupín (A, B, C), podľa charakteru príkladu vzhľadom na oblasť výrokovej logiky. Každá skupina obsahovala 5-5 úloh s rôznym kontextom. V skupine A sme monitorovali pochopenie a správne používanie kvantifikátorov „*aspoň*“, „*najmenej*“, „*najviac*“. Úlohami skupiny B sme sledovali, či respondenti poznajú správnu formuláciu negácie daného výroku. Skupina C obsahovala úlohy na tvorbu úsudkov na základe daných tvrdení. Pri tvorbe úloh sme vychádzali z presvedčenia, že vybrané prvky tvoria základ z oblasti výrokovej logiky, a ktoré sa najčastejšie používajú pri logickom uvažovaní v prírodovednom vzdelávaní ako aj v bežnom živote. Všetky úlohy testu, okrem jednej boli zadané s výberom odpovede zo 4 resp. 5 možností. Maximálny počet dosiahnuteľných bodov v teste bol 15, t.j. za každú správnu odpoveď mohli respondenti získať 1 bod.

Popri riešení úloh, študenti v rámci jednotlivých skupín mali hodnotiť aj obťažnosť úloh, na základe 5 stupňovej Likertovej škály (od 1 - "veľmi ľahká úloha" až 5 - "veľmi ťažká úloha"). Hodnotenie úloh študentmi sme považovali za dôležité aj z hľadiska sebareflexie budúcich pedagógov, lebo sebareflexia má v pedagogickej práci nezastupiteľné miesto, preto je potrebné už v pregraduálnej príprave venovať jej dostatočnú pozornosť. Sebareflexia v rámci praktickej profesijnej prípravy študenta učiteľstva podnecuje zamyslenie sa študenta nad svojou činnosťou, nad sebou samým vo vzťahu k realizácii vyučovacieho procesu. Ponúka študentovi možnosť zhodnotiť seba samého, uvedomiť si svoje konanie, tým podporuje rozvíjanie profesijných kompetencií [1], [2].

Prieskum bol realizovaný online v období február – apríl 2021, účasťou študentov Pedagogickej fakulty UJS. Test vyplnilo celkovo 191 študentov rôznych pedagogických študijných programov. Po validácii údajov štatistickú analýzu sme vykonali na vzorke 184 respondentov. Väčšina respondentov (165, 89,7 %) bola ženského pohlavia a študovala pedagogiku pre 1. stupeň ZŠ (151, 82,1 %).
Z hľadiska vekového rozloženia 136 (73,9 %) študentov bolo z vekového intervalu 18-25, študenti vo veku nad 25 rokov boli väčšinou externí študenti. Pomer respondentov podľa pohlavia a veku korešponduje so zložením študentov na Pedagogickej fakulte.

3 Výsledky úloh s fyzikálnym a reálnym kontextom

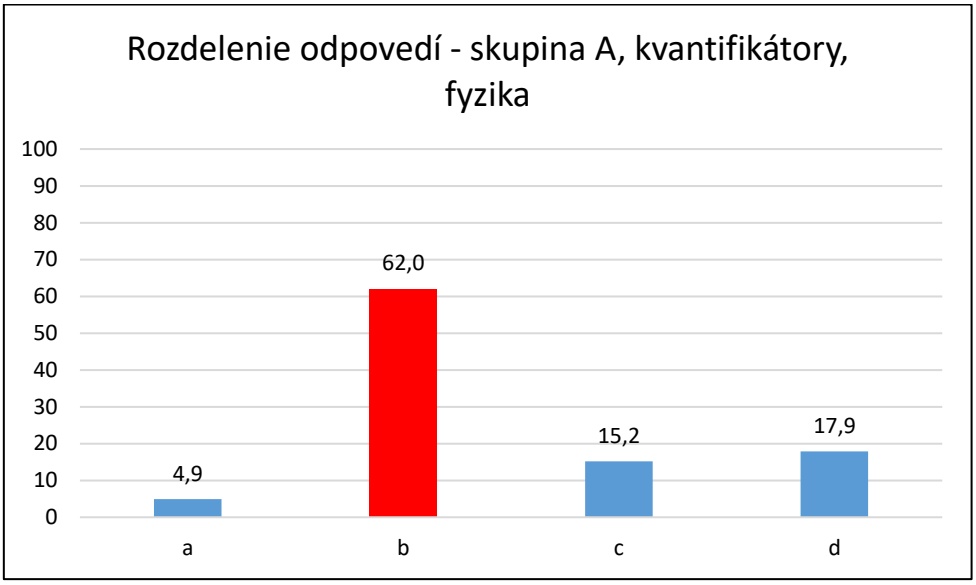
Priemerné bodové hodnotenie študenta v teste bolo 8,20 bodov, štandardná odchýlka 2,45 bodov. To predstavuje 54,7%-nú úspešnosť. Vo vyhodnotení výsledkov sa budeme venovať úspešnosti respondentov v prípade úloh s fyzikálnym a reálnym kontextom, ako aj hodnoteniu obťažnosti vybraných úloh respondentmi.

Úlohy skupiny A – kvantifikátory

Fyzika: V prípade prekročenia nosnosti výťahu 240 kg sa vo výťahu rozsvieti signál „Výťah je preťažený". Do výťahu vstúpili štyria. Najviac aká môže byť ich spoločná hmotnosť?

a) 238 kg b) 240 kg c) 239 kg d) 241 kg

V prípade skupiny úloh A úlohu s fyzikálnym kontextom riešilo správne 62 % študentov. Na obrázku 1 vidíme rozdelenie odpovedí.



Obrázok 1: Pomer odpovedí na jednotlivé riešenia – kvantifikátory, fyzika

V Tabuľke 1 sa nachádza hodnotenie obťažnosti úlohy respondentmi (od 1 - "veľmi ľahká úloha" až 5 - "veľmi ťažká úloha").

Tabuľka 1: Výsledky hodnotenia obťažnosti úlohy – kvantifikátory, fyzika

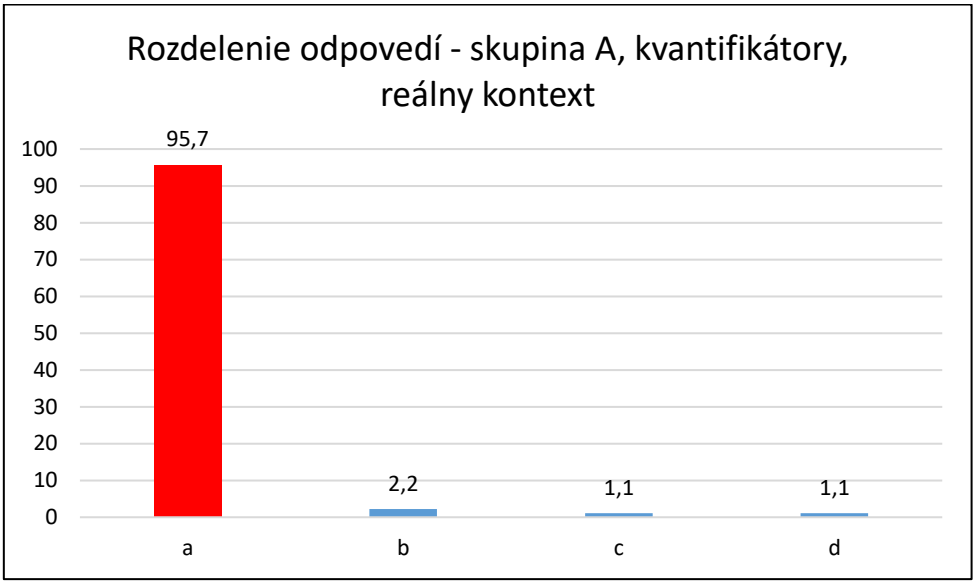
Hodnotenie	1	2	3	4	5
Rozdelenie odpovedí (%)	49,5	34,2	10,3	3,8	2,2

Podľa rozdelenia odpovedí, zistíme, že obťažnosť úlohy hodnotilo až 83,7 % študentov ako "veľmi ľahkú" alebo "ľahkú". V porovnaní hodnotenia obťažnosti úlohy s jej úspešnosťou pozorujeme o 21,7 % nižšiu percentuálnu úspešnosť respondentov v prípade úlohy. Značný rozdiel mohlo zapríčiniť to, že 21,7 % respondentov si nebol vedomí svojich vedomostí. Keďže sa s podobnými pojmami stretávajú aj v každodennom živote, úlohu považovali za ľahkú alebo jednoduchú, no v pozadí si neuvedomovali význam pojmu najviac.

Reálny kontext: Na absolvovanie vstupného testu musíte získať najmenej 95 bodov z maximálnych 120 bodov. Ktoré z nasledujúcich výsledkov znamená neúspešnosť v teste?

a) 94 b) 95 c) 96 d) 120

V prípade skupiny úloh A úlohu s reálnym kontextom riešilo správne 95,7 % študentov. Na obrázku 2 vidíme rozdelenie odpovedí.



Obrázok 2: Pomer odpovedí na jednotlivé riešenia – kvantifikátory, reálny kontext

V Tabuľke 2 sa nachádza hodnotenie obťažnosti úlohy respondentmi (od 1 - "veľmi ľahká úloha" až 5 - "veľmi ťažká úloha").

Tabuľka 2: Výsledky hodnotenia obťažnosti úlohy – kvantifikátory, reálny kontext

Hodnotenie	1	2	3	4	5
Rozdelenie odpovedí (%)	71,7	20,1	5,4	2,2	0,5

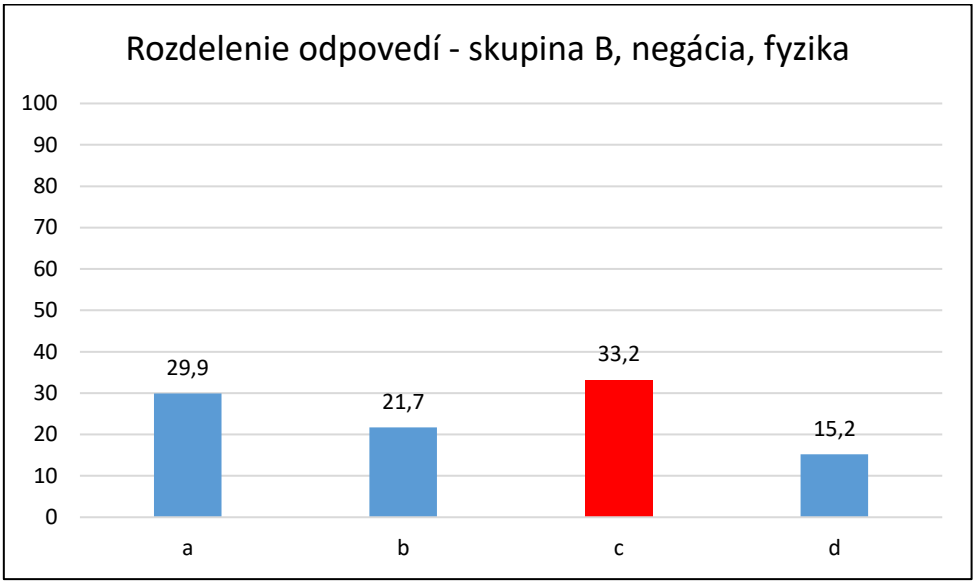
Porovnávajúc úspešnosť respondentov v riešení úlohy (95,7 %) výsledky riešenia úlohy a hodnotenie obťažnosti úlohy, môžeme konštatovať, že spomedzi všetkými prezentovanými úlohami iba v prípade tejto úlohy pozorujeme jednoznačný korešpondujúci vzťah. Obťažnosť tejto úlohy hodnotilo až 91,8 % študentov ako "veľmi ľahkú" alebo "ľahkú", čo sa prejavuje aj vo vysokej hodnote percentuálnej úspešnosti respondentov.

Úlohy skupiny B – negácia výroku

Fyzika: „Vyparovanie z voľného povrchu kvapalín (napr. vody) prebieha pri každej teplote." Negácia výroku:

a) Existuje kvapalina, ktorá sa nevyparuje pri každej teplote.
b) Neexistuje žiadna kvapalina, ktorá by sa vyparovala pri každej teplote.
c) Existuje teplota, pri ktorej sa kvapaliny nevyparujú.
d) Neexistuje teplota, pri ktorej by sa kvapaliny vyparovali.

V prípade skupiny úloh B úlohu s fyzikálnym kontextom riešilo správne 33,2 % študentov. Na obrázku 3 vidíme rozdelenie odpovedí.



Obrázok 3: Pomer odpovedí na jednotlivé riešenia – negácia výroku, fyzika

V Tabuľke 3 sa nachádza hodnotenie obťažnosti úlohy respondentmi (od 1 - "veľmi ľahká úloha" až 5 - "veľmi ťažká úloha").

Tabuľka 3: Výsledky hodnotenia obťažnosti úlohy – negácia, fyzika

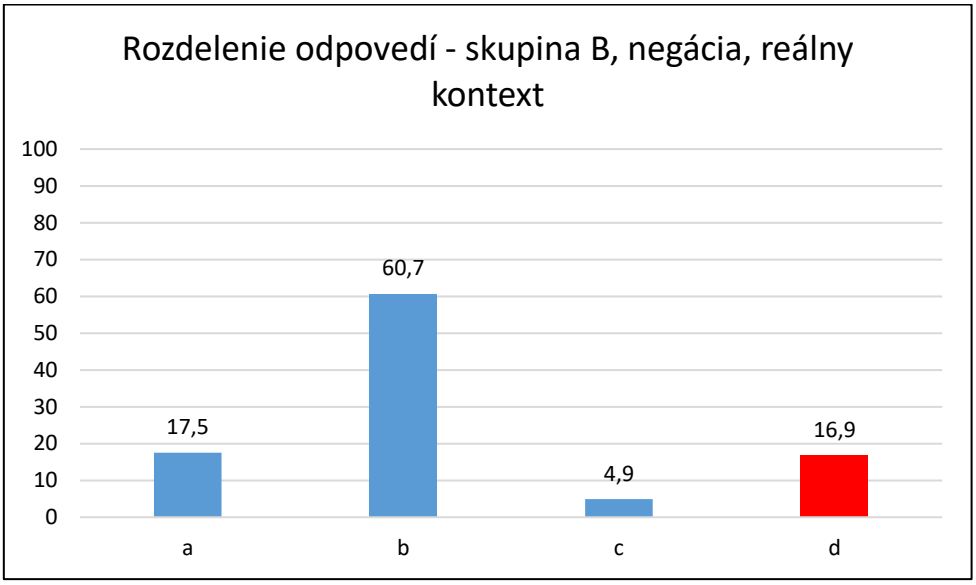
Hodnotenie	1	2	3	4	5
Rozdelenie odpovedí (%)	7,6	12,5	38,0	29,3	12,5

Podľa rozdelenia odpovedí, zistíme, že obťažnosť úlohy hodnotilo až 20,1 % študentov ako "veľmi ľahkú" alebo "ľahkú". V porovnaní hodnotenia obťažnosti úlohy s úspešnosťou respondentov v riešení úlohy (33,2 %) pozorujeme o 12,1 % nižšiu percentuálnu úspešnosť respondentov v prípade úlohy. Nízku úspešnosť študentov mohlo zapríčiniť, že formulovanie negácie výroku robí pre nich problémy.

Reálny kontext: Vytvorte negáciu výroku: "V Prahe som bol zatiaľ aspoň 6-krát."

a) V Prahe som bol zatiaľ 6-krát.
b) V Prahe som bol zatiaľ najviac 6-krát.
c) V Prahe som bol zatiaľ aspoň 5-krát.
d) V Prahe som bol zatiaľ najviac 5-krát.

V prípade skupiny úloh B úlohu s reálnym kontextom riešilo správne 16,9 % študentov. Na obrázku 4 vidíme rozdelenie odpovedí.



Obrázok 4: Pomer odpovedí na jednotlivé riešenia – negácia výroku, reálny kontext

V Tabuľke 4 sa nachádza hodnotenie obťažnosti úlohy respondentmi (od 1 - "veľmi ľahká úloha" až 5 - "veľmi ťažká úloha").

Tabuľka 4: Výsledky hodnotenia obťažnosti úlohy – negácia, reálny kontext

Hodnotenie	1	2	3	4	5
Rozdelenie odpovedí (%)	6,5	22,3	39,7	20,1	11,4

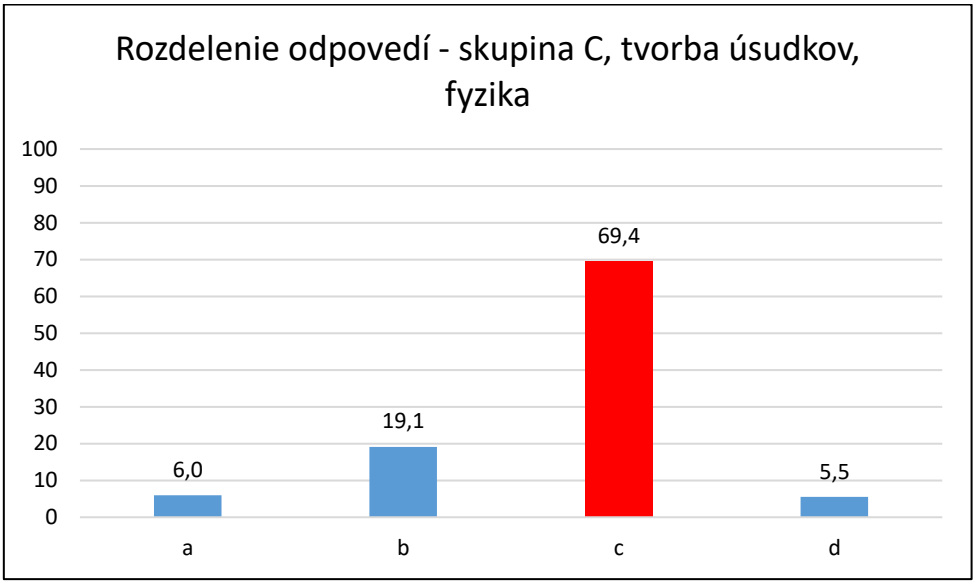
Podľa rozdelenia odpovedí, zistíme, že obťažnosť úlohy hodnotilo až 28,8% študentov ako "veľmi ľahkú" alebo "ľahkú". Porovnávajúc úspešnosť respondentov v riešení úlohy (16,9 %) a hodnotenie obťažnosti úlohy, môžeme konštatovať, že percentuálna úspešnosť úlohy bola o 11,9 % nižšia od hodnotenie obťažnosti tejto úlohy. Rozdiel vo výsledkoch môže byť spôsobený kontextom úlohy, keďže z hľadiska logiky v obidvoch úlohách sú tvrdenia formulované v tvare „*pre každý prvok x platí vlastnosť A*". Negáciou je výrok v tvare "*existuje prvok x pre ktoré neplatí vlastnosť A*".

Úlohy skupiny C – tvorba úsudkov

Fyzika: Rýchlosť šírenia zvuku závisí od hustoty prostredia, v ktorom sa šíri. Čím vyššia je hustota prostredia, tým rýchlejšie sa v ňom šíri zvuk. Hustota železa je vyššia ako hustota vzduchu, takže ...

a) v železe sa zvuk šíri pomalšie.
b) zvuk sa vo vzduchu šíri rýchlejšie.
c) v železe sa zvuk šíri rýchlejšie.
d) zvuk sa šíri rovnakou rýchlosťou v železe a vzduchu.

V prípade skupiny úloh C úlohu s fyzikálnym kontextom riešilo správne 69,4 % študentov. Na obrázku 5 vidíme rozdelenie odpovedí.



Obrázok 5: Pomer odpovedí na jednotlivé riešenia – tvorba úsudkov, fyzika

V Tabuľke 5 sa nachádza hodnotenie obťažnosti úlohy respondentmi (od 1 - "veľmi ľahká úloha" až 5 - "veľmi ťažká úloha").

Tabuľka 5: Výsledky hodnotenia obťažnosti úlohy – tvorba úsudkov, fyzika

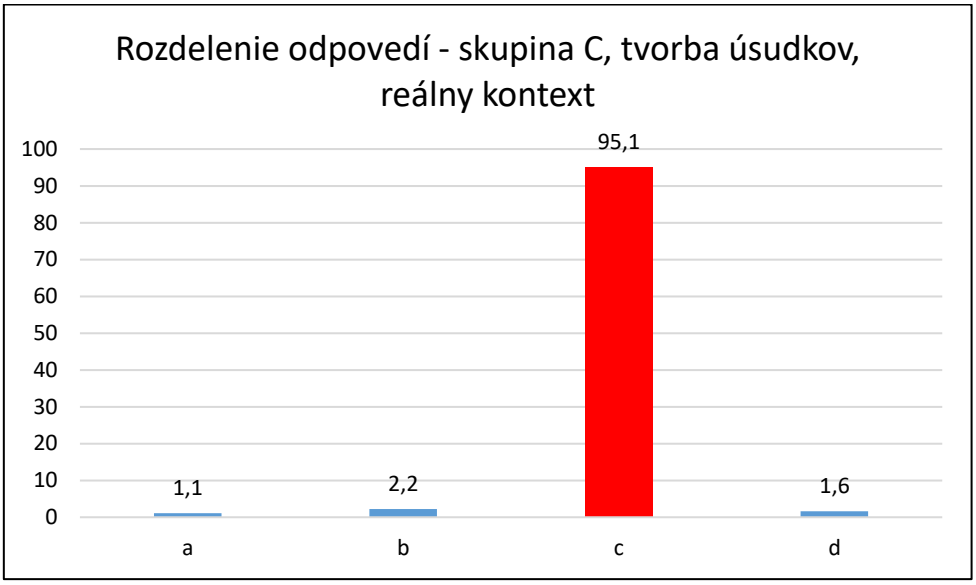
Hodnotenie	1	2	3	4	5
Rozdelenie odpovedí (%)	22,8	23,9	37,0	8,2	8,2

Podľa rozdelenia odpovedí, zistíme, že obťažnosť úlohy hodnotilo až 46,7 % študentov ako "veľmi ľahkú" alebo "ľahkú". Porovnávajúc úspešnosť respondentov v riešení tejto úlohy (69,4 %) a hodnotenie obťažnosti úlohy pozorujeme o 22,7 % vyššiu percentuálnu úspešnosť respondentov od hodnotenia obťažnosti úlohy. Rozdiel vo výsledkoch môže byť spôsobený tým, že na prvý pohľad sa mohla zdať táto úloha náročná, keďže v nej študenti museli vyvodiť záver na základe pomeru medzi dvoma fyzikálnymi veličinami.

Reálny kontext: Každý matematik má rád psy a mačky. Tomáš je matematik. Ktorý záver je na základe týchto tvrdení správny?

a) Tomáš má rád mačky, ale psy nie.
b) Tomáš má rád iba psy.
c) Tomáš má rád aj psy aj mačky.
d) Tomáš nemá rád ani mačky ani psy.

V prípade skupiny úloh C úlohu s reálnym kontextom riešilo správne 95,1 % študentov. Na obrázku 6 vidíme rozdelenie odpovedí.



Obrázok 6: Pomer odpovedí na jednotlivé riešenia – tvorba úsudkov, reálny kontext

V Tabuľke 6 sa nachádza hodnotenie obťažnosti úlohy respondentmi (od 1 - "veľmi ľahká úloha" až 5 - "veľmi ťažká úloha").

Tabuľka 6: Výsledky hodnotenia obťažnosti úlohy – tvorba úsudkov, reálny kontext

Hodnotenie	1	2	3	4	5
Rozdelenie odpovedí (%)	50.0	21.2	19.0	4.3	5.4

Podľa rozdelenia odpovedí, zistíme, že obťažnosť úlohy hodnotilo až 71,2 % študentov ako "veľmi ľahkú" alebo "ľahkú". Porovnávajúc úspešnosť respondentov v riešení úlohy (95,1 %) a hodnotenie obťažnosti úlohy, pozorujeme o 23,9 % vyššiu percentuálnu úspešnosť respondentov v porovnaní s hodnotením obťažnosti úlohy. Značný rozdiel mohlo zapríčiniť to, že tvorba úsudkov v tvare "ak platí A potom platí B", je často používaným logickým výrazom aj v prírodovednom myslení/uvažovaní, preto zrejme tieto úlohy zo skupiny C mali všeobecne vyššiu úspešnosť.

Záver

Vzhľadom na predmetový kontext, v dvoch oblastiach úloh výrokovej logiky (skupina úloh A a C) boli respondenti úspešnejší s kontextom z bežného života ako v prípade úloh s fyzikálnym kontextom, čo sme aj očakávali, veď základy výrokovej logiky v stredoškolskej matematike sa sprístupňujú prostredníctvom kontextových formulácií z bežného života. Teda pochopenie kvantifikátorov a použitie v bežnej reči ako aj správna formulácia úsudkov je u nich viac zaužívané, ako v prípade úloh s fyzikálnymi veličinami a pojmami.
Negáciou výrokov obsahujúcich kvantifikátory (skupiny úloh B) mali respondenti ťažkosti práve v prípade úlohy v kontexte bežného života. Nižšiu úspešnosť týchto úloh mohol zapríčiniť, že negácia výrokov obsahujúcich všeobecný a existenčný kvantifikátor, ako aj kvantifikátory s údajom o počte (každý prvok, práve n, aspoň n, najviac n prvkov) často

spôsobuje problémy študentom. Tieto pojmy nie sú pre nich jednoznačné, často v bežnom živote majú inú interpretáciu.
Výsledky hodnotenia študentov ukazujú, že pre nich najnáročnejšie boli úlohy orientované na negáciu elementárnych výrokov s kvantifikátormi (úlohy skupiny B), čo sa odzrkadľuje aj vo výsledkoch úspešnosti riešenia úloh tejto skupiny respondentmi.
Na základe získaných výsledkov v príprave budúcich pedagógov vzniká požiadavka implementovať kurz výrokovej logiky do učiteľského študijného programu a/alebo klásť dôraz na výchovu prírodovedných predmetov v rámci učiteľskej prípravy.

Poďakovanie:
Tento príspevok vznikol s finančnou podporou projektu KEGA č. 004UPJŠ-4/2020 „*Tvorba, implementácia a overovanie efektívnosti digitálnej knižnice s nástrojmi formatívneho hodnotenia pre prírodovedné predmety, matematiku a informatiku na základnej škole*" a VEGA č. 1/0663/19 „*Analýza prírodovedného a matematického vzdelávania na stredných školách a inovácia obsahu odborových didaktík*".

Literatura:

[1] Árki, Z., Berta, T., Jaruska, L.: The traditional evaluation and innovative assessment methods in the teaching of sciences and mathematics, *ICERI2021 Proceedings*, pp. 7101-7107. ISBN: 978-84-09-34549-6 ISSN: 2340-1095, 2021.

[2] Árki, Z., Berta, T., Nagy, M.: The role of evaluation and innovative tools in traditional and cooperative education in the teaching of sciences and mathematics. In *INTED2021 Proceedings*, Edited by: L. Gómez Chova, G. L., Martínez, L. A.,Torres, C.I, pp. 6770-6776. ISBN 978-84-09-27666-0, 2021. DOI: 10.21125/inted.2021.1347

[3] Ben-Ari, M.: *Mathematical Logic for Computer Science*. Springer, London, 2003.

[4] Cheng, D., Qi H., Li Z.: Propositional Logic. In: *Analysis and Control of Boolean Networks. Communications and Control Engineering*, Springer, London, 2011.

[5] Csapó, B., Szendrei, M.: Bevezetés. In B. &. Csapó, *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez* (s. 8-15). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 2011.

[6] Ennis, R. H.: Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research, *Educational researcher*, vol. 18, no. 3, pp. 4-10, 1989.

[7] Gahér, F.: *Logika pre každého*. IRIS, Bratislava, 2003.

[8] Jongsma, C.: Propositional Logic. In: *Introduction to Discrete Mathematics via Logic and Proof. Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2019.

[9] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2006

[10] Matušek, V.: Mathematical logics and development of competencies of students in technical study programmes. In: *The actual mathematical competences in the field of higher education in economic and technical fields of study*,: Slovenská poľnohospodárska univerzita, Nitra, 2013.

[11] McPeck, J. E.: Critical thinking and subject specificity: A reply to Ennis., *Educational researcher*, vol. 19, no. 4, pp. 10-12, 1990

[12] Pásztorné Varga, K., Várterész M.: *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*, Panem Könyvkiadó Kft., Budapest, 2003.

[13] Piaget, J., Inhelder, B.: *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig- A formális műveleti struktúrák kialakulása*. (K. Á., Prekl.) Budapest: Akadémiai Kiadó, 1984.

[14] Wiliam. D.: *Principled curriculum design*. SSAT (The Schools Network) Ltd. 2013.

Ladislav Jaruska, Zoltán Fehér,
Katedra matematiky
Fakulta ekonómie a informatiky
Univerzita J. Selyeho
Ul. Hradná 21, 945 01 Komárno, SR
feherz@ujs.sk, jaruskal@ujs.sk

Katarína Szarka
Katedra chémie
Pedagogická fakulta
Univerzita J. Selyeho
Bratislavská cesta 3322, 945 01 Komárno, SR
szarkak@ujs.sk

Eva Tóthová Tarová
Katedra biológie
Pedagogická fakulta
Univerzita J. Selyeho
Bratislavská cesta 3322, 945 01 Komárno, SR
tothovatarovae@ujs.sk

STAV INOVACÍ VE VÝUCE MATEMATIKY NA JIHOČESKÝCH STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Marek Kobera

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Abstrakt: Cílem příspěvku je analýza prevalence používání klasických a inovativních didaktických prostředků současných učitelů matematiky SŠ v Jihočeském kraji. V rámci stanoveného cíle byl proveden sběr dat mezi všemi středoškolskými učiteli matematiky v kraji. Bylo analyzováno používání inovativních prostředků, DGS, CAS, Internetových zdrojů, zvláště těch, jež doporučuje MŠMT. Řadu nástrojů, které žáci využívají, učitelé ani neznají. Učitelé byli i dotazováni na vhodnost badatelsky orientované, obrácené třídy či frontální výuky.

Klíčová slova: Inovace ve výuce matematiky, střední školy, Jihočeský kraj, didaktické prostředky a technika, výukové metody, badatelsky orientovaná výuka, frontální vyučování, obrácená třída, software dynamické geometrie (DGS), software počítačové algebry (CAS), internetové zdroje pro učení matematiky, e-learning, MOOC, 3D tisk, virtuální realita (VR), robot, vizualizér, hlasovací zařízení, elektronická učebnice, výuková hra, mobilní telefon.

The current state of innovations in mathematics instruction at the upper secondary schools in South Bohemia

Abstract: The aim of this contribution is to analyse the prevalence of using both classical and innovative didactic tools of the current in-service mathematics teachers at the upper secondary schools in the region of South Bohemia. As part of the stated objective, data collection was conducted among all secondary school mathematics teachers in the region. The use of innovative resources, DGS, CAS, Internet resources, especially those recommended by the Ministry of Education were analyzed. Many of the tools used by the students are not even known by the teachers. Teachers were also questioned about the suitability of inquiry-based, flipped classroom or frontal teaching.

Keywords: Innovations in mathematics education, upper secondary schools, didactic tools, and technics, teaching methods, inquiry-based learning and teaching, frontal instruction, flipped classroom, dynamic geometry software (DGS), computer algebra software (CAS), Internet sources for learning mathematics, e-learning, MOOC, 3D printing, virtual reality (VR), robot, visualiser, voting device, electronic textbook, educational (smart) game, cellular phone.

Úvod

Výuka matematiky představuje v současné školské praxi českých škol značný problém. Víme např., že *56* % žáků ZŠ nemá matematiku rádo. Tato práce se nesnaží analyzovat celý tento problém, ale soustředí se na inovativní nástroje, které jednotliví učitelé používají v praxi, aby svou výuku matematiky lépe přizpůsobili tušeným potřebám nebo požadavkům žáků, kteří se už narodili v *21*. století, a používají nové nástroje v jiných oblastech svých životů. Autoru není známa podobná studie zaměřená na učitele v našich podmínkách. Práce používá dotazníkové šetření s nabídkou řízeného rozhovoru pro případ, že by dotazník nestačil pro vyjádření všech nuancí, které by respondenti rádi autorovi sdělili.

Tato práce se zabývá oblastí ležící v průsečíku dvou následujících oblastí: didaktiky matematiky a didaktických prostředků v procesu vyučování neboli technologie vzdělávání. Představuje výsledky dotazníkového šetření, provedeného mezi všemi učiteli matematiky středních škol v Jihočeském kraji, vyjma autora závěrečné práce. Výsledky jsou podrobeny částečné statistické analýze. Tento druh výzkumu není primárně zaměřen na postoje učitelů nebo učitelovo pojetí výuky, ale na prosté konstatování, jaké nástroje se ve výuce používají, které učební systémy a metody učitelé preferují, a tak představuje jakési shrnutí stavu inovací ke konci roku *2020*. Může představovat vhodný výchozí bod pro další podrobnější šetření, které by ukázalo, jak a kdy učitelé používají jednotlivé nástroje a jak je to vnímáno a přijímáno jejich žáky.

1 Východiska výzkumu

V uplynulých letech na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity (PF JU) probíhal projekt IPUP – Inovace přípravy učitelů pro praxi, s registračním číslem reg. č.: CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_038/0006960, jehož účelem bylo lépe připravovat budoucí učitele na výkon svých učitelských povolání. V rámci jedné aktivity tohoto projektu jsem působil v letech 2019–2020 jakožto koordinátor katedry matematiky. Projekt byl podpořen z Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy. Jeho specifické cíle byly:

- Podpora, inovace a rozvoj všech typů pedagogických praxí na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity
- Zvýšení kvality pregraduální přípravy budoucích učitelů
- Posílení profesní orientace budoucích učitelů na praxi
- Zvýšení motivace budoucích učitelů k výkonu učitelské profese

Je jistě pravdou, že v rámci rozličných praxí, které v současnosti procházejí reformou, se studenti fakulty i její vyučující setkávají se školskou praxí. Nicméně se setkávají s nereprezentativním vzorkem „smluvních“ učitelů, kteří podle garantů praxí matematice rozumějí a vyučují ji dobře. To ovšem neznamená, že ji vyučují inovativně. Proto byl můj zájem v roce *2019*, když jsem se stal koordinátorem, jestli bychom se mohli setkávat s učiteli, kteří do své výuky matematiky integrují inovativní prvky, a poskytují tak „dobrou praxi“, oprávněný. Avšak v projektu IPUP nebyla plánována žádná aktivita, která by zahrnula cestování na místa působení takových učitelů, ani jsem osobně žádné takové neznal. Z časových důvodů jsem se

dostal k realizaci šetření až v prosinci roku *2020*. Bylo to v období pandemie COVID-19, nicméně jsem učitele požádal, aby do svých odpovědí nezahrnovali zkušenosti s distanční výukou, neboť jsem chtěl poznat běžný, nikoli mimořádný, stav výuky.

Plán výzkumu jsem se rozhodl realizovat ve třech krocích:

1. Zjistit stav používání inovací ve výuce matematiky dotazníkovým šetřením.
2. Polostrukturovanými rozhovory určit, jakým způsobem konkrétně se inovace využívají, jaké zkušenosti a postoje k nim mají učitelé, případně jejich žáci.
3. Spolupracovat na zjišťování efektivity jednotlivého používání inovací výzkumem mezi pedagogickou fakultou a některými SŠ a ZŠ.

Konečným cílem tedy bylo přispět k didaktice matematiky tvorbou jistého vademeca, jak s jednotlivými inovativními nástroji zacházet, aby z toho měli žáci největší (dlouhodobý) prospěch. To by se dalo využívat při přípravě budoucích pedagogů na pedagogických fakultách.

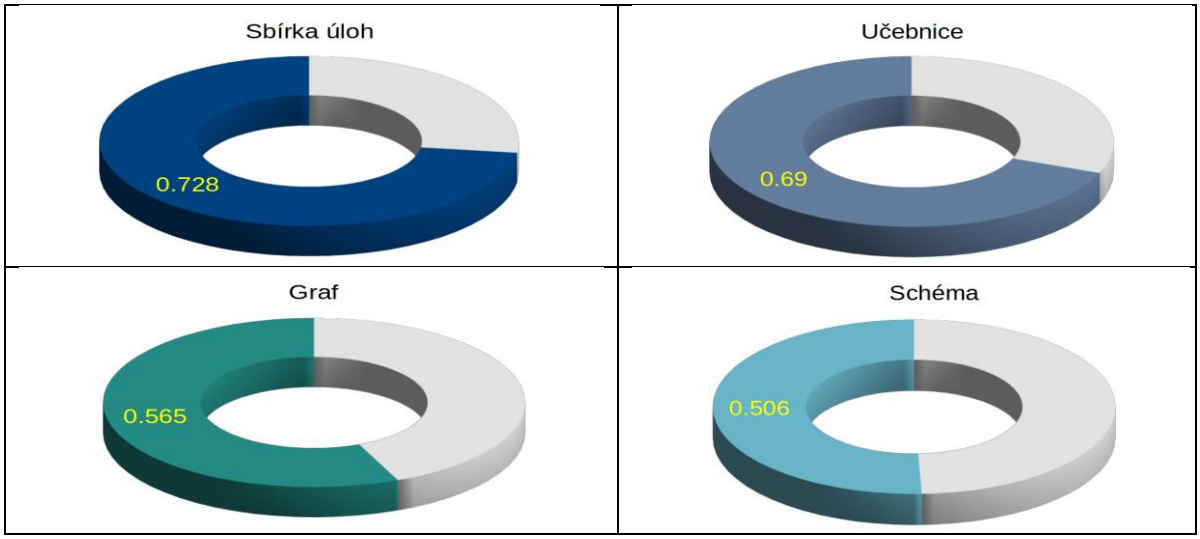
2 Výsledky výzkumu

Protože dotazník byl internetový, obsahoval celkem *14* otázek, bylo osloveno celkem přes *300* pedagogů z *90* jihočeských středních škol, tak pro účely prezentace bylo nutné přistoupit k jistému zjednodušení, totiž převedení používaných Likertových škál na numerickou veličinu a na její průměrování, byť si je autor vědom nedostatků takového postupu z pohledu statistiky ordinálních či nominálních statistických znaků.

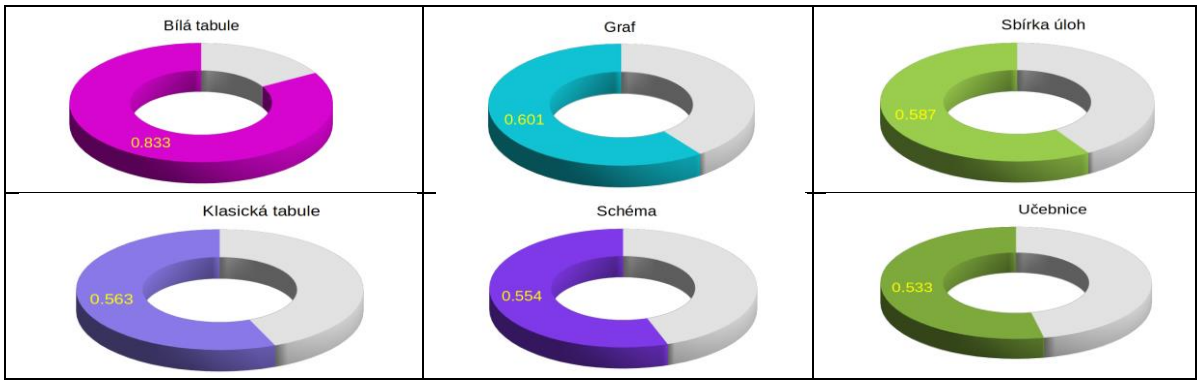
Konkrétně zde přiřazujeme odpovědi „vůbec“ váhu *0,0*, odpovědi „zřídka“ váhu *0,25*, odpovědi „někdy“ váhu *0,5*, odpovědi „často“ váhu *0,75* a odpovědi „velmi často“ váhu *1,0*. Musíme si zvolit nějakou skalarizovanou hodnotu, kterou budeme považovat za již nevýznamnou z hlediska praxe učitelské práce. Tato hodnota je do jisté míry libovolná a volíme ji jakožto vážený průměr ***0,375***, tedy aritmetický průměr mezi hodnotami „zřídka“ a „někdy“. Za statisticky významný považujeme takový prostředek, jehož používání statisticky významně překročí onu uvedenou hladinu.

Návratnost dotazníku činila asi ***14 %***, dá se považovat za objektivní, validní (s námitkami jistých nejasností, co je míněno termíny „hry“ a „grafy“) a jen do jisté míry reliabilní, jelikož neznáme přesné charakteristiky základního souboru všech středoškolských jihočeských učitelů matematiky. Při analýze výsledků dotazníku je na první pohled nápadná malá účast učitelů matematiky z Jindřichohradecka, naopak nadreprezentováni jsou učitelé z okresu Prachatice a také České Budějovice, což se v druhém případě dalo čekat. Učitelé praktických škol se nezúčastnili šetření vůbec. Obecně se dá také očekávat, že samotná ochota odpovídat na dotazník o inovacích vedla ke zkreslení, tedy, že učitelé, kteří inovace téměř nepoužívají nebo dokonce zavrhují, se šetření nezúčastnili. Proto považujeme zde dále uvedené prevalence za horní odhady.

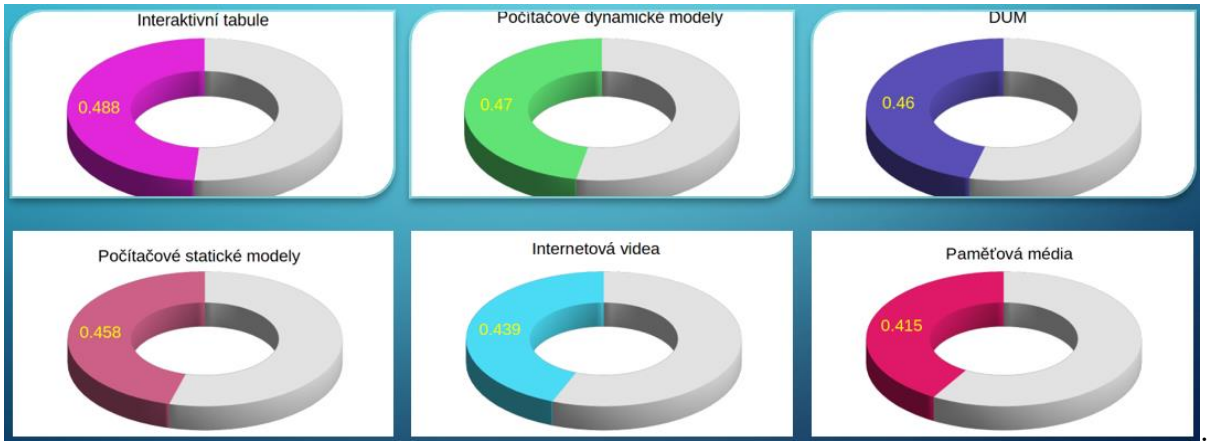
Mimo samotnou vyučovací hodinu „průměrný“ učitel významně často používá následující prostředky



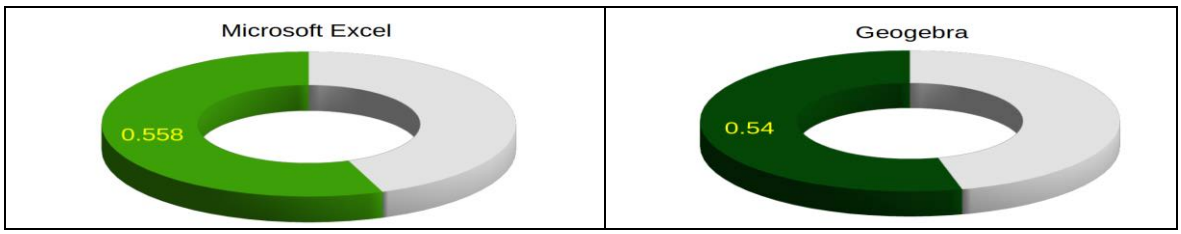
V samotné vyučovací hodině „průměrný“ učitel významně často používá následující **klasické** didaktické prostředky



V samotné vyučovací hodině „průměrný“ učitel významně často používá z **nových** didaktických prostředků pouze **dataprojektor (0,575)**, nejvýznamnější nevýznamné jsou

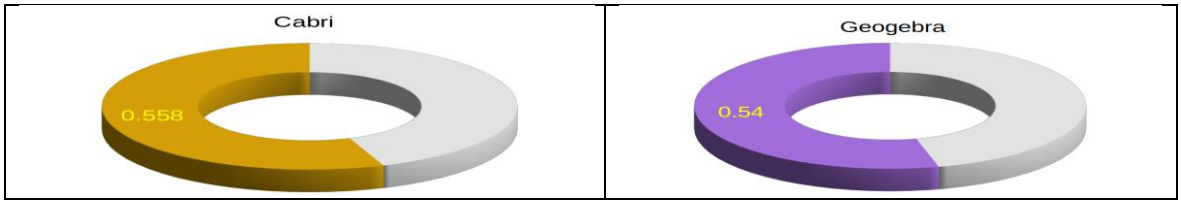


Mezi **nástroji na tvorbu grafů** naprosto dominují

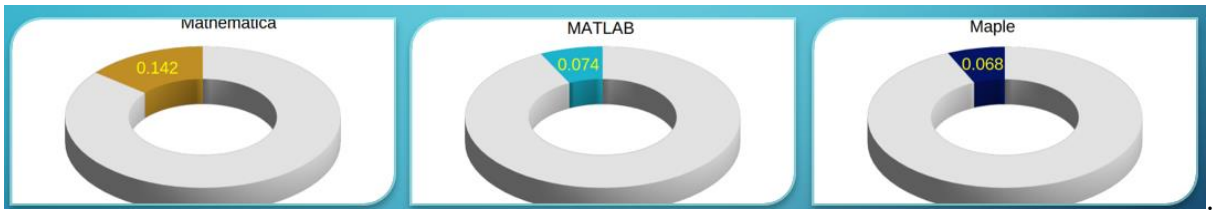


ostatní propadly (Google Documents*: 0,186*; LibreOffice Calc *0,175*; Casio grafický kalkulátor *0,144*; Desmos *0,045* aj.).

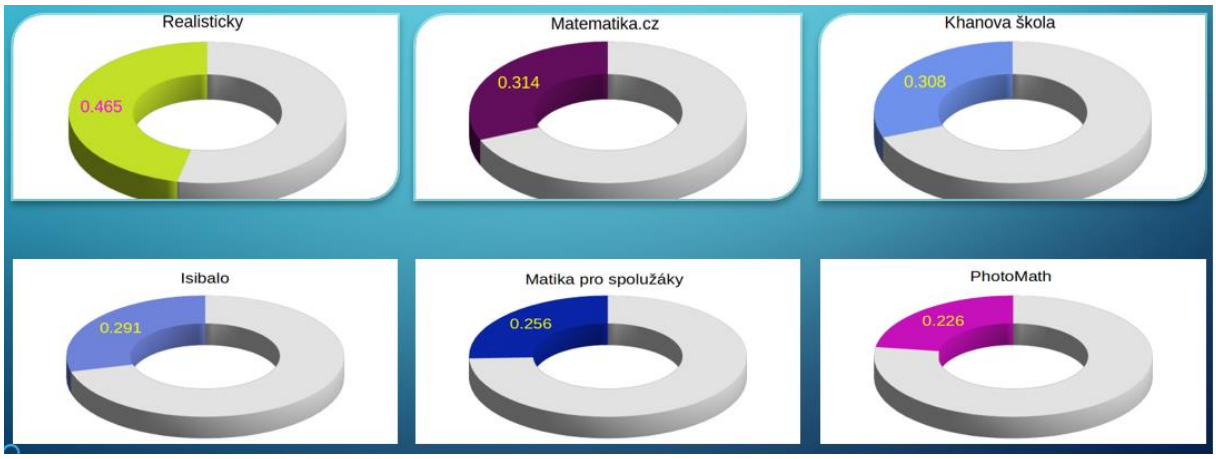
Dynamická geometrie (DGS) je v hodinách nejčastěji reprezentována nástroji



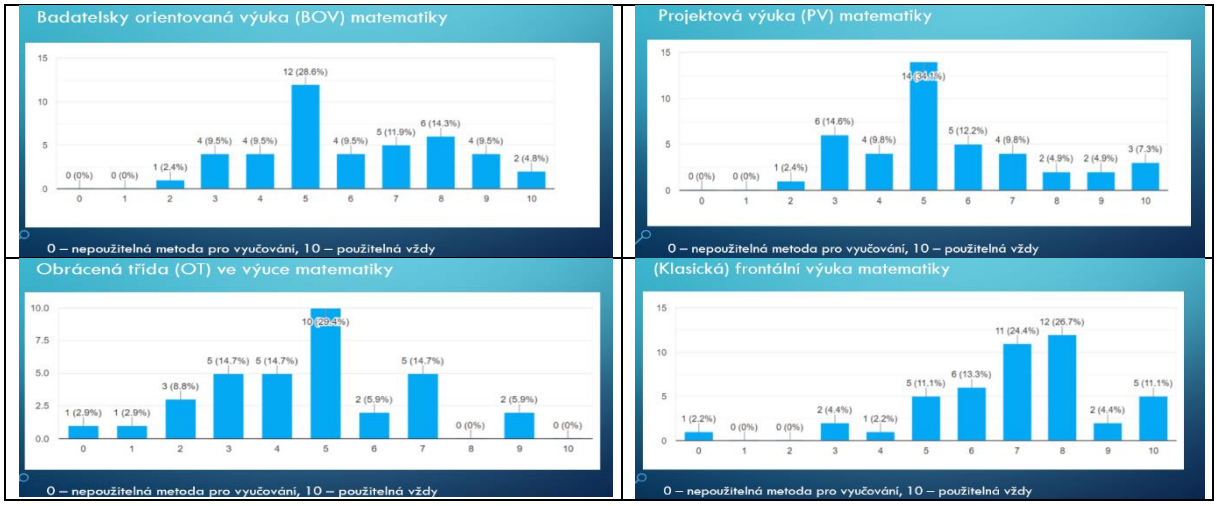
a **počítačová algebra** (CAS), **Internetové a mobilní aplikace a zdroje** ani **jiné počítačové programy** nevykázaly významné používání. K nevýznamným patří



.



Podle vnímané použitelnosti ve výuce jsme též srovnávali vybrané výukové metody: badatelsky orientovanou výuku, projektovou výuku, obrácenou třídu a frontální výuku s těmito výsledky:



Používání různých dalších nástrojů je vyloženě nízké: 3D tisk (*0,025*), virtuální realita (*0,031*), robot (*0,037*), vizualizér (*0,079*), hlasovací zařízení (*0,094*), el. učebnice (*0,244*), výuková hra (*0,335*), mobilní telefon (*0,372*). Photomath nezná *12 %*, Maple *24 %* a Desmos až *33 %* učitelů.

3 Analýza výzkumu

Prezentujeme jen předběžné výsledky analýzy dat. Jak znaménkový ($p = 0,022$), tak i spárovaný t-test ($p = 0,047$) potvrdily, že pedagogové *preferují frontální výuku před badatelsky orientovanou výukou*.

Méně zkušení pedagogové (do *15* let praxe) *používají počítače při výuce matematiky významně více* (jednostranný nepárový t-test se stupni volnosti Welch-Satterwaithovou rovnicí dává $p = 0,014$ a Pearsonův korelační koeficient udává korelaci skóre *-0,363* s věkem).

Závěr: Cílem příspěvku je analýza prevalence používání klasických a inovativních didaktických prostředků současných učitelů matematiky SŠ v Jihočeském kraji. Z inovativních prostředků se nejvíce využívají bílé tabule, dataprojektory (nad 50 %), pro DGS Cabri a Geogebra, z CAS jen velmi okrajově Mathematica, MATLAB a Maple. Z Internetových zdrojů se používá zřídkakdy nejvíce Realisticky.cz, ale řadu nástrojů, které žáci využívají, jako Photomath a Mathway, učitelé ani neznají. Navíc učitelé v průměru považují frontální výuku za vhodnější než badatelsky orientované, či projektové vyučování nebo model obrácené třídy. Míra používání počítačů při výuce negativně koreluje s věkem učitele.

Plánované fáze 2 a fáze 3 výzkumu se neuskutečnily kvůli nezájmu učitelů (pouze jeden měl zájem, na email pak již však nereagoval).

Zobecňování výsledků výzkumu na jiné regiony nebo stupně škol může být poněkud ošemetné, poněvadž např. víme, že v Jihočeském kraji se někdy ve výuce ICT technika používá podprůměrně (viz [*1*], s. *87*), a tak by bylo zajímavé zmapovat podobně i jiné kraje, stupně škol, případně předměty, které však mají odlišné oborové didaktiky, jež mohou nabízet jiné možnosti inovací.

Je též zřejmé, že pokud učitel ve výuce nepoužívá inovace, stále ještě nemusí učit špatně, nicméně je škoda, že nevyužívá možností podporující celý edukační proces, od motivace po evaluace, zvláště pak názornost. V tom smyslu se výsledky nedají hodnotit jinak než jako slabé a anticipovaná spolupráce mezi „učiteli z praxe“ a „oborovými didaktiky na VŠ“, která má být základem reformy přípravy učitelů (srv. [*2*]) je *téměř iluzorní*.

Literatura:

[1] LEBEDA, T a kol.: *Sekundární analýza PISA 2018*, *well being* ... ČŠI, 2021, <https://www.csicr.cz/html/2021/Sekundarni_analyza_PISA_2018/html5/index.html?&locale=CSY&pn=89>.

[2] *Příloha memoranda o podpoře reformy přípravy učitelů a učitelek v České republice*, dostupné na https://www.msmt.cz/file/56253_1_1/, dne 15. 2. 2022.

Marek Kobera
Katedra matematiky Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích
Jeronýmova 10, CZ-37115 České Budějovice, Česká republika

3D TISK A JEHO UPLATNĚNÍ NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Leni Lvovská, Kamil Malinka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt: V příspěvku jsou prezentovány některé z dosavadních výsledků projektu, jehož cílem je využití potenciálu 3D tisku ke zvýšení kvality vzdělávacího procesu a dále pak ke zvýšení úrovně edukace učitelů a žáků v této oblasti. Těžiště našeho příspěvku je v ukázkách konkrétních lekcí z matematiky, ale celý projekt zahrnuje i lekce z dalších oborů – zejména geografie, biologie a technické výchovy. Projekt je spolufinancován se státní podporou Technologické agentury ČR v rámci Programu ÉTA.

Klíčová slova: digitální kompetence, 3D tisk, modely v matematice

3D Print in Schools

Abstract: The paper presents some of the results of the project, which aims to use the potential of 3D printing to increase the quality of the educational process and then to increase the level of education of teachers as well as the students in this area. The focus of the paper is on examples of specific lessons in mathematics, but the whole project also includes lessons from other fields – especially geography, biology, and technical education. The project is co-funded with the state support of the Technology Agency of the Czech Republic within the ÉTA Program.

Key words: digital competence, 3D printing, models in mathematics

Úvod

3D tisk je nová a stále se rozvíjející oblast technologie, která si pomalu ale jistě hledá svoji cestu do školství. Implementace 3D technologií do výuky na ZŠ a SŠ umožňuje tvorbu zcela nových typů výukových pomůcek a zvyšuje dostupnost výukových modelů pro žáky a studenty. Studenti tak mohou nejenom s výukovými modely pracovat v hodinách, ale díky metodickým oporám se také mohou aktivně podílet na jejich vytváření.

3D tisk nabízí obrovský pedagogický potenciál, který není v současné době možné využít primárně z důvodu absence dostupných kvalitních metodických materiálů. Záměrem našeho projektu je snaha tento problém pomoci řešit. A to vytvořením kvalitního obsahu (již hotových lekcí s garantovanou edukativní přidanou hodnotu) a také vytvoření metodiky, jak uplatnit 3D

tisk na školách a jak jej efektivně zapojit do výuky. Projekt reprezentuje unikátní kombinaci, kdy technologická inovace jde ruku v ruce s inovací vzdělávacích metod tak, aby byl podpořen růst kvalifikovaných lidí, jejich kompetence a konkurenceschopnost. Společenským přínosem projektu bude podpora návratu Insta generace zpět k fyzickým objektům reálného světa.

V tomto článku se zaměřujeme primárně na obsah použitelný pro výuku matematiky.

1 3D tisk ve školách dnes

S vývojem technologie 3D tisku v posledních letech došlo k výraznému poklesu cen tiskáren a tím pádem i ke zvýšení dostupnosti této technologie. Tato technologická oblast otevírá nové možnosti v široké škále oborů od oblasti průmyslu, medicíny, architektury až po úroveň běžného domácího použití. V 3D technologii spatřujeme obrovský pedagogický potenciál, který není v současné době využit.

Náš projekt tak reaguje na aktuální dostupnost vysoce kvalitního 3D tisku a poptávku po metodické podpoře využití 3D tisku ve výuce a didakticky správných námětech pro výrobu výukových pomůcek (modelů) pro jednotlivé předměty na základních a středních školách.

Některé školy již potřebným vybavením disponují, nicméně je často nedokážou samy dobře využít. Úspěšné nasazení těchto technologií je v této fázi velmi často podmíněno existencí nadšeného učitele.

Výukové modely jsou pro většinu škol náročně dostupné, ať už z hlediska finančního nebo ještě častěji z hlediska specifických požadavků. Užití 3D modelů ve výuce má však řadu předností, patří k nim například prostorová vizualizace struktur, které jsou na reálných objektech pouhým okem těžko pozorovatelné nebo znázornění těžko dostupných přírodnin. Prostorová vizualizace objektů a jevů pomocí výukových modelů je ale bezesporu žádoucí a přínosná, navíc participace studentů na samotném procesu výroby modelů, kterou 3D tisk přístupným způsobem umožňuje, a práce s nimi přímo v hodinách, bude rozvíjet jejich další dovednosti.

Tento projekt naplňuje primárně aspekt propojení výzkumu technického a netechnického charakteru. Pro zajištění naplnění cílů projektu tak, aby bylo možné plnohodnotně využívat inovační potenciál technologie 3D tisku, je nutno propojit know-how oborů, které si k sobě obtížně hledají cestu. Pro úspěšnou implementaci 3D tisku do výuky tak, aby byl podporován rámcově vzdělávací program ve školách, je nutné propojit erudované znalosti oborové didaktiky s velmi dobrou doménovou znalostí dané technologie. Existuje široká škála různých typů tiskáren a používaných materiálů. Pro použití ve školství je potřeba zaručit zdravotní nezávadnost vybavení, vybrat zařízení, která umožňují dostatečně kvalitní tisk a splňují případné další parametry. Pro vlastní vytváření pomůcek je dále nutná znalost technologie výroby, např. tisk složitějších struktur vyžaduje specifické úpravy v 3D modelech. Obdobně je pak pro maximální využití potenciálu technologie nutné mít dostatečný vhled do metod a forem výuky, obsahu předmětů a praktické zkušenosti z výuky tak, aby navrhovaná metodologie, pomůcky a postupy byly didakticky správně vytvořeny a reflektovaly aktuální potřeby škol.

Podle dostupných studií [1] se školy setkávají se třemi základními problémy při implementaci 3D tisku do výuky:

- správa a řízení přístupu k tiskárně,
- řízení nákladů a obhajoba návratnosti investice,

- začlenění projektů 3D tisku do učebních osnov (nedostatek výukových materiálů, nedostatek technických znalostí, nesnadný přístup k tiskárně).

Pokud se školám podaří překonat úvodní nesnáze a pořídit tiskárnu, nadále naráží na problémy s nedostatkem kvalitního obsahu. Snaze o jeho vytvoření se věnuje více projektů, které jsou obvykle spjaté s výrobcem 3D tiskáren, kteří se tímto snaží podpořit prodej:

- The PrintLab - https://weareprintlab.com/
- MakerBot's Thingiverse - https://www.thingiverse.com/
- 3D Printers for School and Education | MakerBot (https://www.makerbot.com/education/
- The Create Education Project portal - Most links are redirected to a specific model on Thingiverse - https://www.createeducation.com/
- YSOFT Be3D Academy - https://be3dacademy.ysoft.com/en/

Velikost volně přístupných databází 3D modelů se tak neustále rychle rozšiřuje, ale jen malá část z nich má významnější didaktický potenciál.

Jejich zaměření je také převážně na technické aspekty (pouze pro výuku základů 3D modelování a tisku) a vyšší ročníky. Webové stránky fungují spíše jako rozcestník pro předem vybrané modely, takže chybí podpora pro učitele a studenty. Kvalita je obecně dobrá, ale společnosti nemají prostor ani pedagogické zkušenosti pro výrazné úpravy materiálů, které by zohledňovaly vzdělávací programy a jejich specifika v jednotlivých zemích (v ČR RVP).

Problémem je pak i dodatečná časová zátěž pro učitele: musí najít vhodný model, ověřit, zda je tisk dostatečně kvalitní, zkontrolovat, zda odpovídá jeho představám, připravit výukové materiály, zvážit, jak vše efektivně začlenit do výuky.

I když učitelé aktivně využívají dostupné hotové výukové materiály, např. přes portály komerčních prodejců 3D tiskáren jako je Be3D Academy [8], stále se setkávají s těmito obecnými problémy:

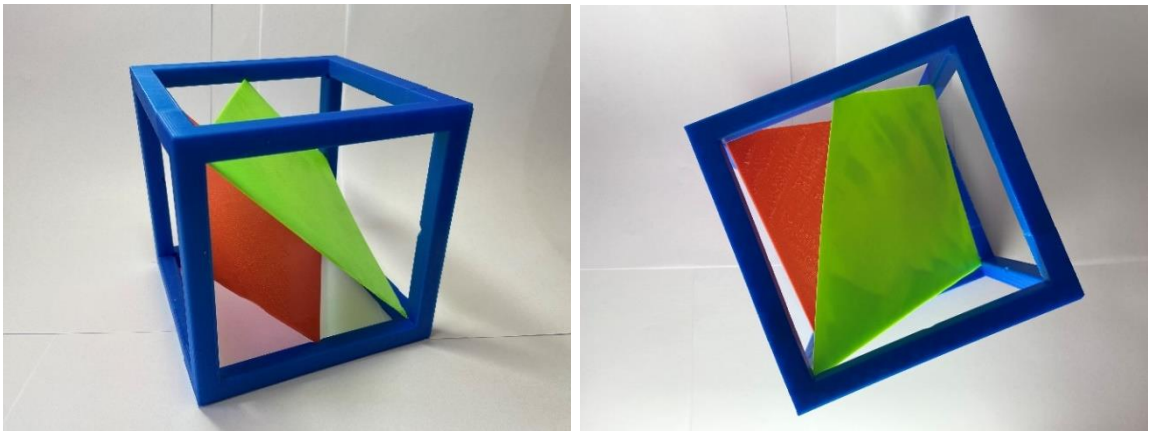
- nízká korespondence existujících materiálů přímo s RVP (existující materiály mají spíše charakter „zajímavostí navíc“),
- nedostatek širšího souboru výukových materiálů,
- nedostatečné znalosti učitelů často vedoucí k rozhodnutí nekupovat vybavení,
- problém s definicí celkového přínosu začlenění 3D tisku do výuky.

Tyto problémy se snažíme reflektovat při řešení našeho projektu. Naše hlavní myšlenka byla využití koncepčního přístupu, který v takto rané fázi zavádění technologií může výrazně zefektivnit celý proces její integrace do výuky. Poskytnutí veřejně přístupných materiálů umožní mimo jiné efektivní nakládání s prostředky, kdy výsledky jsou znovupoužitelné komunitou bez nutnosti investovat čas do vývoje něčeho, co již existuje.

Na základě praktických zkušeností firmy YSoft s již existujícími lekcemi a zpětné vazby od učitelů ze zapojených škol [7], vznikla poptávka po cílenějším propojením obsahu lekcí s rámcovým vzdělávacím programem a také přirozeně vznikla potřeba komplexního metodického materiálu, který by usnadnil začlenění 3D tisku do výuky i učitelům, kteří s touto technologií začínají. Tvorba lekcí obsahově propojených s RVP i tvorba metodiky se tak staly hlavním cílem projektu.

Připravovaný “startovací balíček“ tak bude obsahovat veřejně dostupnou metodiku pro integraci 3D tisku do oblasti vzdělávání a veřejně přístupné základní sady lekcí, šité na míru školám a připraveny k začlenění do výuky bez velkých časových nároků na učitele nebo nutných změn v koncepci výuky. Naší další ambicí je i využití potenciálu propojení více předmětů v jedné lekci, tj. lekce s větší mezipředmětovou vazbou.

V tomto článku prezentujeme již vytvořenou lekci, které se zaměřuje na oblast výuky matematiky, konkrétně stereometrie. Cílem je ukázat potenciál technologie na konkrétním vybraném tématu, efektivitu pomůcek „od učitelů pro učitele“, možnost zapojení žáků na různých úrovních a přirozenou podporu diferencované výuky.



Obrázek 1: Ukázka vytištěných 3D modelů k tématu stereometrie – řezy krychle

2 Matematické lekce

Be3D Academy je online kolekce lekcí 3D tisku usnadňujících učení v 3D. Plány lekcí 3D tisku tvoří projekty testované učiteli, které využívají 3D tisk k praktické výuce technických a kreativních předmětů. Registrace a používání je zdarma. Každý plán 3D lekce nabízí řadu různých materiálů včetně souborů 3D modelů, videí, pracovních listů pro studenty a prezentací pro vysvětlení projektu studentům.

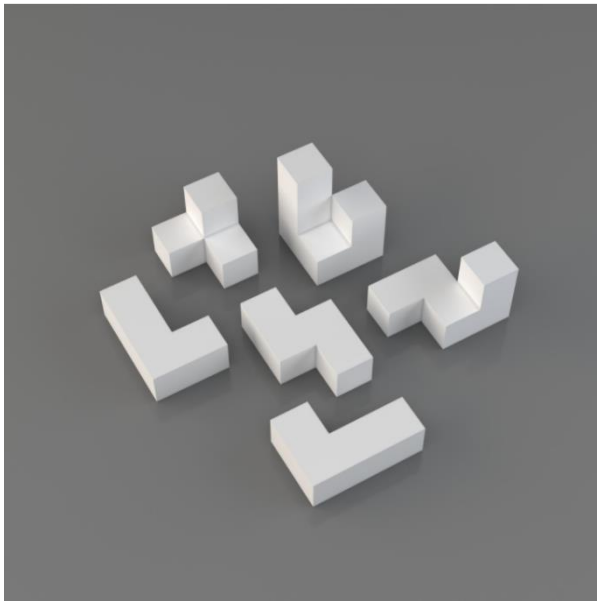
V rámci Be3d akademie lze najít starší lekce, které jsou doporučeny pro matematiku (viz 2.1). Obsahově však shledáváme, že se jedná spíš o lekce, které přinášejí nadstandardní nebo okrajová témata k učivu RVP. Často také chybí širší metodická podpora, pracovní listy, podpora diferencované výuky (různých levelů jedné lekce, které umožňují rozdělit třídu do skupin pracujících na různém stupni náročnosti, ale na společném tématu). Obzvláště pro matematiku, kde se znalosti, schopnosti i kapacita žáků liší v rámci jedné třídy často velmi výrazně je nabídka diferencované výuky vítaná. V kapitole 2.2 prezentujeme novou matematickou lekci, která vznikla v rámci projektu tak, aby reflektovala výše zmíněné problémy.

Ukázky všech lekcí Be3D Academy naleznete zde: https://be3dacademy.ysoft.com/cs/lekce-3d-tisku .

2.1 Ukázka starších lekcí

SOMA KOSTKA

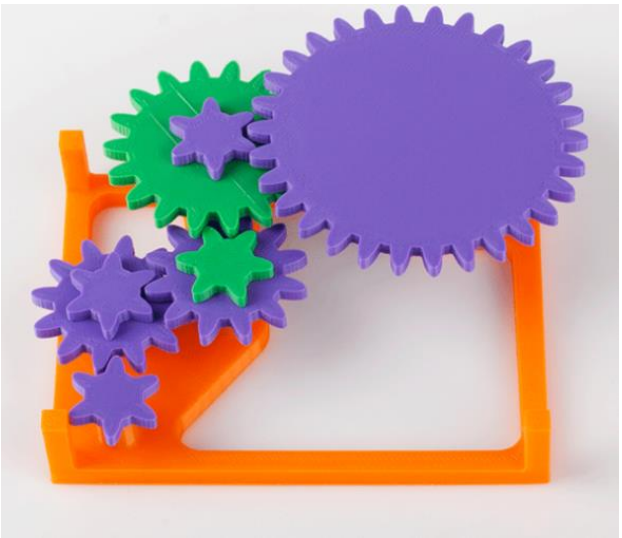
SOMA kostka je skládačka a hlavolam v jednom. Ve své tradiční podobě sestává z šesti nebo sedmi dílků různých geometrických tvarů. Cílem hlavolamu je jednotlivé dílky poskládat do kostky o rozměrech 3 x 3 x 3, anebo do jakéhokoliv jiného tvaru. V lekci se studenti nejprve podívají na různorodá řešení hlavolamu, a potom se pustí do navrhování a modelování vlastní SOMA kostky v TinkerCAD programu a následný 3D tisk modelu.



Obrázek 2: Ukázka 3D modelů k lekci SOMA KOSTKA

OZUBENÁ KOLA

V první lekci se studenti budou učit o různých převodech a poměrech jednotek, navrhnou a vytisknou vlastní převodový systém. V druhé lekci použijí simulátor převodového systému, kde budou experimentovat s množstvím zubů v ozubeném kole, budou sledovat, jak se v souvislosti s tím mění rychlost otáček za minutu. Za pomoci simulátoru pak studenti navrhnou vlastní 3D převodový systém, jehož cílem bude snížit rychlost otáček v převodníku v poměru 60:1.



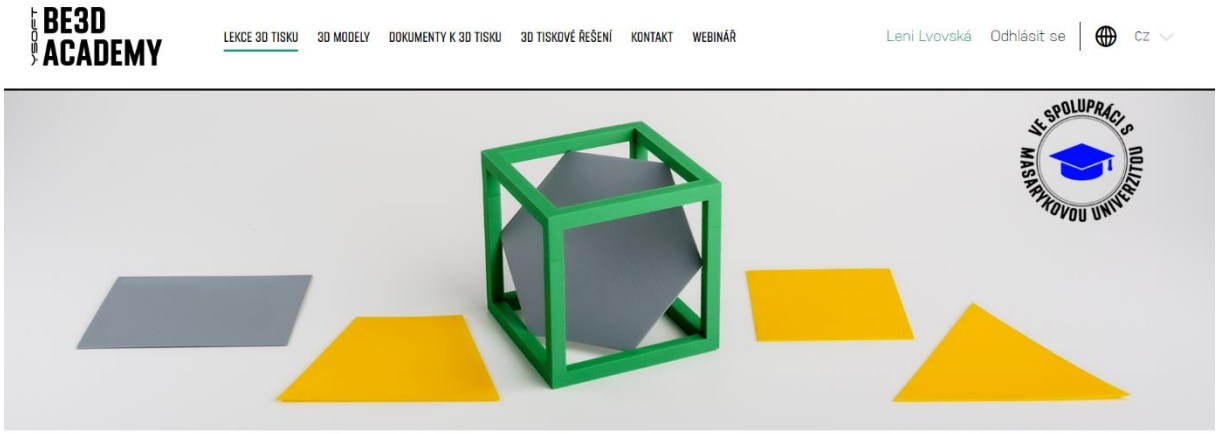
Obrázek 3: Ukázka k lekci OZUBENÁ KOLA

2.2 Ukázka nové lekce vytvořené v rámci projektu

V nově vytvořených lekcích se zaměřujeme na konkrétní témata z RVP (viz [3], [4]). Podklady pro každou lekci obsahují videoukázky, s jejichž pomocí se učitel rychle seznámí s tím, co mu lekce nabízí. Celá lekce se zpravidla skládá z těchto částí:

- Plán lekce
- Pokyny pro 3D tisk
- Cíle výuky
- Ukázkové 3D modely mnohoúhelníků a krychle
- Pracovní list
- Návod
- Prezentace
- 3D modely

Učitel se tak může rozhodnout, jestli modely sám vytiskne nebo nechá žáky modely tvořit (částečně či úplně). U většiny lekcí lze také velmi snadno na základě předkládaného příkladu tvořit modely další. Tyto aspekty si ukážeme na příkladu lekce ze stereometrie.



STEREOMETRIE

STÁHNOUT ZDROJE LEKCE
ZIP 6194 KB

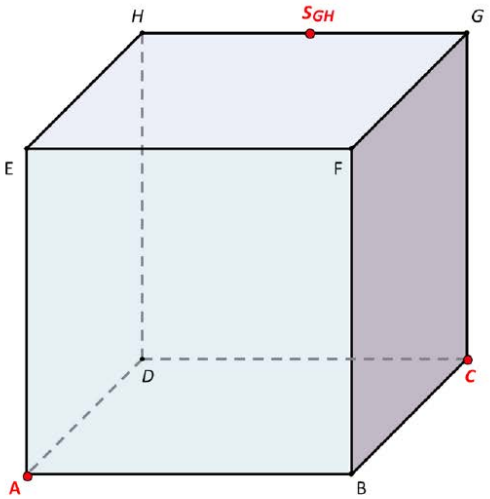
Stereometrie je obor matematiky zabývající se studiem trojrozměrných těles a vztahů mezi nimi. Jestliže rovina protíná krychli, výsledkem může být několik typů mnohoúhelníků. V této lekci se žáci naučí, jak zkonstruovat řez krychlí ve volném rovnoběžném promítání, poté vytvoří výsledný mnohoúhelník (řez krychlí) v CAD softwaru.

Cílem lekce je:

- Sestrojit řez na krychli ve volném rovnoběžném promítání
- Sestrojit mnohoúhelník řezu ve skutečné velikosti
- Ověřit výsledek na 3D modelu výběrem správného mnohoúhelníku
- Výsledek sestrojit v TinkerCAD® softwaru a vytisknout, ověřit v 3D modelu krychle

Lekce nabízí v prvním úrovni vytištění všech modelů – modelu krychle i modelů rovinných řezů na krychli – učitelem a následnou práci s těmito modely ve vztahu s pracovními listy. Už tento level je výraznou podporou výuky stereometrie. Učitel může nechat např. žáky pracovat se skutečnou velikostí řezu, která není v zobrazení na pracovním listě (ve volném rovnoběžném promítání) viditelná, může je nechat sestrojit různé pohledy na krychli s řezem, a to vše prezentovat pomocí modelu.

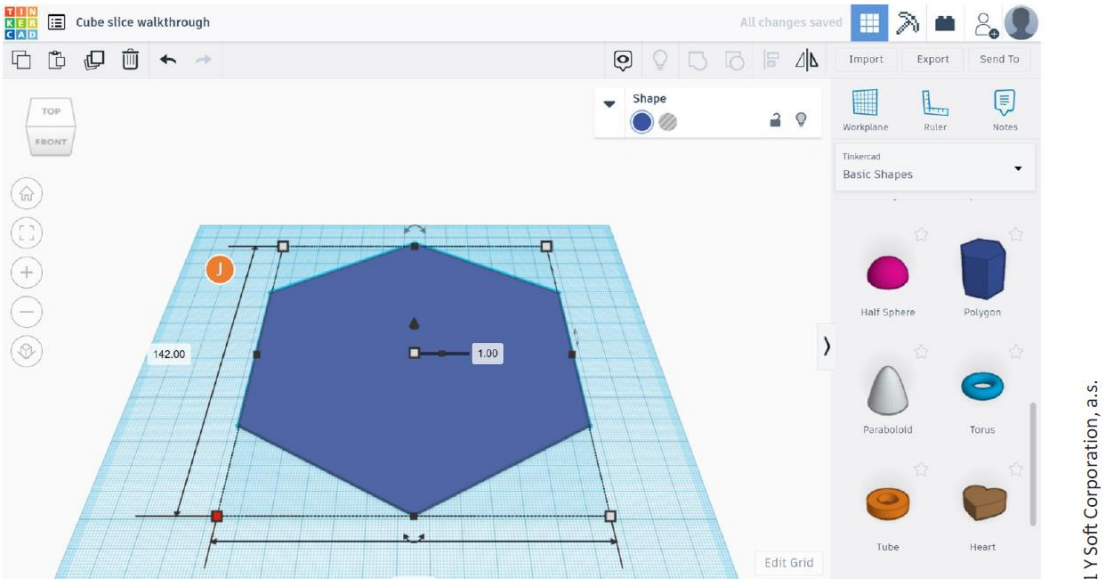
Zkonstruujte řez krychle ABCDEFGH pomocí roviny určené body A, C a S_{GH}.



Obrázek 4: Ukázka z pracovního listu STEREOMETRIE

Mnohem pokročilejší variantou je vyjít z pracovních listů, nechat žáky nejen konstruovat mnohoúhelníky, které tvoří řezy na krychli, ale také je nechat objevit skutečné velikosti těchto mnohoúhelníků a tyto geometrické útvary nakreslit v TinkerCADu a vytisknout na 3D tiskárně samostatně.

J. Nastavte výšku (tloušťku) na 1 mm a změňte délku a šířku mnohoúhelníku tak, aby odpovídala rozměrům vašeho dvourozměrného řezu.



Obrázek 5: Ukázka z návodu na vytváření modelu řezu v programu TinkerCAD

Mezi těmito variantami samozřejmě existuje řada mezistupňů, které právě přirozeně podporují diferencovanou výuku, kdy se například modelování v TinkerCADu věnují žáci s výbornou prostorovou představivostí, kterým konstrukce řezů nedělají problém, zatímco slabší žáci mohou již hotové modely využít k podpoře prostorového vidění a k úspěšnému sestrojení řezu v pracovním listě.

Celou lekci včetně videa lze nahlédnout a zdarma vyzkoušet zde:

https://be3dacademy.ysoft.com/cs/3d-lesson-plans/mu_stereometry

3 Metodika

Na závěr našeho příspěvku bychom ještě stručně představili připravovanou metodiku.

Metodika se rozděluje na dvě hlavní části. Obsahem technické části metodiky jsou informace především pro správce a provozovatele 3D tiskáren, jež jsou potřebné k efektivnímu zpřístupnění této technologie. Rovněž jsou zde uvedeny informace pro pedagogy, které popisují zásady běžného používání 3D tiskárny a jejího efektivního využití pro potřeby výuky.

Další důležitou oblastí je výuka a zakotvení 3D tisku v kurikulárních dokumentech. Zaměřujeme se na bariéry, možnosti 3D tisku a jeho implementaci do kurikula školy.

V poslední kapitole je zmíněna implementace 3D tisku do vybraných vzdělávacích oborů a popsány možnosti uplatnění této metodiky.

Metodika je koncipována tak, aby podpořila výuku ve vybraných předmětech, jako jsou biologie, geografie, matematika apod. Ukazuje zájemcům nejen příklady, jak s pomocí technologie 3D tisku vytvořit učební pomůcky a začlenit je do konkrétních výukových hodin, ale také předkládá učitelům možnosti, jak aktivně zapojit do tvorby 3D modelů samotné žáky.

4 Zpětná vazba z praxe

V současné době probíhá testování první třetiny vytvářených lekcí na školách a probíhá ověřování první verze metodiky. Dosavadní zpětná vazba od učitelů i studentů je velmi pozitivní. Studenti akcentují převážně zapojení praktického prvku od výuky. Naopak učitelé vyzdvihují, že lekce jsou názorné a nekladou nároky na další metodickou přípravu. Ve spolupráci se zapojenými školami připravujeme další témata. Pokud vás téma 3D tisku zaujalo, nabízíme uvedené odkazy a kontakty.

Literatura:

[1] MALINKA, Kamil a Vladimír SCHINDLER. Current Challenges in the Educational Usage of 3D Printing in Primary and Secondary Schools. In Theo Bastiaens. Proceedings of EdMedia + Innovate Learning. United States: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE), 2021. s. 88-96. ISBN 978-1-939797-56-8.

[2] Department for Education Uk, *3D printers in schools: uses in the curriculum. Enrichin g the teaching of STEM and design subjects* [online]. ©2013. [cit. 16.10.2021].

Dostupné z: https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/251439/3D_printers_in_schools.pdf

[3] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. [online]. Praha: MŠMT, 2021. 162 s. [cit. 14. 10. 2021]. Dostupné z <http://www.nuv.cz/file/4983_1_1/>.

[4] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. [online]. Praha: MŠMT, 2021. 102 s. [cit. 14. 10. 2021]. Dostupné z <https://revize.edu.cz/files/001-rvp-gym-vyznacene-zmeny.pdf>.

[5] HEISS Elke, Masary University Collaboration Yields First 4 3D Lessons. In https://www.ysoft.com/en/blog/2021/masaryk-university-collaboration-yields-first-4-3d

[6] 3D tisk jako nadějný studijní obor. Tisková zpráva z https://sciencemag.cz/3d-tisk-jako-nadejny-studijni-obor/

[7] BABIČOVÁ, Kristína. Zhodnocení produktové inovace a jejího vlivu na zahraniční obchod podniku [online]. Brno, 2020. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, Ústav ekonomiky. Vedoucí práce Nina Bočková. [cit. 2021-12-01]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/127371.

[8] Portál Be3D Academy, https://be3dacademy.ysoft.com/cs/

Mgr. Leni Lvovská, Ph.D.
KM PedF MU Brno
Poříčí 31
lvovska@ped.muni.cz

Mgr. Kamil Malinka, Ph.D.
Ústav výpočetní techniky MU
Šumavská 416/15
malinka@ics.muni.cz

DISTANČNÍ VÝUKA VYSOKOŠKOLSKÉ MATEMATIKY BADATELSKY?

Lukáš Másilko, Terézia Černá

Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky,
Masarykova univerzita

Abstrakt: Studenti matematiky se často učí procedurálním způsobem, a tak si netvoří hlubší konceptuální porozumění, díky němuž by své znalosti mohli později uplatnit v jiných oborech či využít v životě. Cílem mezinárodního projektu Platinum je ověřit, zda badatelsky orientované pojetí výuky a studia pomůže změnit tento trend týkající se i vysokoškolských studentů. V článku jsou popsány hlavní cíle a výstupy projektu Platinum a nabídnuty ukázky badatelsky orientovaných úkolů, které byly zařazeny během distanční formy výuky na Masarykově univerzitě.

Klíčová slova: badatelsky orientovaná výuka, matematika, univerzita, distanční výuka, distanční studium.

The Inquiry-based Distance Teaching of University Mathematics

Abstract: Students of mathematics often learn in a procedural way and thus do not develop in-depth conceptual understandings through which they can relate mathematics to other disciplines and the world around them. The aim of the international Platinum project is to verify whether an inquiry-based approach to teaching and learning will help to change this trend for university students. The article describes the main objectives and outcomes of the Platinum project and offers examples of inquiry-based tasks that have been included during distance courses at Masaryk University.

Key words: inquiry-based education, mathematics, university, distance teaching, distance learning.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 29 (2021), No. 1.
Dostupné z: `http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2021_Masilko_et_al.pdf`

VYUŽITÍ POČÍTAČE PRO ŽÁKY S TĚLESNÝM POSTIŽENÍM VE VÝUCE MATEMATIKY

Jiří Merta

Mateřská škola, Základní škola a Praktická škola při centru ARPIDA, o.p.s.

Abstrakt: Obsah je zaměřen na podporu žáků s tělesným postižením, kteří mohou využívat při výuce matematiky samostatně pouze tablet nebo počítač za podpory běžně dostupných programů. Jde zejména o ukázky jejich práce v platformě Teams a v programech interaktivní učebnice NNS, Whiteboard, Word. Využití předvedených postupů je možné v rámci prezenční i distanční výuce.

Klíčová slova: Interaktivní učebnice, matematika, NNS, podpora, tělesné postižení, Teams, Whiteboard, Word.

Use of computers for students with disabilities in mathematics teaching

Abstract: The content is aimed at supporting students with disabilities who can only use a tablet or computer to teach mathematics with the support of commonly available programs. These are mainly examples of their work in the Teams platform and in the programs of interactive textbooks NNS, Whiteboard, Word. The use of demonstrated procedures is possible in full-time and distance learning.

Key words: Interactive textbook, math, NNS, support, disability, Teams, Whiteboard, Word.

Úvod

Žáci s tělesným postižením, kteří se vzdělávají v běžných nebo speciálních školách, mohou využívat při výuce matematiky běžně dostupné platformy a výukové programy. Velká většina z těchto programů disponuje vstřícným prostředím a intuitivním ovládáním. Pro žáky, jejich rodiče a pedagogické pracovníky tak poskytují nejen oživení běžné výuky, ale také plnohodnotnou náhradu potřebných pomůcek, učebnic a sešitů, které nemohou žáci s postižením zejména horních končetin plně a samostatně využívat.

1 Platforma Teams a interaktivní učebnice

Společnost Nová škola, s.r.o. nabízí na svých internetových stránkách [4] zakoupení licencí elektronické verze učebnic pro různé vyučovací předměty v jednotlivých ročnících. Učebnice odpovídají tištěným verzím, proto žák, který využívá takovouto učebnici v elektronické verzi, může spolupracovat se spolužáky ve stejném ročníku, kteří disponují tištěnými učebnicemi.

Elektronické verze navíc disponují zajímavými rozšiřujícími aktivitami a úkoly. Žákům stačí pro práci v učebnici matematiky pouze notebook nebo stolní PC, v omezeném přístupu i mobilní telefon. Není tak nutná neustálá pomoc (nejčastěji asistenta pedagoga) s přesouváním pomůcek (pravítek, psacího náčiní) a učebních materiálů (učebnic, pracovních sešitů, školních sešitů, pracovních listů). Vše mají na jednom místě a jednotlivé činnosti provádějí pomocí touchpadu nebo myši a klávesnice, včetně rýsování za pomoci interaktivních rýsovacích pomůcek.

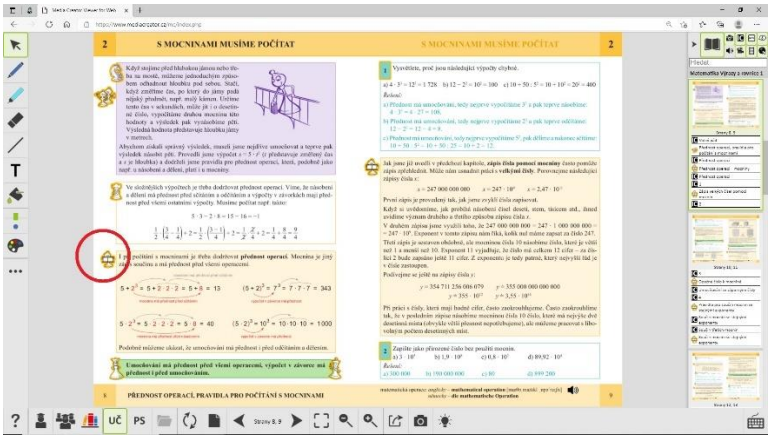
Strukturu zadávaných úloh i jejich vyhotovení lze shromažďovat na jednom místě například v aplikaci Microsoft Teams [1]. Ve vytvořených kanálech pro určitou skupinu žáků lze přehledně formou odkazů zadávat úlohy a aktivity žákům. Ti poté na stejné místo můžou vyhotovené úlohy ukládat například prostřednictvím výstřižků.

1.1 Základní nastavení a využití elektronických učebnic

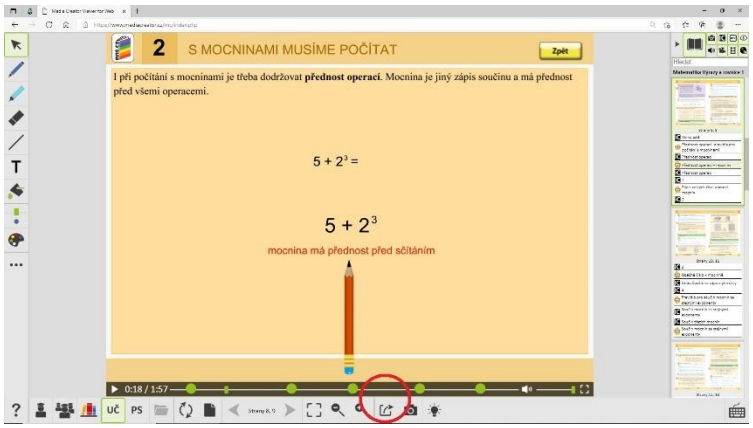
V následujícím obrazovém postupu je uvedena jedna z možností, jak zadávat žákům konkrétní úlohy nebo aktivity formou vkládaných odkazů, které žáci následně jednoduše otevřou.

Obrázek 1: Úvodní stránka s přihlášením; zdroj: https://www.mediacreator.cz/mc/index.php

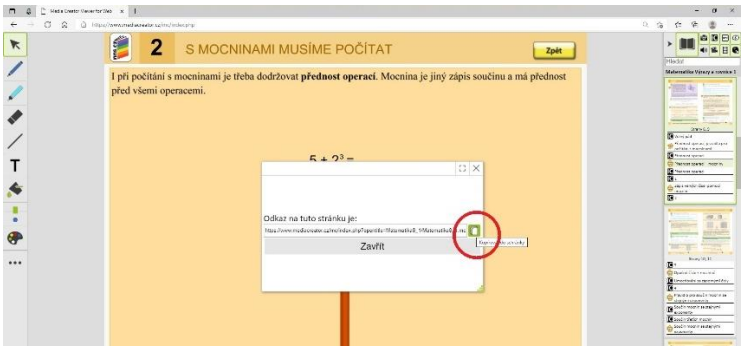
Obrázek 2: Úvodní stránka učebnice matematiky; zdroj: https://www.mediacreator.cz/mc/index.php



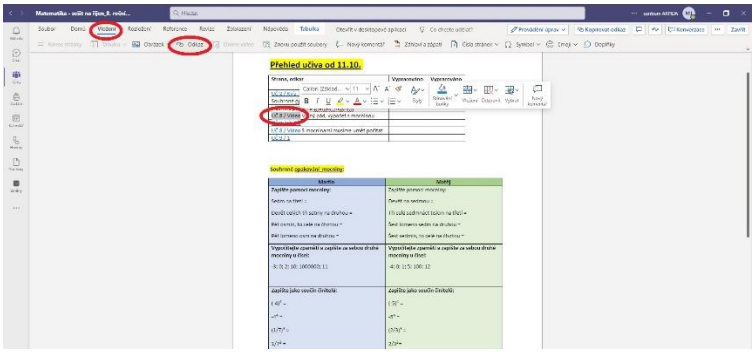
Obrázek 3: Vytvoření odkazu na vybranou aktivitu; zdroj: https://www.mediacreator.cz/mc/index.php



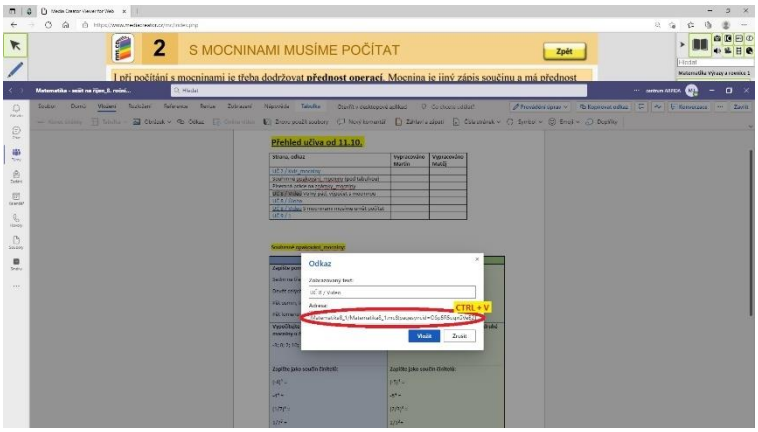
Obrázek 4: Vytvoření odkazu na vybranou aktivitu; zdroj: https://www.mediacreator.cz/mc/index.php



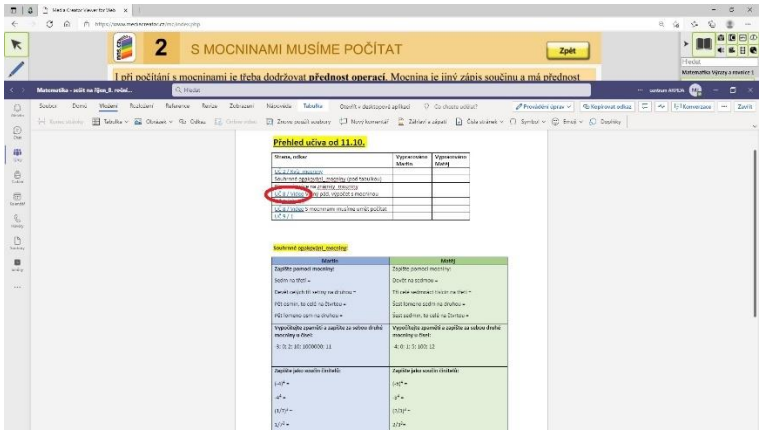
Obrázek 5: Vytvoření odkazu na vybranou aktivitu; zdroj: https://www.mediacreator.cz/mc/index.php



Obrázek 6: Vložení zkopírovaného odkazu do sdíleného prostoru; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams



Obrázek 7: Vložení zkopírovaného odkazu do sdíleného prostoru; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams



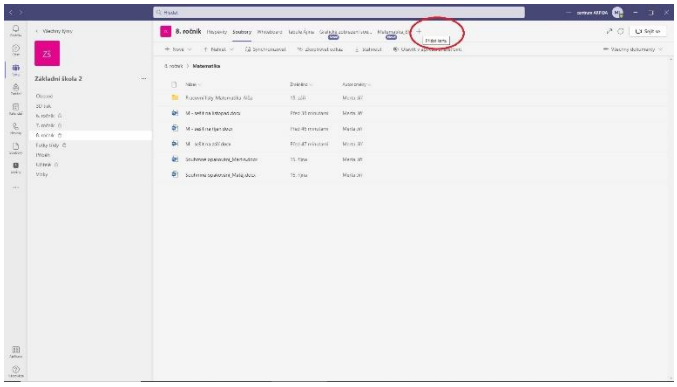
Obrázek 8: Vložení zkopírovaného odkazu do sdíleného prostoru; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams

2 Platforma Teams a Whiteboard

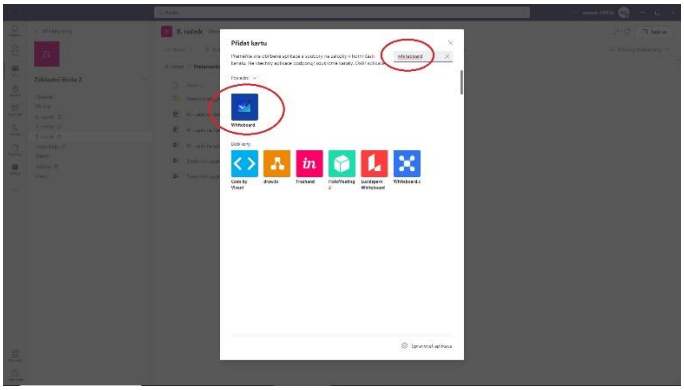
Přímo v aplikaci Teams můžeme využít programu Whiteboard [2], ve kterém lze snadno zapisovat poznámky, zakreslovat náčrty, znázorňovat postupy, pracovat s číselnou osou, a to vše ve sdíleném prostředí v reálném čase pro více účastníků najednou. Lze využít práci v samotné aplikaci Whiteboard nebo pracovat v aplikaci Whiteboard přes Teams.

2.1 Základní nastavení a využití Whiteboard

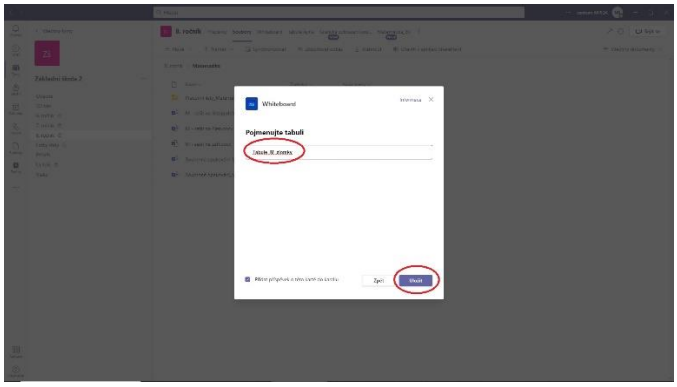
V následujícím obrazovém postupu je uvedena jedna z možností, jak využít možnosti připojení karty Whiteboard pro společnou práci.



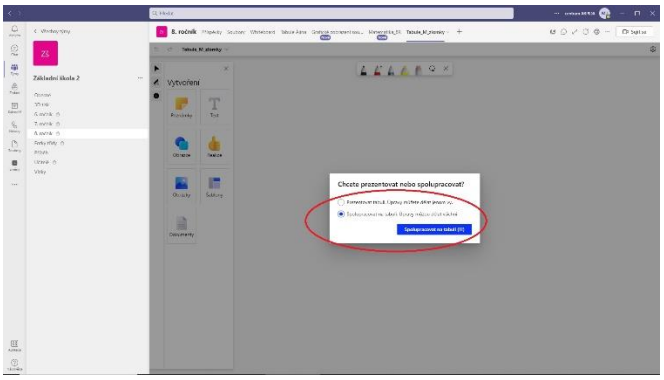
Obrázek 1: Vytvoření karty Whiteboard pro společnou práci; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams



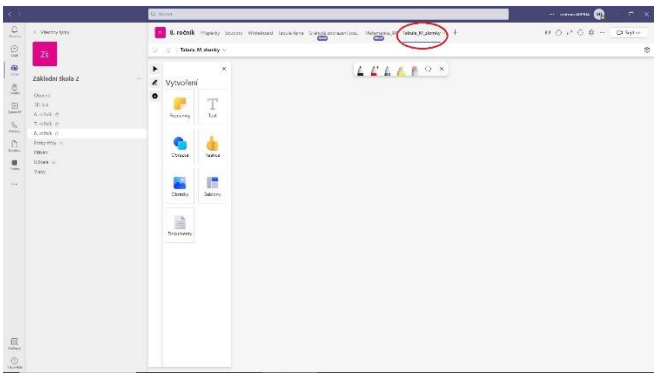
Obrázek 2: Vytvoření karty Whiteboard pro společnou práci; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams



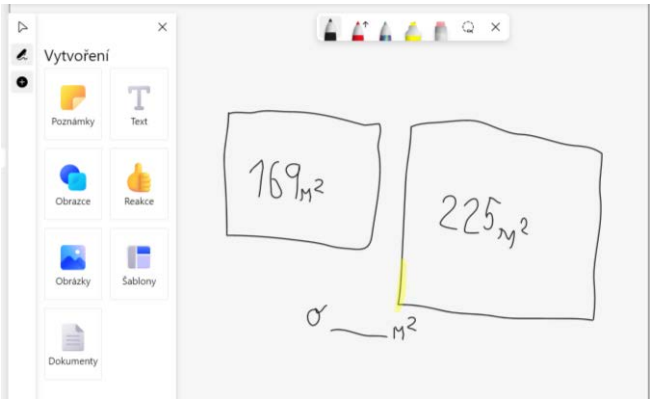
Obrázek 3: Vytvoření karty Whiteboard pro společnou práci; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams



Obrázek 4: Vytvoření karty Whiteboard pro společnou práci; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams



Obrázek 5: Vytvoření karty Whiteboard pro společnou práci; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams



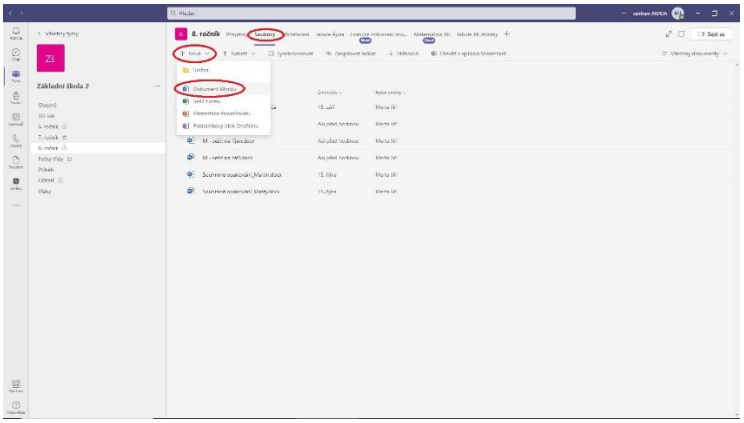
Obrázek 6: Vytvoření karty Whiteboard pro společnou práci; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams

3 Platforma Teams a Word

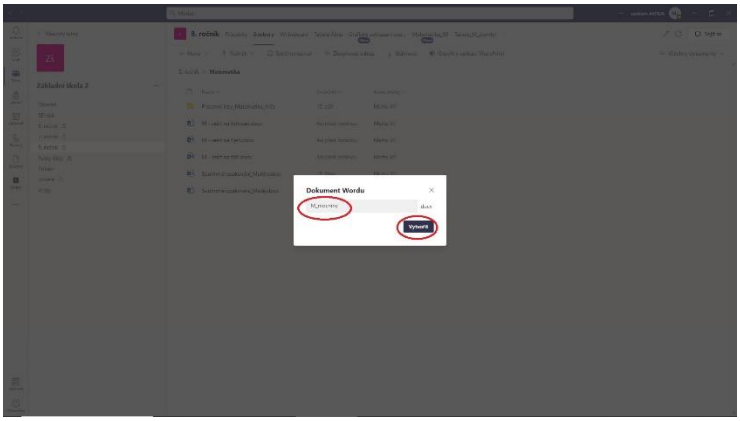
V Teams můžeme dále využít program Word [3], který využijeme pro tvorbu složitějších matematických zápisů, například rovnic, mocnin nebo zlomků. Opět lze pracovat v jednom souboru společně v reálném čase.

3.1 Základní nastavení a využití aplikace Word

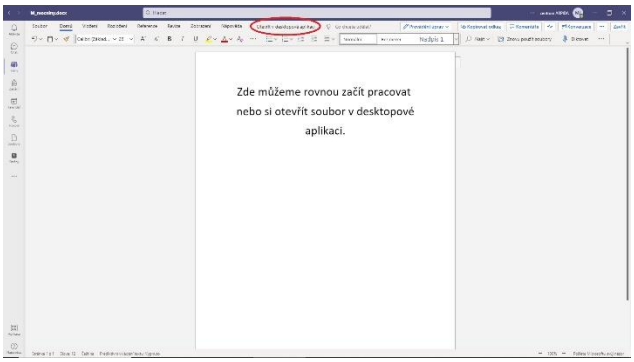
V následujícím obrazovém postupu je uvedena jedna z možností, jak využít možnosti pracovat v souborech typu Word.



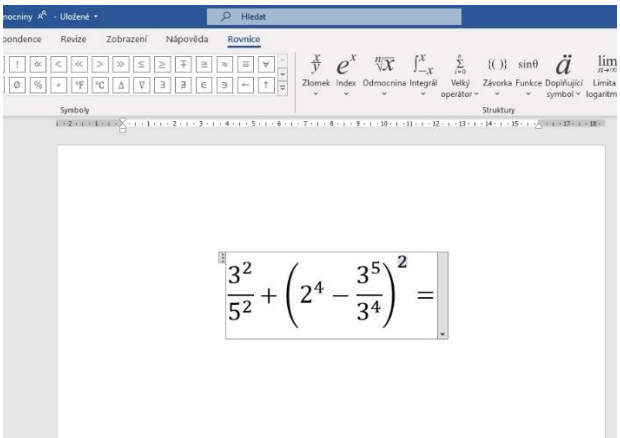
Obrázek 1: Vytvoření souboru Word v aplikaci Teams; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams



Obrázek 2: Vytvoření souboru Word v aplikaci Teams; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams



Obrázek 3: Vytvoření souboru Word v aplikaci Teams; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams



Obrázek 4: Vytvoření souboru Word v aplikaci Teams; zdroj: vlastní + aplikace Microsoft Teams

Literatura:

[1] *Microsoft Teams.* Software pro online komunikaci a výuku. Microsoft, 2021. [cit. 6. 12. 2021] Dostupné z: https://www.microsoft.com/cs-cz/microsoft-365/microsoft-teams/group-chat-software

[2] *Microsoft Whiteboard.* Digitální plátno pro spolupráci v Microsoftu 365 pro efektivní schůzky a poutavou výuku. Microsoft, 2021. [cit. 6. 12. 2021] Dostupné z: https://www.microsoft.com/cs-cz/microsoft-365/microsoft-whiteboard/digital-whiteboard-app

[3] *Microsoft Word.* Microsoft, 2021. [cit. 6. 12. 2021] Dostupné z: https://www.microsoft.com/cs-cz/microsoft-365/word

[4] *Nová škola, o.p.s.* [online]. Nová škola, o.p.s. 2013 [cit. 10. 12. 2021]. Dostupné z: http://www.novaskolaops.cz

Jiří Merta
Mateřská škola, Základní škola a Praktická škola při centru ARPIDA, o.p.s.
U Hvízdala 1402/9 České Budějovice 37011
mertaj@arpida.cz

VYUŽITÍ GEOGEBRY PŘI DISTANČNÍ VÝUCE MATEMATIKY NA ZŠ A SŠ

Jitka Nováková

Gymnázium Pierra de Coubertina Tábor

Abstrakt: GeoGebra je vhodný nástroj pro distanční výuku. Podporuje názornost výkladu učitele při online výuce, pomáhá žákům při samostudiu. Umožňuje ověřování znalostí žáků ústní i písemnou formou. Nahrazuje při výuce geometrie distančním způsobem v plném rozsahu klasické rýsování na tabuli. Velké možnosti nabízí i při zařazení badatelsky orientovaného vyučování. Díky své vícejazyčnosti se uplatní i při CLIL výuce.

Klíčová slova: Geogebra, distanční výuka, rýsování, funkce, konstrukční úlohy.

Use of GeoGebra in distance teaching mathematics at primary and secondary school

Abstract: GeoGebra is a suitable tool for distance learning. It supports the clarity of the teacher´s interpretation in online teaching and helps students in self-study. It enables verification of students´ knowledge in both oral and written forms. It fully replaces the classic drawing on the board when teaching geometry in a distance way. It also offers great opportunities for the inclusion of research-oriented teaching. Thanks to its multilingualism, it can also be used in CLIL teaching.

Keywords: GeoGebra, distance learning, drawing, function, constructional tasks.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 29 (2021), No. 1

Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2021_Novakova.pdf

GEOGEBRA V DISTANČNÍ VÝUCE GEOMETRIE NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE POHLEDEM ZAČÍNAJÍCÍHO UČITELE

Zdeněk Novotný

Základní škola Krátká, Klášterec nad Ohří

Abstrakt: Program GeoGebra je celosvětově nejrozšířenějším zdarma dostupným softwarovým nástrojem určeným pro podporu výuky a studia matematiky na všech stupních škol. Cílem příspěvku je představit pohledem začínajícího učitele možnosti využití GeoGebry a jejího online prostředí při výuce geometrie na základní škole, s důrazem na podporu distančního vzdělávání.

Klíčová slova: Geometrie, GeoGebra, GeoEnZo, distanční výuka, classroom, applet, konstrukční kniha, přijímací zkoušky.

GeoGebra in distance learning geometry at primary school from the perspective of a novice teacher

Abstract: GeoGebra is the world's most widely used free software tool designed to support the teaching and learning of mathematics at all levels of school. The aim of this paper is to present the possibilities of using GeoGebra and its online environment in teaching geometry at primary school, with an emphasis on supporting distance learning, from the perspective of a novice teacher.

Key words: Geometry, GeoGebra, GeoEnZo, distance learning, classroom, applet, construction book, entrance exam.

Úvod

Kariéru učitele jsem započal 1. září 2020, téměř současně se zahájením distanční výuky ve školním roce 2020/2021.

V následujícím textu se budu zabývat popisem budování systému výuky geometrie během distanční výuky pohledem začínajícího učitele. Představím zkušenosti s využitím GeoGebry [1], kterou jsem si zvolil za nástroj, pomocí něhož jsem chtěl své žáky geometrii vyučovat. Zaměřím se na výuku geometrie v devátém ročníku, kde probíhala nejen běžná výuka, ale moji žáci se také připravovali na přijímací zkoušky z matematiky na střední školy.

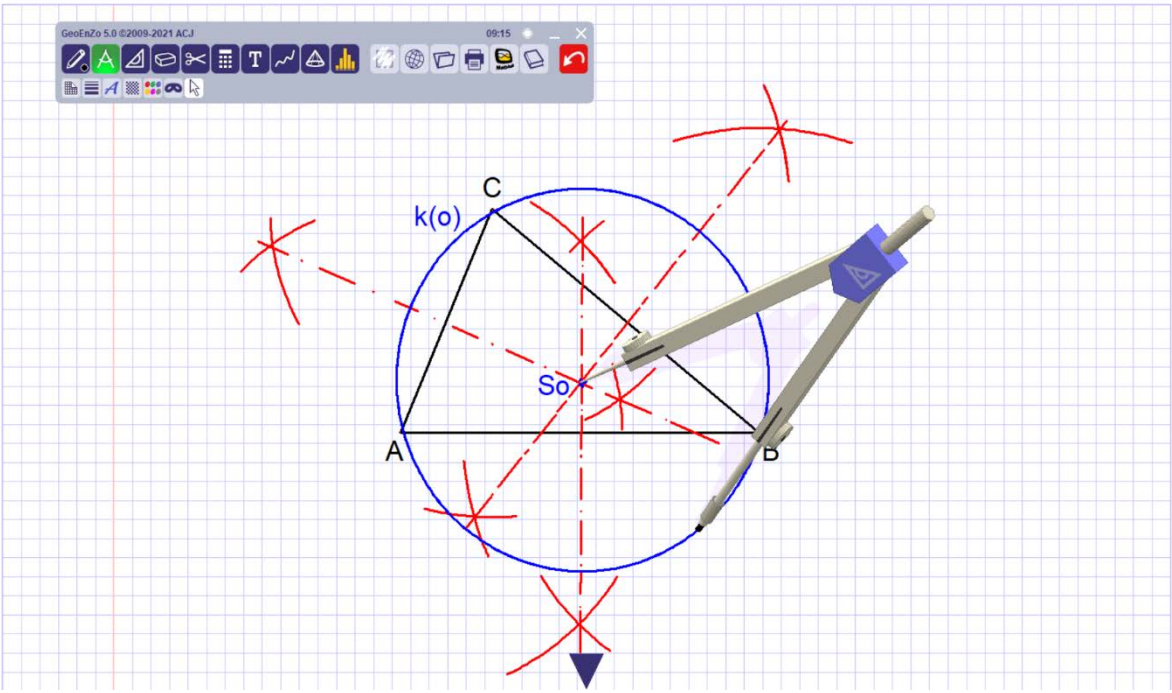
1 Okolnosti a systém výuky geometrie v devátém ročníku

Když jsme v září 2020 zahajovali výuku, netušili jsme, že po pěti týdnech přejdou moje třídy do karantény a tím pro ně začne distanční výuka, která měla trvat déle než sedm měsíců.

Na kariéru učitele matematiky jsem se připravoval studiem na katedře matematiky Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, které jsem dokončil teprve nedávno. Po teoretické stránce jsem se cítil na výuku dobře připravený. Mojí představou bylo to, že běžná výuka v hodinách bude doplněná samostatnou prací žáků s učebnicí, materiály nakladatelství Taktik a společnosti CERMAT. Domníval jsem se, že budu žáky tímto procesem provádět a budu jim pomáhat s úlohami, kterým při samostudiu neporozumí. V první polovině září jsme zavedli dobrovolné hodiny přípravy na přijímací zkoušky, po zahájení distanční výuky jsem měl vše pro své žáky připravené v prostředí Google Classroom [2], do kterého jsem implementoval GeoGebru včetně appletů s úlohami pro přípravu k přijímacím zkouškám. Applety mi měly pomoci s výukou a žákům usnadnit samostudium geometrických úloh.

Velice brzy se ukázalo, že tento systém výuky nefunguje. Mělo to tři hlavní důvody. Významná část žáků neovládala ani základní geometrické konstrukce. GeoGebru žáci znali, ale neuměli v ní pracovat, potíže dělalo i samotné sledování výkladu a mnoho žáků také mělo nízkou motivaci k samostatné práci.

Na tato zjištění jsem reagoval snahou o individuální motivaci žáků a navýšil jsem počet hodin výuky zejména o konzultační hodiny, kde jsem pracoval se žáky individuálně nebo v malých skupinách. Dále jsem věnoval několik hodin podrobnému seznámení žáků s GeoGebrou. Co jsem pomocí GeoGebry nedokázal vyřešit, bylo opakování práce s rýsovacími potřebami a jejich použití při základních geometrických konstrukcích. Protože jsem nechtěl jít cestou videopřenosů své práce s rýsovacími potřebami, hledal jsem program, který se na tuto činnost bude hodit lépe než GeoGebra. Zvolil jsem program GeoEnZo [3].



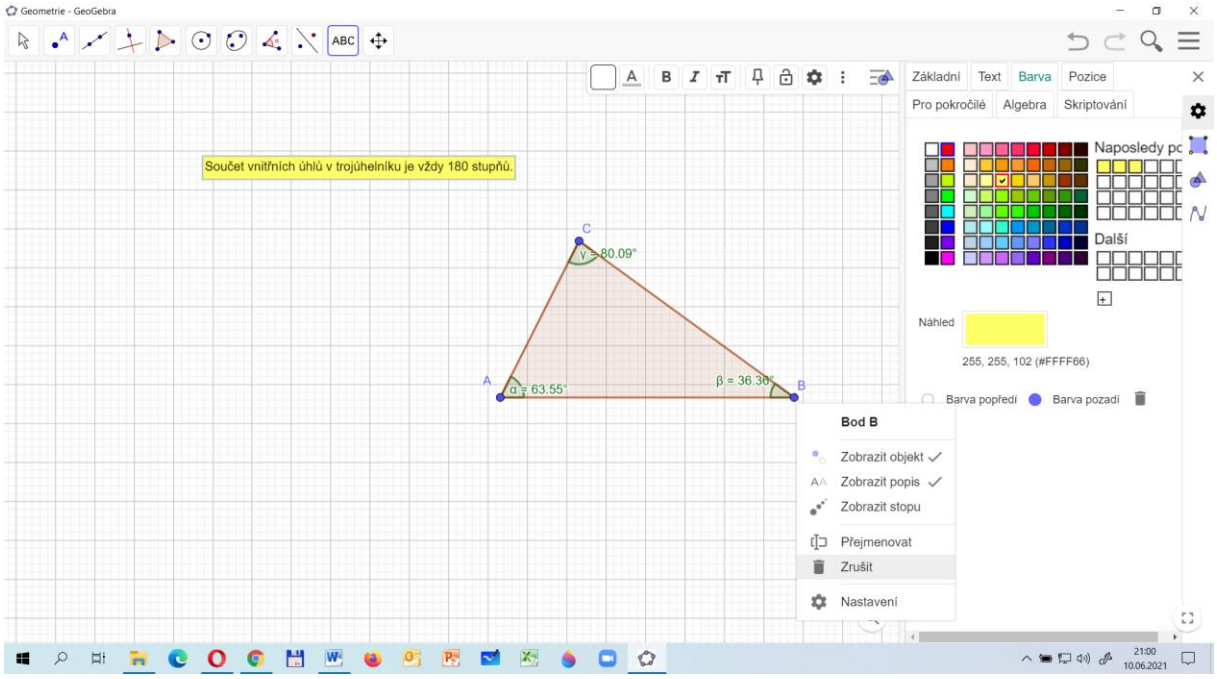
Obrázek 1: GeoEnZo

GeoEnZo (viz *Obrázek 1*) je volně dostupný program, jehož hlavními přednostmi jsou jednoduché ovládání a názorná práce s rýsovacími potřebami. Optimální pro práci v programu je využití grafického tabletu připojeného k počítači. V tomto ideálním případě má učitel možnost nejen předvádět konstrukce s pomocí realisticky vypadajících rýsovacích potřeb, ale také může provádět od ruky jednoduchý zápis konstrukčního řešení, případně pracovní plochu využívat k psaní jakéhokoliv textu.

Program má velmi omezené možnosti ukládání a následného načítání probíhající nebo dokončené práce. To jsem vyřešil tak, že jsem vše ukládal ve formě snímků obrazovek přímo do Google Classroom.

2 GeoGebra ve výuce geometrie pohledem začínajícího učitele

Když jsem se domníval, že jsou žáci připraveni, vrátili jsme se ke GeoGebře. GeoGebru lze při výuce využít mnoha různými způsoby. Zaměřím se pouze na ty části GeoGebry, které jsem při výuce používal. Jde o přímou výuku v prostředí Geometrie, práci s applety a Knihou GeoGebra, prostředí GeoGebra Classroom a mobilní prostředí GeoGebry.



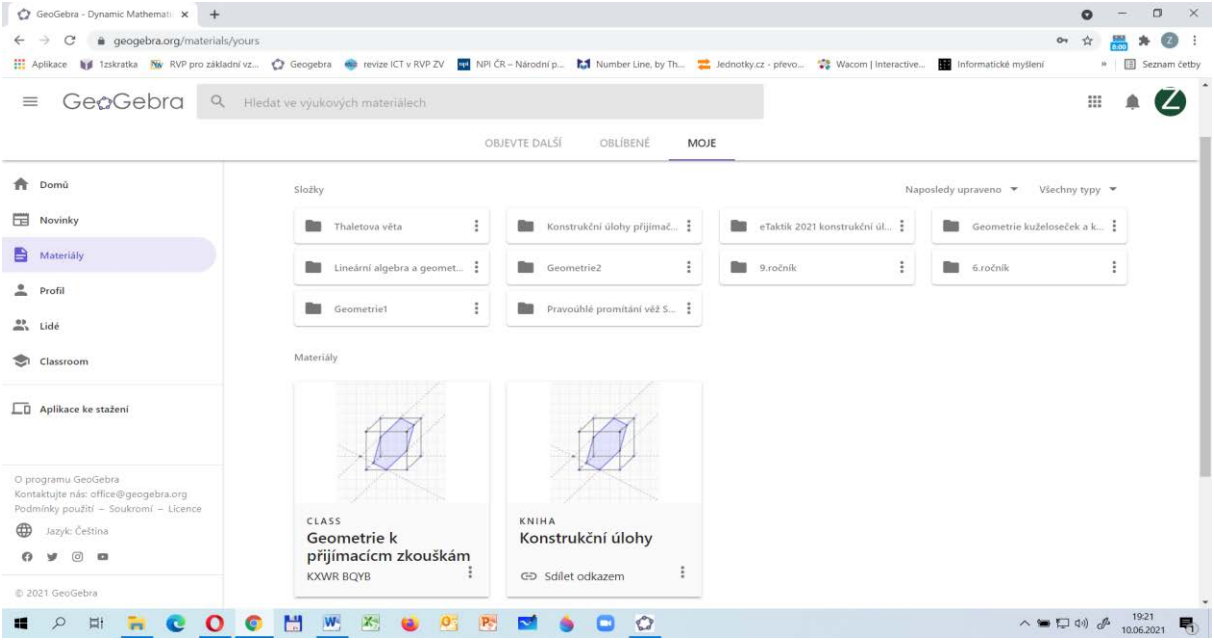
Obrázek 2: Geometrie

Geometrie (viz *Obrázek 2*) je část GeoGebry, která slouží ke konstrukčním činnostem a má velké množství nastavení pracovního prostředí. Brzy jsem zjistil, jak je důležité pečlivě zvážit každé spuštění Geometrie ve výuce nebo nastavení toho, co žák uvidí po spuštění appletu při samostatné práci. Pokud totiž není výchozí nastavení vždy stejné, může to být pro některé žáky matoucí. Osvědčilo se mi nastavit při spuštění mřížku, která žákům usnadňuje orientaci v appletu a pomáhá jim při samostatných konstrukcích. Také jsem vždy pečlivě zvažoval použité barvy a to, zda bude plošný objekt vybarven, což je v GeoGebře přednastaveno, nebo zda vybarven nebude, což odpovídá způsobu práce žáků. Nejzásadnější se v nastavení ukázalo vypnutí automatických popisků jednotlivých částí konstrukce. Jinak totiž dochází, například při

konstrukci kruhových oblouků, k tomu, že body dostávají automatické popisky, které učitel maže nebo přejmenovává, což je opět pro žáky matoucí.

Po spuštění online prostředí GeoGebry je možné se přímo přepnout do Geometrie. Pokud učitel pracuje často v offline prostředí GeoGebry Klasik a také z něj žákům online prezentuje applety nebo geometrické konstrukce, je také v online prostředí GeoGebry vhodné spustit GeoGebru Klasik, aby žáci sledovali práci za stále stejných podmínek.

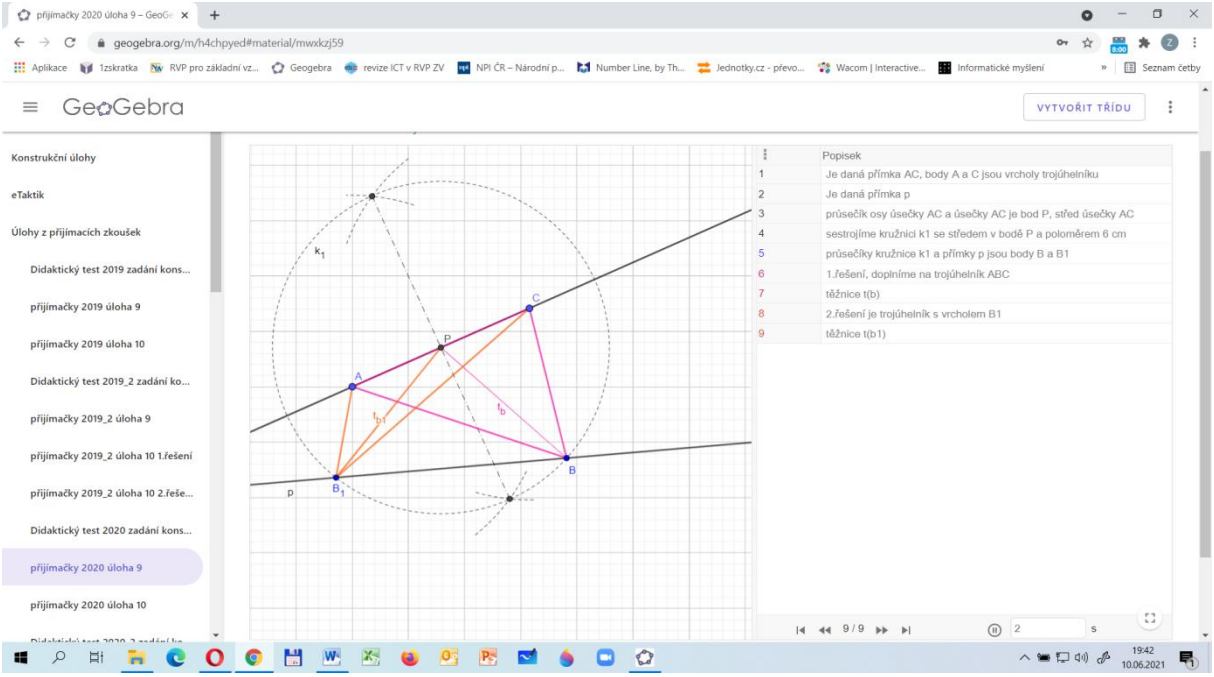
Velkou výhodu GeoGebry vidím v možnosti dobře si uspořádat své vlastní materiály. Stačí být přihlášen do jejího online prostředí (viz *Obrázek 3*).



Obrázek 3: Materiály v online prostředí

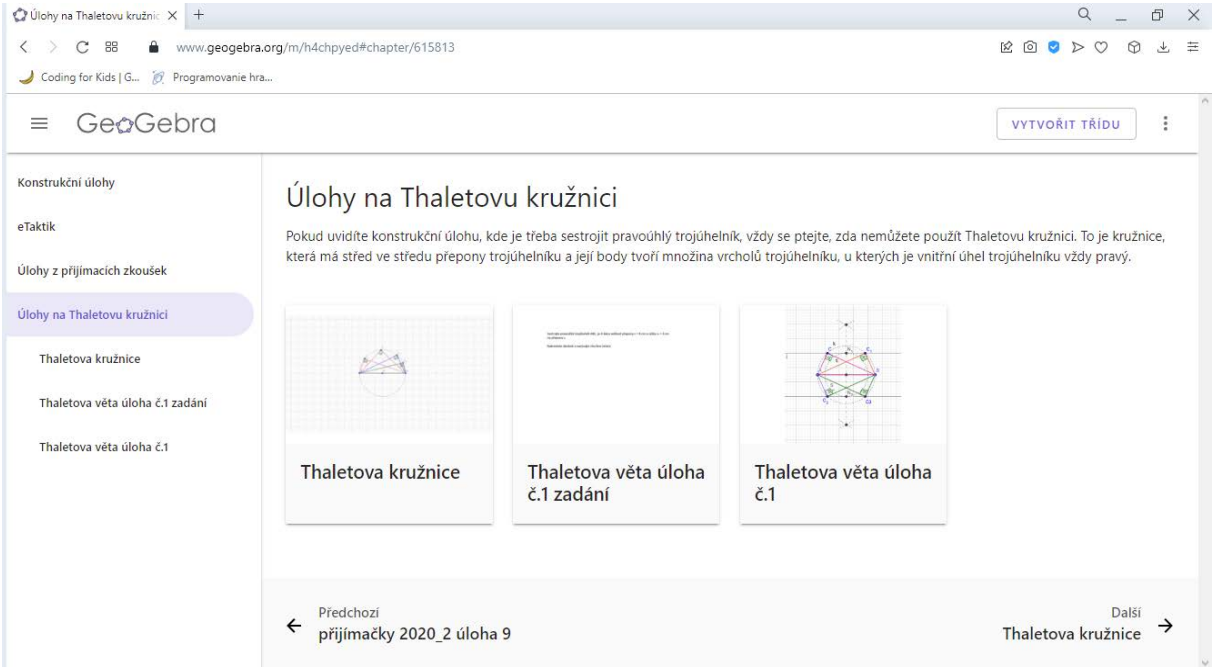
Materiály jsem si rozdělil do složek nejen podle tříd, ale také podle účelu, ke kterému je používám. Důležitý je zde také přímý přístup ke Knize GeoGebra, do které vkládám jednotlivé applety konstrukčních úloh. Dále je možné po přihlášení ihned začít pracovat s GeoGebra Classroom. Třídu v GeoGebře jsem měl pro své žáky připravenou, ale z důvodů uvedených dále jsem ji nikdy nevyužil.

Zásadní pro moji přípravu na vyučování i pro samostatnou práci žáků bylo používání appletů. Žáci jejich ovládání důvěrně znají, protože je shodné s jakýmkoliv audio nebo video přehrávačem v jejich digitálních zařízeních. Applet (viz *Obrázek 4*) se skládá ze dvou částí. První je samotná konstrukce, kde žák vidí, jak na sebe její jednotlivé části navazují. Hlavní pro porozumění je ale zápis konstrukce. GeoGebra nabízí k využití v zápisu několik automaticky generovaných možností, ty jsem nevyužíval. Zápis konstrukce jsem vždy tvořil z ručně psaných popisků jednotlivých částí konstrukce, se kterými jsem dále pracoval pomocí bodů zastavení. Tak jsem mohl přesně pracovat s tím, co jsem chtěl žákům v konstrukci ukázat a také jsem ruční editací mohl zohledňovat aktuální znalosti žáků a zvyklosti, které při práci používají.



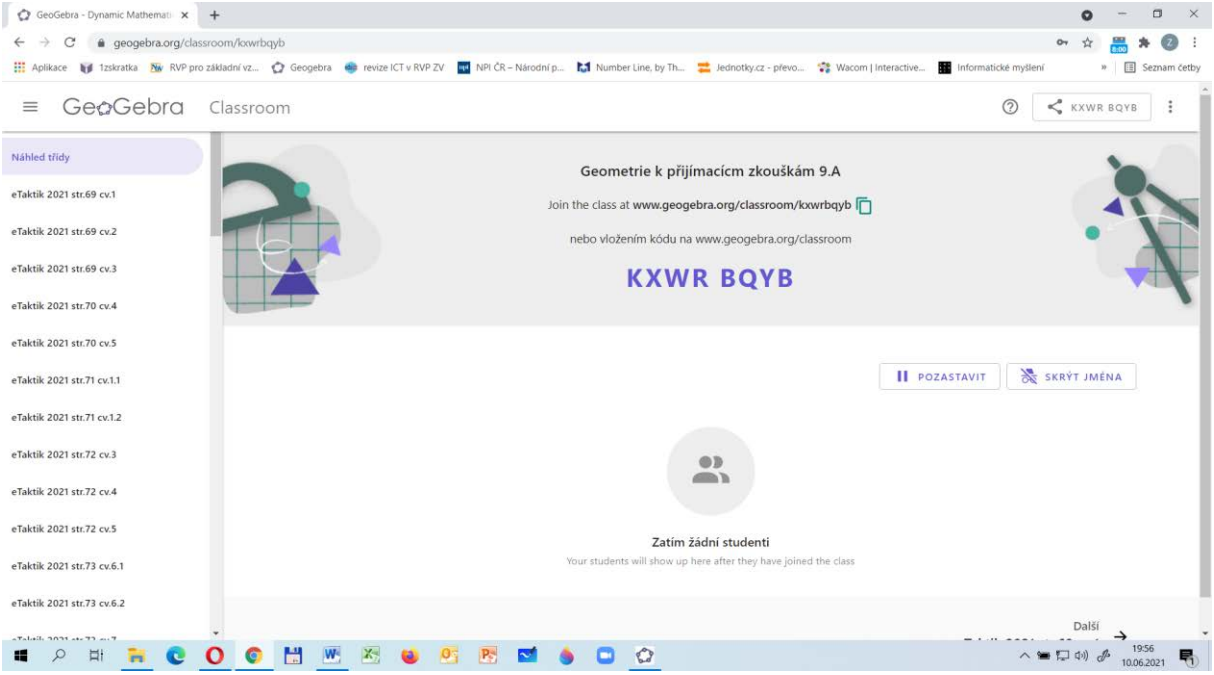
Obrázek 4: Applet GeoGebra

Důležitá vlastnost GeoGebry je možnost vytvořit z appletů knihu. Jako začínající učitel jsem často applety upravoval, doplňoval nebo mazal a žáci tak získávali stále nové a nové odkazy na moji práci. To se změnilo, když jsem z appletů vytvořil knihu Konstrukční úlohy (viz *Obrázek 5*). Pokud jsou applety uspořádané v knize, může s nimi učitel libovolně nakládat, ale žáci mají stále jeden odkaz, který se nemění.



Obrázek 5: GeoGebra kniha Konstrukční úlohy

Prostředí GeoGebra Classroom (viz *Obrázek 6*) umožňuje založit pro žáky vlastní třídu a pracovat v ní. Protože se ale ovládání GeoGebra Classroom mírně liší od prostředí Google Classroom, které jsme při výuce používali, rozhodl jsem se možnost práce v GeoGebra Classroom nevyužít, aby práce se žáky byla jednotná.



Obrázek 6: GeoGebra Classroom

Práce v mobilním prostředí byla realitou pro téměř polovinu mých žáků. Postupem času se jejich vybavení zlepšovalo, ale mnozí absolvovali celou distanční výuku pouze s mobilním telefonem. GeoGebra je k dispozici pro operační systém Android i iOS, ale práce na displeji o velikosti maximálně 6,5 palce a při dotykovém ovládání není příliš komfortní. Skutečnost, že žáci pracují s mobilními telefony je však nutné akceptovat. Učitel může část práce mobilním zařízením přizpůsobit, může si ověřovat, jak applety na mobilním telefonu vypadají, ale to je zřejmě vše, co v této oblasti může pro své žáky udělat.

3 Výhody a nevýhody GeoGebry pohledem začínajícího učitele

V závěru prvního roku své učitelské praxe, kdy jsem získal zkušenosti téměř výhradně v online prostředí při distančním vzdělávání, jsem mohl shrnout výhody i nevýhody programu GeoGebra při výuce geometrie na základní škole.

Výhodou je komplexnost programu, výborně zpracované grafické prostředí a zejména kontextová nápověda, která učitele i žáky během práce neustále provází. Neocenitelná je možnost tvorby appletů, které se dají uspořádat do knih. Učitel si může v GeoGebře vytvářet vlastní třídy nebo veškerou práci propojí s jiným výukovým prostředím, v mém případě s Google Classroom.

Některé z nevýhod, které jsem při práci s GeoGebrou poznal, se postupem času změnily na výhody, jiné přetrvávají. Komplexnost programu je pro začínajícího učitele, který je současně začínajícím uživatelem GeoGebry nevýhodou. Její ovládání není vždy intuitivní, proto je dobré absolvovat nějaký kurz, ve kterém je možné se základy práce s GeoGebrou naučit, nebo je třeba strávit mnoho času experimentováním a prací s nápovědou. Při offline práci má GeoGebra nestandardní způsob ukládání souborů, uživatel si může malou neopatrností snadno přepsat svou předchozí práci. Také LateX syntaxe může činit začínajícímu uživateli potíže, na základní škole jsem se s ní jinde než v GeoGebře nesetkal.

Nezbytná je dále dostatečná příprava žáků na práci v GeoGebře, což zabere několik hodin výuky a výsledek hodně záleží na ochotě žáků se programu věnovat i mimo hodiny matematiky.

Problém, který jsem s pomocí GeoGebry nedokázal vyřešit, je ukázka reálné práce s rýsovacími potřebami při základních geometrických konstrukcích. Pro tuto část výuky jsem zvolil program GeoEnZo, který má jednoduché ovládání a má v sobě reálně vypadající rýsovací potřeby implementované.

Jak výše uvedené výhody i nevýhody GeoGebry ovlivnily výuku během mého prvního roku ve škole jsem si mohl ověřit na začátku školního 2021/2022. Z deváťáků byli středoškoláci, ze šesťáků sedmáci a po dvou zářijových týdnech jsme se opět díky karanténě vídali pouze online. Bylo nutné si práci v GeoGebře znovu připomenout, ale potěšilo mě, že si žáci látku geometrie zapamatovali, a ještě důležitější bylo, že si, alespoň někteří, geometrii oblíbili.

4 Ohlédnutí za prvním rokem učitele matematiky

Co jsem se v prvním roce používání GeoGebry při výuce geometrie naučil? Na práci s GeoGebrou je třeba dobře připravit sebe i své žáky. Jinak hrozí, že nebudou naplněna očekávání učitele, který investoval do přípravy mnoho času i nadějí, ani žáků, kteří v moderním nástroji výuky nerozpoznají novou příležitost, jak se geometrii učit.

Dobře připravená výuka dá naopak učiteli i žákům do rukou nástroj, který může jejich společnou práci udělat zajímavější a efektivnější, s důrazem na samostatnost a individuální rozvoj žáků.

Po návratu do běžné výuky jsem si ponechal to nejlepší z práce během distanční výuky. Moji žáci stále používají prostředí Google Classroom, kde mají materiály podporující výuku a stále zde zadávám úkoly a kontroluji jejich práci. Také používám vše, co jsem vytvořil v GeoGebře a přidávám další materiály. Mohu využívat dobře vybavenou počítačovou učebnu, kde se žáky pracujeme a také, ač se mým sedmákům zdají být přijímací zkoušky z matematiky na střední školy nekonečně daleko, zkouším je pomocí GeoGebry připravovat již nyní.

Často se zamýšlím nad tím, jak jsem vyučoval své žáky v prvním roce na základní škole. Co jsem měl nebo mohl udělat lépe. Jestli je vůbec možné geometrii dobře vyučovat online. Lépe jsem mohl jistě udělat mnoho věcí a budu se o to snažit ve své budoucí učitelské praxi. O čem jsem ale přesvědčený, geometrii je možné online vyučovat stejně dobře, jako při běžné výuce. Dá to více práce, příprava musí být delší a kvalitnější, ale možné to je. GeoGebra je dle mého názoru prostředkem, který v této práci může učiteli, a nejen tomu začínajícímu, pomoci.

Literatura:

[1] *GeoGebra* [online]. 2021 [cit. 2021-11-20]. Dostupné z: https://www.geogebra.org

[2] Google Classroom. *Google* [online]. 2021 [cit. 2021-11-20]. Dostupné z: https://edu.google.com/products/classroom/

[3] *GeoEnZo* [online]. Ton Groeneveld, 2021 [cit. 2021-11-20]. Dostupné z: http://geoenzo.com/geoenzo/geoenzo.htm

Zdeněk Novotný
Základní škola Krátká, Klášterec nad Ohří
Krátká 676
43151 Klášterec nad Ohří
z.novotny@email.cz

ZKUŠENOST S VÝUKOU URČITÉHO INTEGRÁLU S VYUŽITÍM IT

Zuzana Pátíková

Fakulta aplikované informatiky, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Abstrakt: Cílem příspěvku je sdílet zkušenost s výukou tématu určité integrace s využitím podpůrného digitálního prostředí. Představíme aktivitu, která navazuje na úvodní lekci do tématu a která usnadňuje získání přímé zkušenosti s aplikací teoretického učiva. Použitým prostředím je program Simreal+. Aktivita byla realizována ve dvojicích či malých skupinkách, a to při prezenční i distanční formě výuky. Okomentujeme také místo jejího zařazení ve výukovém plánu vypracovaném v duchu badatelsky orientované výuky.

Klíčová slova: badatelsky orientovaná výuka, určitý integrál, využití IT.

Experience with teaching the definite integral using IT

Abstract: The aim of the paper is to share experience with teaching the topic of the definite integral using a supportive digital environment. We will present an activity which facilitates gaining direct experience with the application of theoretical curriculum. The environment used is the Simreal+ program. The activity was carried out in pairs or small groups, both in full-time and distance learning. We also comment on the place of its inclusion in the lesson plans developed in the spirit of inquiry-based learning.

Key words: inquiry-based learning, definite integral, use of IT.

Úvod

Studenti prvních ročníků technických oborů vysokých škol zejména na regionálních univerzitách v matematice vykazují velmi různou úroveň středoškolských znalostí, schopnosti naučit se a pochopit dosah nově vyučovaných témat a v neposlední řadě také motivace k osvojování si teoretických konceptů. Frontální výuka spojená se zkoušením a testováním procedurálních dovedností je jednodušší cestou, jak vyučovat a zároveň dát větší šance slabším studentům na absolvování předmětu. Na druhou stranu, od kvalitních absolventů studia očekáváme i samostatné tvůrčí myšlení, pro něž je konceptuální pochopení matematických nástrojů stěžejní. Snahou autorky je proto při výuce neopomíjet podporu vytváření konceptů zejména formou různých doplňkových aktivit k tradičnímu schématu sestávajícího z vysvětlení látky a následného procvičování příkladů.

V tomto příspěvku se budeme zabývat konkrétní zkušeností autorky, která je podmíněná jejím prostředím. Zároveň je však docela dobře možné, že podobné nastavení situace je i na jiných školách a popsaná zkušenost tak může být užitečná i pro další učitele. Popsané aktivity

byly navrženy v rámci mezinárodního projektu Erasmus+ PLATINUM (Partnership for Learning and Teaching in University Mathematics), jehož cílem byla mimo jiné snaha o zavádění badatelsky orientovaných prvků do výuky matematiky na vysokých školách.

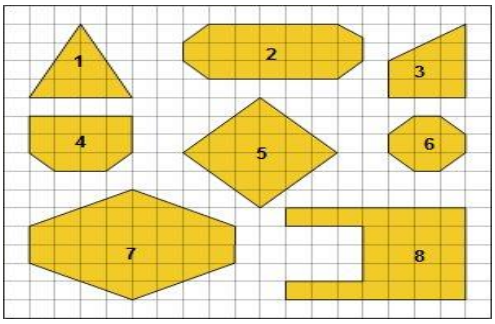
Následující kapitola přináší popis lokálních podmínek a plánu úvodní lekce do tématu určitý integrál. V další kapitole bude pojednáno o konkrétní aktivitě využívající digitálního prostředí, jejímž cílem je získání zkušenosti s aplikovatelností vyučovaného tématu a vytvoření hlubšího porozumění souvislostem.

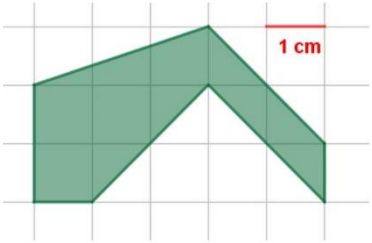
Popis úvodní lekce pro určitý integrál

Autorka vyučuje základní matematické kurzy pro studenty Fakulty technologické na Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně. Předmět Matematika II je učen v letním semestru a prvním tématem je integrace. Diferenciální počet funkce jedné proměnné je součástí předcházejícího předmětu. Forma výuky je typu seminář, což znamená, volně řečeno, středoškolský přístup. Nejsou tedy zvlášť přednášky a cvičení, ale během čtyř hodin týdně dochází k průběžnému probírání a procvičování učiva. Počet studentů ve skupinách je maximálně 24, což umožňuje práci ve skupinách i individuálnější přístup. Neurčitá integrace je probírána přibližně 12 hodin, určitý integrál 4 hodiny.

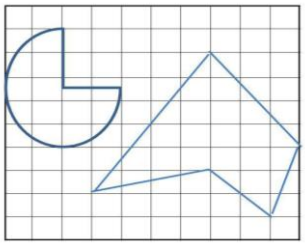
Plán úvodní dvouhodinové lekce je postaven na postupném procházení myšlenek vedoucích k zavedení určitého integrálu jako limit horních a dolních součtů pro upevnění geometrického významu pojmu. Aktivity postupně gradují a navazují na sebe, studenti mají k dispozici tablety (při prezenční formě výuky) nebo počítače (při online výuce). Následuje stručný plán hlavní části lekce. Úkoly 1-4 jsou samostatnou prací.

1. Úkol 1: Najděte obsah mnohoúhelníků ve čtvercové mřížce na obrázcích.





2. Diskuse o výsledcích a způsobech řešení.
3. Úkol 2: Odhadněte obsah složitějších tvarů (pomocí čtvercové mřížky).



4. Diskuse o výsledcích a způsobech řešení.
5. Problém: Jak postupovat, pokud chceme znát oblast mezi osou x a grafem (kladné) funkce na daném intervalu ([a, b]). Diskuse vede od použití čtvercové mřížky k součtu obdélníků - dolních nebo horních.
6. Úkol 3: S použitím tabletů pracujte s vizualizací [5]. Nejprve zkontrolujte nastavení, poté použijte původní interval [-7,5] a pomocí dolních obdélníků se pokuste získat co nejpřesnější aproximaci obsahu oblasti pod parabolou. Kdo má největší hodnotu? Pak zkuste totéž s horními obdélníky. Kdo má nejmenší hodnotu? Co víme o přesné hodnotě obsahu obrazce?
7. Zápis/Prezentace limitního procesu dolních a horních součtů na tabuli.
8. Úkol 4: Pracujte se stejnou simulací jako v Úkolu 3 a změňte funkci na sin(x). Pozorujte, jak velká se zdá být oblast pod jedním obloukem na intervalu [0, pi]. Co se stane, když je interval prodloužen na [0, 2pi]? Jak je to možné? Odvoďte vztah mezi znaménkem funkce v podintervalu a hodnotou integrálu.
9. Na tabuli: Prezentace zápisu týkajícího se určitého integrálu, který ukazuje, že když je obsah oblasti pod funkcí funkce horních mezí, je její derivací původní samotná funkce, Newton-Leibnizův vzorec.
10. Výpočet prvních příkladů spolu se znázorněním výsledků na obrázku a v grafech.
11. Výpočet ukázkového příkladu ze simulace - parabola f (x) = - 0,1x ^ 2 + 6 na [-7,5].
12. Výpočet dalších jednoduchých příkladů, včetně ilustrace geometrického významu.

Vizualizace zmíněná v bodu 6 je vytvořena v prostředí Simreal+, což je simulační a vizualizační program, jehož autorem je Per Henrik Hogstad (University of Agder, Norsko). Dávky připravené v tomto programu jsou dostupné přes internetový prohlížeč počítačů nebo mobilních zařízení. Více informací o programu lze nalézt v článcích [1, 4].

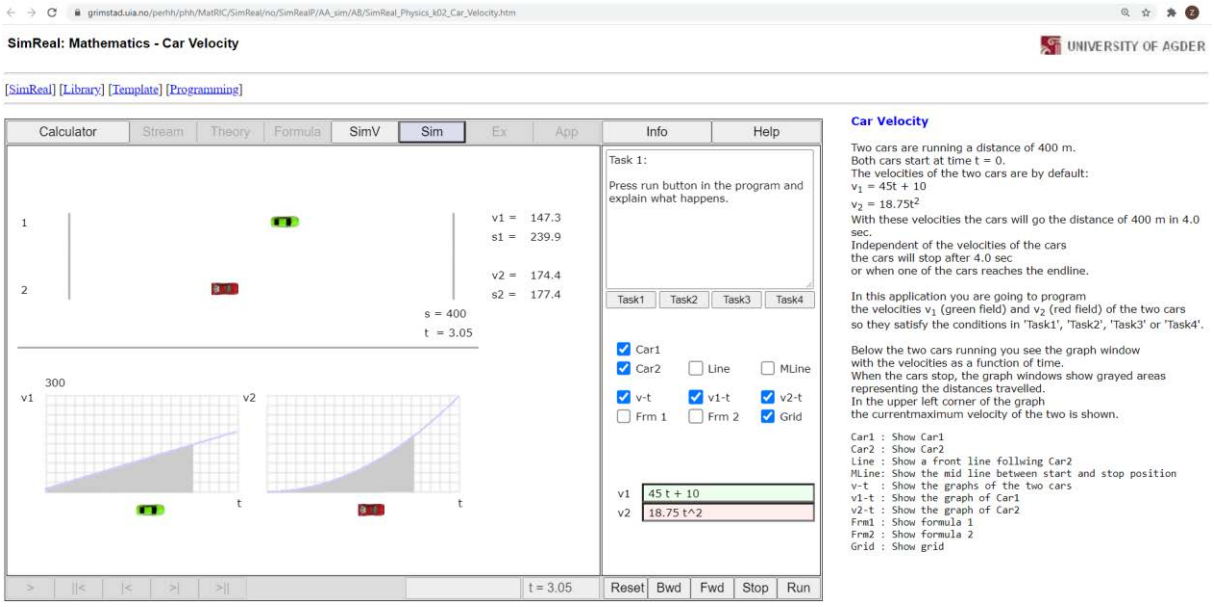
Zkušenost s lekcí vedenou podle navrženého plánu odhalila několik aspektů stojících za zmínku. Předně se ukázalo, že na počátku semináře byli neobyčejně úspěšní také někteří studenti, kteří se jindy moc neprojevují. Naopak, někteří ze studentů s obecně lepšími výkony tentokrát volili složitější postup při hledání obsahů, což nebylo nutné. Další pozorovanou skutečností byl fakt, že při zápisech a odvozování na tabuli (body 7 a 9) studenti ztráceli soustředěnost, někteří si ani nedělali zápisky, a to přes to, že tato teoretická část byla zjednodušená a redukovaná na minimum.

Zpětná vazba ověřující účinnost takto vedené lekce byla v roce 2019 získána formou dotazníku. Dotazník vyplnilo 44 studentů v rozmezí 2 až 3 měsíců po sledovaném semináři. Z jejich odpovědí vyplynulo, že více než 90 % studentů si úspěšně vytvořilo představu o pojmu a symbolice určitého integrálu a o tom, co se s ním dá vypočítat. Asi třetina studentů dokázala spojit myšlenku určitého integrálu s praktickým úkolem, ale většina by stále preferovala méně sofistikovanou metodu pro výpočet či odhad plochy obecného tvaru. Podle výsledků studenti (téměř 90 %) nerozuměli teorii základního konceptu, na kterém je určitý integrál založen, nebo si nevzpomněli si na použitou terminologii. To odpovídá dojmu vyučujícího z realizace lekce, totiž že mnozí studenti nepovažují za důležité soustředit se na teoretické vysvětlování. Co se týká práce s tablety, většina studentů byla zvyklá na digitální technologie a jejich použití tak nebyl problém.

Aktivita Car velocity

Po úvodní lekci je zařazena práce s další dávkou připravenou v programu Simreal+ za využití počítačů či mobilních zařízení, a to aktivita Car velocity - Rychlost auta. Zkušenosti s využitím této dávky ve výuce jsou popsány také v článcích [2, 3]. Mezi vzdělávací cíle zařazení této aktivity patří: pochopit fyzikální interpretaci určitého integrálu v pojmech čas - dráha - rychlost, pochopit vazbu mezi integrovanou funkcí a výsledkem, obměňovat integrované funkce za daným účelem, poznat výhodu práce s parametry oproti metodě pokus x omyl a zdokonalit výpočetní zdatnost v oblasti určitých integrálů.

Studenti jsou rozděleni do skupin (dvojice v případě prezenční výuky, čtveřice v tzv. Breakout Rooms prostředí Teams v případě online výuky) a vyzváni k přechodu na webovou stránku [6].



V simulačním okně jsou na startu dráhy nachystána dvě auta, funkčními předpisy (které lze měnit) jsou zadány jejich rychlosti. Při spuštění simulace se auta rozjedou, v průběhu jízdy se na grafech postupně vybarvuje plocha pod křivkami rychlostí a lze sledovat měnící se hodnoty času, rychlostí i ujetých drah. Simulaci lze spouštět opakovaně s různým nastavením.

Aktivita v plné verzi sestává ze čtyř úkolů (lze realizovat jen část z nich):

1. Spusť simulaci, pozoruj a vysvětli, co se děje.
2. Najdi další předpisy funkcí, pro které auta dorazí do cíle ve stejný okamžik t=4.
3. Jak to udělat, aby zelené auto bylo přesně v půlce trati v okamžik, když červené přijede do cíle.
4. Najděte předpisy pro rychlosti tak, aby zelené auto mělo poloviční rychlost v okamžiku, kdy auta obě zároveň dojedou do cíle.

Zkušenost s realizací této aktivity je velmi dobrá, vyučující ji plánuje zařazovat i nadále. Skupiny studentů přistupovaly k řešení různě. Docházelo k obměně různých parametrů v předpisech funkcí, ale i k volbám jiných typů funkcí, než jsou funkce lineární a kvadratické.

Studenti byli nabádáni, aby odhadnutý správný výsledek ověřili i výpočtem. Přístupy k nalezení vyhovujících funkčních předpisů pro rychlosti byly vyvážené, co se týká tipování a zkoušení v simulaci oproti provedení přípravného výpočtu. Aktivita byla přijata převážně pozitivně, studenti měli radost z nalezeného řešení a byli motivováni hledat další.

Závěr

Koncept badatelsky orientované výuky (inquiry based learning and teaching) lze aplikovat nejen na vzdělávání studentů, ale také na způsob, jakým učitelé vyučují. Právě zvídavá otázka „Jak lépe přiblížit studentům téma určitého integrálu?“ vedla autorku příspěvku k sestavení inovovaného plánu úvodní lekce do tématu a k zařazení několika interaktivních prvků za využití výpočetní techniky. Zde představenou aktivitu Car velocity je možné zařadit do cvičení či seminářů formou skupinové práce. Schopnosti a kompetence, k jejichž rozvoji aktivita přispívá, jsou plně v souladu s celým komplexem vzdělávacích cílů, které vyučující na učivo určitého integrálu klade.

Literatura:

[1] Brekke, M., Hogstad, P. H.: *New teaching methods – Using computer technology in physics, mathematics and computer science*, International Journal of Digital Society, Volume 1, Issue 1, 2010.

[2] Hogstad, N. M., Isabwe, G. M. N., Vos, P.: *Engineering students' use of visualizations to communicate about representations and applications in a technological environment*, First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, Mar 2016, Montpellier, France.

[3] Hogstad, N. M., Isabwe, G. M. N.: *Using the theory of instrumental genesis to study students' work with a digital tool for applying integrals in a kinematic simulation,* CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland.

[4] Pátíková, Z.: *Možnosti programu Simreal,* Sborník příspěvků 8. konference Užití počítačů ve výuce matematiky, České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2017, 104-108.

[5] https://grimstad.uia.no/perhh/phh/MatRIC/SimReal/no/SimRealP/AA_sim/AB/SimReal_Mathematics_DiffInt_Int_Integration.htm

[6] https://grimstad.uia.no/perhh/phh/MatRIC/SimReal/no/SimRealP/AA_sim/AB/SimReal_Physics_k02_Car_Velocity.htm

Zuzana Pátíková
Fakulta aplikované informatiky
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Nad Stráněmi 4511, Zlín 76005
patikova@utb.cz

MATHEMATIKUS – PROSTŘEDEK PRO ZDOKONALOVÁNÍ PROSTOROVÉ PŘEDSTAVIVOSTI

Petra Pirklová, Daniela Bímová, Jiří Břehovský

Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Abstrakt: Prostorová představivost je velice důležitá schopnost každého jedince, a proto je třeba využít k jejímu rozvoji všech dostupných prostředků. V současné době plné digitálních technologií, které nás neustále obklopují a které žáci všech stupňů škol dobře ovládají, lze využít právě jich. Na základě těchto skutečností byla v rámci řešení projektu iTEM vyvinuta webová stránka Mathematikus obsahující interaktivní úlohy podporující rozvoj a zdokonalování prostorové představivosti. Tento příspěvek je věnován představení této stránky.

Klíčová slova: Prostorová představivost, Mathematikus, vizualizace, prostorové úlohy, moderní technologie, mentální rotace.

Mathematikus – medium for improving spatial imagination

Abstract: Spatial imagination is a very important ability of every individual, and therefore it is necessary to use all available instruments for its development. Nowadays, full of digital technologies, which constantly surround us and which are well mastered by students at all levels of schools, it is possible to use them. Based on these facts, the Mathematikus website, containing interactive tasks supporting the development and improvement of spatial imagination, was developed within the iTEM project solution. This paper is dedicated to the introduction of this website.

Key words: Spatial imagination, Mathematikus, visualization, spatial problems, modern technologies, mental rotation.

Úvod

Prostorová představivost je velmi důležitá schopnost každého člověka. Aniž by si to lidé uvědomovali, využívají prostorovou představivost v každodenním životě, např. pokud potřebují najít cestu ve městě, dále při čtení a orientaci na mapách, při parkování vozů, aranžování dekorací v místnosti, rovnání nádobí do myčky a v mnoha jiných případech. Samozřejmě také profese jako architekt, stavař, astronom, lékař, biochemik, biolog, chemik, kartograf, strojní inženýr, hudebník, aj. se neobejdou bez prostorových schopností. Nicméně

každý člověk by měl být schopen rozpoznat polohu a vztahy mezi objekty a porozumět jejich transformacím v prostoru.

Prostorovou představivostí se zabývá mnoho studií a jsou v nich také zmiňovány její důležité součásti. Například ve [4], [8], [11] je poukázáno na to, že schopnosti mentální manipulace, otáčení, ohýbání nebo převracení znázorněného objektu patří mezi jedny z důležitých aspektů inteligence. Olkun v [12] definuje prostorovou představivost jako schopnost vyvolat, otáčet a interpretovat dvou a třídimenzionální objekty v mysli. Linn a Petersen v [9] popisují prostorovou představivost jako symbolickou a neverbální informaci používanou pro popisování, transformování, tvarování a zapamatování objektů. Definují ji pak jako schopnost, která se používá pro reprezentaci, transformaci, generování a vyvolávání symbolických a obrazových informací. Prostorovou představivost klasifikovali pomocí tří faktorů: *mentální otáčení* (schopnost rychlého a přesného mentálního otáčení dvou- nebo třídimenzionálních objektů a schopnost představit si vlastnosti objektu poté, co byl otočen kolem osy o určitý počet úhlových stupňů), *prostorové vnímání* (schopnost identifikovat prostorové vztahy objektu s ohledem na orientaci vlastního těla), *prostorová vizualizace* (schopnost mentální manipulace s komplexní prostorovou informací o objektu, včetně konfigurace jednotlivých jeho součástí). Vizualizace je základním prvkem prostorových dovedností a lze ji použít jako spouštěcí nástroj při učení a výukových činnostech v matematice a geometrii [6]. Použití vizuálně-prostorových zobrazení při řešení geometrických problémů pozitivně koreluje s výkonem při řešení problémů obecně [3], [7], [11].

Vzhledem ke všem zmíněným a mnoha dalším studiím lze prostorovou představivost definovat jako schopnost provádět mentální transformace objektů v prostoru, představit si, jak objekt vypadá při pohledu z různých úhlů, a rozumět tomu, jaký vztah mají objekty a jejich součásti k sobě navzájem.

Mnoho studií ukazuje, že prostorovou představivost lze zdokonalovat a rozvíjet (např. [1], [2]). K procvičování a prohlubování prostorové představivosti, vzhledem k její důležitosti, je jistě třeba využít všech dostupných prostředků. V současné době nás obklopují moderní technologie více než kdykoliv předtím, a proto je jistě žádoucí je také náležitě a smysluplně využívat. Jejich rozvoj je velmi rychlý a tento rozvoj by se také měl odrážet ve výuce, díky čemuž lze přinášet výrazné inovace do výukových hodin. Je však nutné využít takové počítačové výukové prostředí, pomocí něhož by se studenti naučili odpovídajícím dovednostem. Například hraní počítačových her je velmi populární aktivitou mezi čím dál mladšími dětmi. Počítačové hry nemusíme však úzce vnímat pouze jako zábavu, ale můžeme na ně nahlížet také jako na partnera při učení a též jako na nástroj k překonání rozpaků z moderních technologií a k vyrovnání různých dovedností žáků. Volíme-li vhodné počítačové hry, mohou mít tyto hry a aktivity výraznou výchovnou a edukativní úlohu. Rozličné studie prezentují nadšené názory na vliv digitálních médií na učení, ale také zmiňují důležitost opatrnosti při jejich bezpodmínečném přijímání [5].

Jednou z nepřeberného množství počítačových aktivit podporujících rozvoj prostorové představivosti, kterou chceme v tomto příspěvku představit, je webová stránka mathematikus.de [10].

1 Mathematikus

Webová stránka www.mathematikus.de [10] je stránka, která pomocí řešení úloh na ní vložených umožňuje efektivní procvičování prostorové představivosti pro různé věkové

skupiny žáků. K úspěšnému řešení zařazených úloh je třeba používat všechny složky prostorové představivosti, zejména však mentální rotaci a prostorovou vizualizaci. Všechny úlohy zařazené na tuto stránku jsou interaktivní a animované. Díky animaci poskytují úlohy uživateli okamžitou informativní zpětnou vazbu o správnosti jím zvoleného řešení. To znamená, že každý ihned vidí, proč je nebo není jím vybrané řešení úlohy z předložené nabídky správné. Pokud uživatel udělá chybu, může zkusit vybrat jiné řešení bez větší ztráty času anebo bez plýtvání materiálu pro vytvoření dalších fyzických modelů apod. Další nespornou výhodou této webové stránky je, že uživatel může řešení každé úlohy sledovat tolikrát, kolikrát chce a potřebuje, a v neposlední řadě může také při řešení úloh postupovat vlastním tempem.

Nevýhodou však může být, pokud žák nechce přemýšlet o výběru správného řešení, že lze jen bezmyšlenkovitě klikat a čekat, které náhodně vybrané řešení bude správné.

Ačkoliv webová stránka Mathematikus byla naprogramována německou firmou, existuje několik jejích jazykových verzí: česká, německá, anglická a norská. Překlad do čínštiny, ruštiny a španělštiny je ve výstavbě.

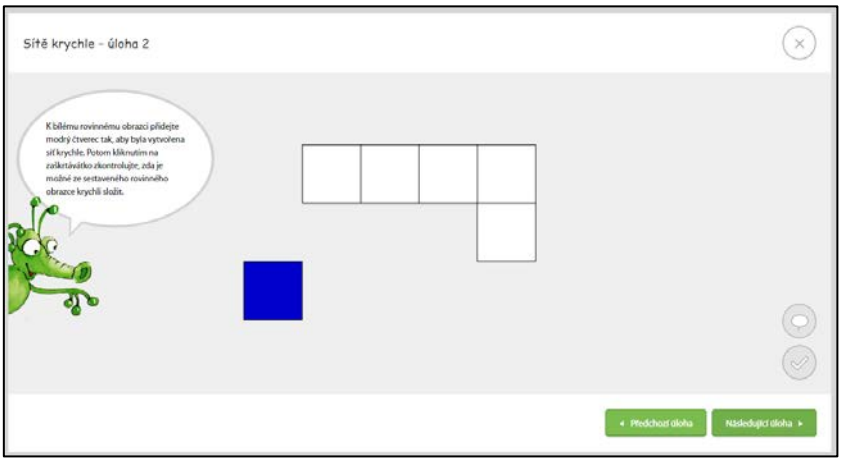
V hlavní nabídce stránky jsou kromě záložek pro úlohy, také technické odkazy na kontakty tvůrců stránky (*Napsat Mathematikusu*) a odkaz, který představuje tuto stránku (*O Mathematikusu*). Dále pod odkazem *Výuka a učení se matematice* jsou zveřejněny německé články vztahující se k tématu výuky matematiky. Odkaz *Tipy pro učení a procvičování* je zatím neobsazen. Úlohy samotné jsou pak rozděleny do dvou skupin s názvy *Krychle, sítě krychlí a mnoho dalších úloh* a *Stavění a skládání.*

1.1 Krychle, sítě krychlí a mnoho dalších úloh

Pod odkazem *Krychle, sítě krychlí a mnoho dalších úloh*, jak už název napovídá, jsou úlohy, které se týkají mentální manipulace s krychlí a krychlovými tělesy. Řešení každé úlohy vybírá uživatel z předložené nabídky. Nyní se krátce zmíníme o jednotlivých typech úloh pod tímto odkazem.

1.1.1 Sítě krychle

Úlohy v odkazu *Sítě krychle* se snaží o seznámení žáka s různými typy sítí krychle. V zadání každé úlohy je „nekompletní síť“ krychle. Úkolem úloh tohoto typu je přidat předdefinovaný modrý čtverec k této části sítě tak, aby vznikla správná síť krychle (viz Obrázek 1). Ihned po



Obrázek 1: Sítě krychle, zdroj: www.mathematikus.de

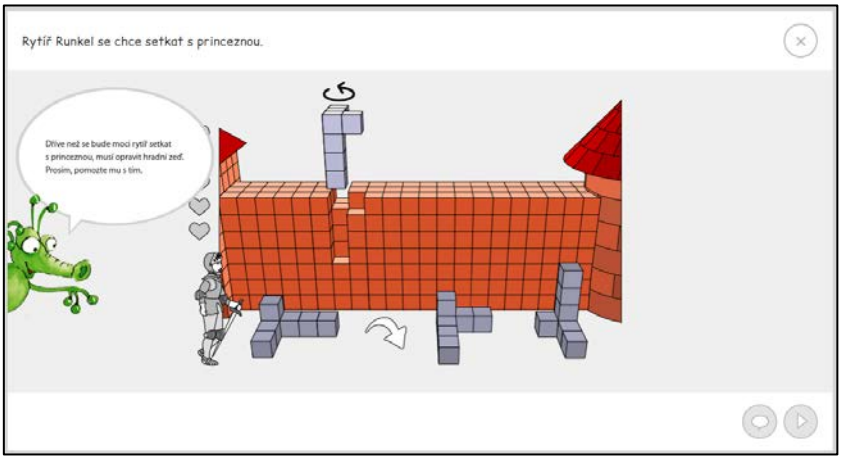
přidání modrého čtverce se vytvořená „síť“ snaží pomocí animace složit v krychli. Okamžitě je ze složeného objektu zřejmé, zda byl modrý čtverec přidán na správné místo či nikoliv. Tedy jestli se přidáním čtverce na zvolené místo podařilo vytvořit síť krychle. Pokud řešení správné není, i tak se síť snaží složit do krychle, ale z výsledného obrázku je patrné, že krychle nevznikla.

1.1.2 Rytíř Runkel

Tato úloha se zabývá procvičováním mentální rotace a prostorové vizualizace. V jejím zadání je uvedeno, že rytíř Runkel se chce dostat za princeznou. Chce-li však za ní dojít, musí opravit hradby, v nichž na pěti místech chybí její části. Pro každou chybějící část hradeb má rytíř na výběr ze čtyř krychlových těles, mezi kterými je to, resp. jsou ta, která přesně zaplní zmiňovaný otvor. Z nabízených těles je jich totiž více správných, ta chybná jsou s těmi správnými nepřímo shodná.

Po kliknutí na zvolené krychlové těleso se toto těleso přemístí nad otvor a postupným klikáním na něj se pomocí animace natočí do správné polohy. Tedy je opět ihned vidět, zda je zvolené těleso vhodné. Pokud není správné, pak lze vybrat jiné (viz Obrázek 2).

Pohádkový motiv této úlohy je určen spíše pro děti mladšího školního věku. Pokud je tato úloha řešena ve větší skupině, pak přirozená soutěživost nabádá děti k tomu, aby se snažily najít správné řešení na první pokus, čímž se jejich rytíř dostane k princezně co nejdříve.

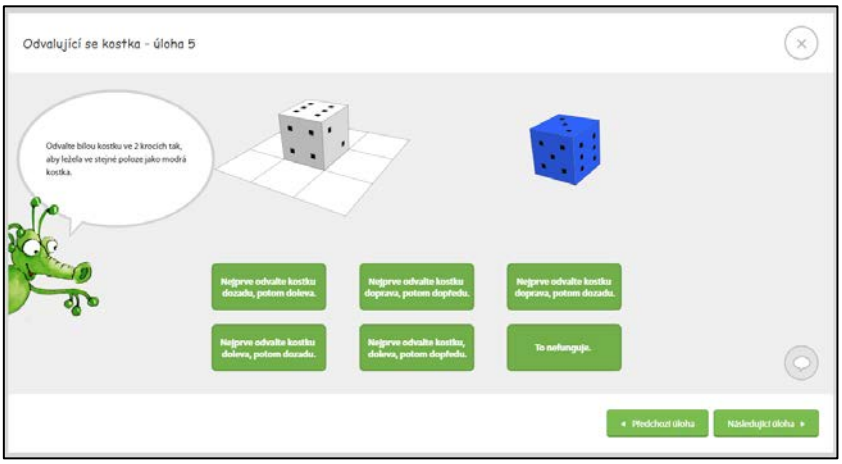


Obrázek 2: Rytíř Runkel, zdroj: www.mathematikus.de

1.1.3 Odvalující se kostka

Pod tímto odkazem jsou velmi známé úlohy na odvalování hrací kostky, ve kterých je třeba pomocí mentální rotace otáčet s kostkou. K úspěšnému řešení je však také nutná znalost faktu, že na protilehlých stěnách hrací kostky je vždy součet bodů roven sedmi, což není v zadání úlohy zmíněno.

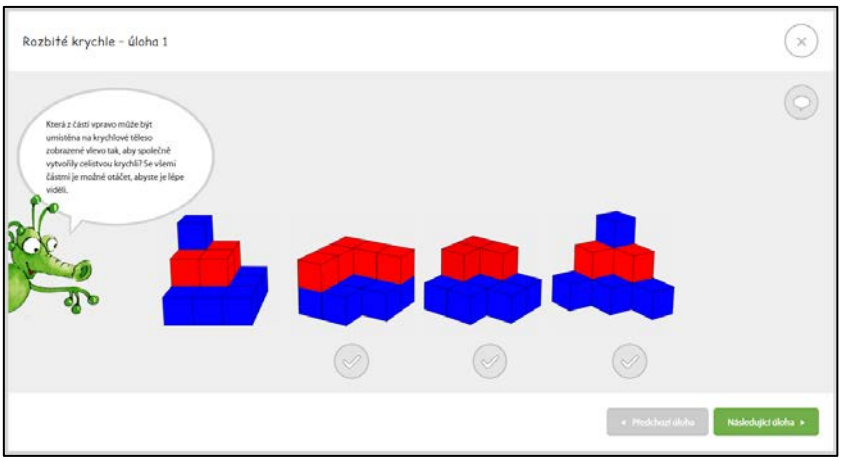
Úkolem uživatele je vybrat z nabídky dvojic pohybů kostky takovou dvojici, která převede bílou kostku do polohy, kterou zaujímá kostka modrá (viz Obrázek 3). Po kliknutí na příslušné tlačítko bílá kostka vybrané pohyby provede a díky virtuální animaci si uživatel může ověřit správnost svého řešení.



Obrázek 3: Odvalující se kostka, zdroj: www.mathematikus.de

1.1.4 Rozbité krychle

V těchto úlohách je třeba z předložených možností tří krychlových těles vybrat takové, které společně s krychlovou stavbou vlevo vytvoří krychli (viz Obrázek 4). Po kliknutí na zvolené krychlové těleso se toto těleso pomocí virtuální animace přemístí ke krychlové stavbě vlevo, aby společně vytvořili celistvou krychli. Díky animaci je zřejmé, jestli jsme byli při volbě úspěšní. Pokud ne, můžeme se poučit z chyb a zvolit vhodnější variantu.

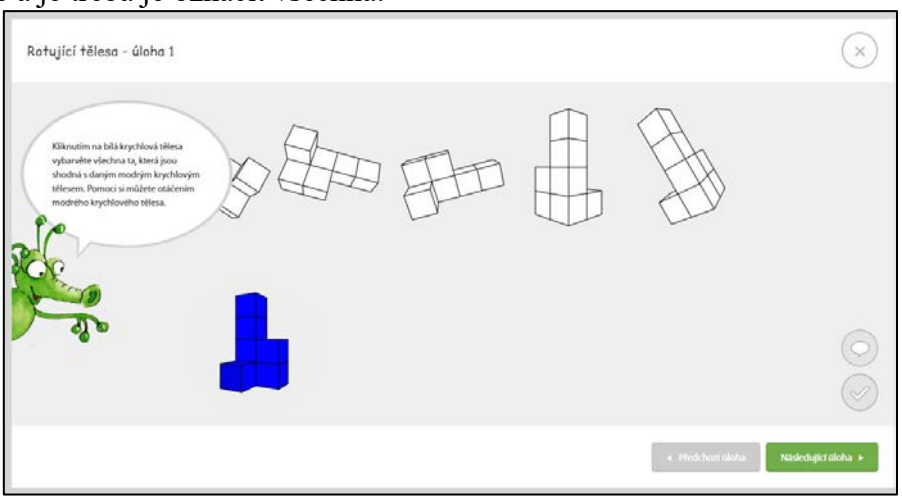


Obrázek 4: Rozbité krychle, zdroj: www.mathematikus.de

1.1.5 Rotující tělesa

Pod odkazem *Rotující tělesa* jsou zařazeny úlohy, ve kterých vybíráme z několika krychlových těles přímo shodná tělesa se zadaným modrým krychlovým tělesem (viz Obrázek 5). Pokud není prostorová představivost uživatele na tak dobré úrovni, aby ihned odhalil sám správné řešení, je možné se zadaným tělesem pomocí myši či prstu na dotykové obrazovce otáčet a

uvést zadané těleso do poloh shodných s nabízenými tělesy. Správných řešení je v těchto úlohách více a je třeba je označit všechna.



Obrázek 5: Rotující tělesa, zdroj: www.mathematikus.de

1.2 Stavění a skládání

Odkaz *Stavění a skládání* z hlavní nabídky obsahuje animované interaktivní návody na skládání různých geometrických objektů, např. dvojjehlanu, pravidelného pětiúhelníku, větrníku, nafukovací krychle, rovnostranného trojúhelníku a mnoha dalších. Postup tvorby jednotlivých skládaček je krokovaný. Kroky je možné vracet a pouštět opakovaně.

I tyto úlohy, stejně tak jako i všechny výše zmíněné, procvičují prostorovou představivost a určitě mohou dobře posloužit mimo jiné i pro ozvláštnění a odlehčení výukových hodin nejen matematiky.

2 Projekt iTEM

Webová stránka Mathematikus byla původně vyvinuta pomocí platformy Adobe Flash. Po zastarání této platformy byla v roce 2020 přepracována, přeprogramována a rozšířena díky projektu iTEM (Improve Teacher Education in Mathematics). Po těchto jejích úpravách je nyní možné úlohy v Mathematikusu řešit také na dotykových obrazovkách telefonů či tabletů.

Díky projektu iTEM bude stránka Mathematikus i nadále aktualizována a doplňována o nové typy úloh, které by měly být dále diferencované také podle obtížností tak, aby si každý uživatel mohl vybrat úlohy podle svých schopností a aby se postupně se tak mohl, díky procvičování, dostat i k těm obtížnějším úlohám.

Projekt iTEM je společně řešen na Technické univerzitě v Liberci a NORD University v Bødø v Norsku. Tento projekt je financován z fondů EHP 2014 – 2021, program Vzdělávání. Prostřednictvím fondů EHP přispívají Island, Lichtenštejnsko a Norsko ke snižování ekonomických a sociálních rozdílů v Evropském hospodářském prostoru (EHP) a k posilování spolupráce s patnácti evropskými státy.

Cílem projektu je příprava studentů – budoucích učitelů tak, aby zvládli výzvy vzrůstající diverzity žáků ve třídě a také problémy spojené s používáním digitálních nástrojů při výuce. V rámci své přípravy budou zkoumat vzorky práce žáků s dvourozměrnými animacemi, jako

jsou ty, které nabízí webová stránka Mathematikus, a jejich využití k rozvoji prostorových dovedností žáků.

Dopady projektu v krátkodobém horizontu by se měly projevit ve zkušenostech studentů pedagogických fakult v užívání hardwaru a softwaru jako jsou Mathematikus, GeoGebra, micro:bit, 3D tisk atd. zajímavým a motivujícím způsobem. V dlouhodobém hledisku se očekává, že bude mít projekt pozitivní dopad rovněž na výuku a její výsledky na základních školách v regionech zmíněných zapojených univerzit i mimo ně. Také učitelé, kteří jako studenti byli zapojeni do projektu, budou lépe připraveni vyhovět různým potřebám heterogenních skupin žáků a budou schopni používat software jako nástroj při výuce a tím budou moci obohatit své hodiny a motivovat studenty.

Závěr

V článku je popsána interaktivní webová stránka www.mathematikus.de, která obsahuje úlohy na rozvoj prostorové představivosti. Jak pozorujeme z vlastní praxe i z mnoha studií, existují žáci a studenti, kterým činí potíže vytvořit si správné představy trojrozměrných objektů či prostorových situací ze dvourozměrných obrázků. Proto je třeba prostorovou představivost neustále procvičovat a rozvíjet. Z tohoto důvodu se snažíme hledat vhodné způsoby pomoci těmto žákům, jako je například výše zmíněná webová stránka a animované úlohy umístěné na ní. Pomocí virtuálních animací uživatel ihned pochopí jak jednotlivého úlohy a jejich řešení fungují.

Poděkování:

Tento článek byl vytvořen díky projektu iTEM (Improve Teacher Education in Mathematics), EHP-CZ-ICP-2-018.

Literatura:

[1] Baenninger M., Newcombe N.: *Enviromental input to development of sex-related differences in spatial and mathematical ability. Learning and Individual Differences*, 1995 7(4), 363 – 379.

[2] Baenninger M., Newcombe N.: *The role of experience in spatial last performance a meta analysis*. Sex roles 20, 327 – 343, 1989.

[3] Battista, M. T., Wheatley, G. H., Talsma, G.: *The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in pre-service elementary teachers*. In Journal for Research in Mathematics Education, 1982, pp. 332–340. ISSN 0021-8251.

[4] Carroll, J. B.: *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[5] Connolly T., Stansfield M., Boyle L.: *Games based learning advancements for multi-sensory human computer interfaces: techniques and effective practice*. New York: IGI Global (2009). ISBN 978-1-60566-360-9.

[6] Cruz, I., Febles, M., Díaz, J.: *Kevin: a visualiser pupil*. In For the Learning of Mathematics, 2000, pp. 30–36.

[7] van Garderen, D., Montague, M.: *Visual-Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities*. Learning Disabilities Research & Practice, 18(4), 246–254, 2003. https://doi.org/10.1111/1540-5826.00079.

[8] Gardner, H.: *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York, NY: Basic books, 2011.

[9] Linn M. C., Peterson A. C.: *Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta analysis*. Child Development, 56, 1479 – 1498 (1985).

[10] https://www.mathematikus.de/startseite

[11] McGee, M. G. *Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences*. In Psychological Bulletin, 1985, pp. 889–918. ISSN 0021-8251.

[12] Olkun, S.: *Making connections: Improving spatial abilities with engineering drawing activities*. International Journal of Mathematics Teaching and Learning, 2003 3(1), 1–10.

Petra Pirklová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1
petra.pirklova@tul.cz

Daniela Bímová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1
daniela.bimova@tul.cz

Jiří Břehovský
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1
jiri.brehovsky@tul.cz

DYNAMICKÉ PRVKY V GEOGEBŘE PŘI KONSTRUKCI KUŽELOSEČEK

Jakub Poruba[1], Pavel Cimbálník[2]

[1]Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
[2]Střední průmyslová škola, Přerov, Havlíčkova 2

Abstrakt: GeoGebra patří mezi nejpoužívanější software dynamické geometrie. Její výhoda tkví v jednoduchém ovládání a možností sdílet materiály online prakticky na jedno kliknutí. Tato skutečnost je přínosná i v případě distanční výuky učiva analytické geometrie v rovině, a to konkrétně kuželoseček, neboť umožňuje na pár kliknutí vytvořit velké množství podpůrných nástrojů, které mohou pomoci studentům lépe v reálném čase ukázat a pochopit problematiku. Příspěvek proto představuje vybrané nástroje při výuce vybraných kuželoseček.

Klíčová slova: Kuželosečky, GeoGebra, dynamické prvky.

Dynamic Tools in GeoGebra for Construction of Conic Sections

Abstract: GeoGebra is one of the most widely used dynamic geometry software. Its advantage is its simple environment and the ability to share materials online within one click. This fact is also beneficial in case of distance learning of the planar analytical geometry, especially conic sections, as it allows to create many supporting tools and materials using a few clicks that can help students understand and visualise the given problem in real time. The contribution therefore presents selected tools used in teaching given conic sections.

Key words: Conic sections, GeoGebra, dynamic tools.

Úvod

GeoGebra je dynamický nástroj určen pro všechny úrovně vzdělávání a představuje programové vybavení určené ke konstrukci grafů funkcí, tabulek, řešení rovnic, statistických výpočtů, realizaci dynamických geometrických konstrukcí v rovině i v prostoru a řady dalších; to vše v jednom balíčku. Aplikace je vydaná pod licencí GNU General Public License a tedy je k dispozici bezplatně. Jedná se o multiplatformní software postavený na platformě Java a HTML. Program je kompletně lokalizován do českého jazykového prostředí, a to včetně nápovědy.

GeoGebra je k dispozici ke stažení na www stránkách www.geogebra.org pro všechny v současnosti existující platformy (Windows, Linux, MacOS, iOS, Android). Nástroje GeoGebry je možné používat i přímo ve webovém prostředí.

Na internetu je k dispozici velké množství manuálů a podpůrných materiálů včetně příkladů, a to jak v češtině, tak v angličtině, kde je také nabídka zdrojů bohatší. Na internetu jsou rovněž dostupné již vytvořené didaktické materiály, které je možné přímo nebo po drobných úpravách využívat k výuce matematiky, samozřejmě s ohledem na ustanovení autorského zákona při jejich využívání.

Pro svou jednoduchost se GeoGebra rychle stala lídrem v používání dynamického matematického software v mnoha oblastech vědy, výzkumu, technologií, inženýrství, matematiky a matematického vzdělání. [1, 2]

1 Kuželosečky ve výuce na střední škole

V rámci středoškolského učiva, podle rámcového vzdělávacího programu pro gymnaziální vzdělávání, se kuželosečky řadí do oblasti geometrie, a to konkrétně rovinné geometrie analytické. Nejčastěji pak ve školních vzdělávacích programech bývají řazeny do třetího či čtvrtého ročníku. Vzhledem ke svému zařazení do analytické geometrie je tedy zejména obsahem učiva vyjádření vlastností kuželoseček pomocí „výpočtů," nikoliv jako výsledek konstrukční geometrie.

Kuželosečky se standardně definují jako rovinný útvar, který vzniká rovinným řezem na nekonečné rotační kuželové, resp. válcové ploše (případně se používá model rotačního dvojkužele). V běžném středoškolském pojetí se pak pod pojmem kuželosečky chápou regulární kuželosečky, tedy takové, které vznikají průnikem rotační kuželové plochy s rovinou neprocházející jejím vrcholem nebo jako průnik rotační válcové plochy s rovinou, která je různoběžná s osou rotace, tedy kružnice, elipsa, hyperbola a parabola. Singulární kuželosečky, tedy takové, které vzniknou průnikem rotační kuželové plochy a roviny procházející jejím vrcholem, příp. průnikem rotační válcové plochy a roviny rovnoběžné s osou rotace, tedy bod, dvojice různoběžek, přímka a dvojice rovnoběžek, se běžně neuvádějí.

Dalším standardním znakem výuky kuželoseček v rámci středoškolského učiva je, že se zavádějí jako množiny bodů dané vlastnosti. Jako první se žáci seznamují s kružnicí jakožto množinou bodů roviny, jejichž vzdálenost od pevně zvoleného bodu v rovině je konstantní. Elipsu, hyperbolu a parabolu pak zavádíme také jako množiny bodu dané vlastnosti, avšak vycházíme z tzv. ohniskových definic. V rámci výuky jednotlivých kuželoseček se pak žáci seznamují a pracují zejména se středovými, resp. vrcholovými rovnicemi, obecnými rovnicemi, charakteristickým trojúhelníkem (v případě elipsy a hyperboly), asymptotami a tečnami k dané kuželosečce. S pojmy jako jsou vrcholová a řídící kružnice, případně s parametrickými vyjádřeními kuželoseček a dalšími bývají nejčastěji seznámeni v rámci volitelných seminářů, nikoliv během standardních hodin matematiky. [3, 4, 5]

Během výuky kuželoseček však můžeme narazit také na úskalí, která mohou bránit správnému pochopení tohoto tématu. Mezi nejčastější z nich patří slabé základy středoškolské vektorové algebry, nepochopení rozdílu mezi typy rovnic, nepochopení určení základních parametrů (vrcholy, střed, velikosti poloos atp.), nesystematičnost či zahlcení příklady bez potřebného vysvětlení. Tato skutečnost také významně vykrystalizovala během distanční výuky, kdy bylo potřeba nalézt vhodný způsob, jak na dálku, a přesto co nejefektivněji předat danou problematiku žákům. Cílem bylo tedy nalézt vhodný software, v čemž se GeoGebra ukázala jako uživatelsky nejpřívětivější software jak pro učitele, tak i pro žáky, uvědomit si, jakou cílovou skupinou daní žáci jsou a snažit se danou problematiku znázornit co nejjednodušeji, ale zároveň s dostatečnou názorností.

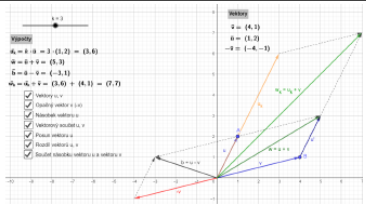
2 Podpůrné materiály v GeoGebře

Pro podporu výuky tématu kuželoseček bylo vytvořeno celkem 14 podpůrných materiálů, které obsahují jak základy vektorové algebry, tak přímo danou problematiku kuželoseček. Všechny tyto materiály byly zpracovány do formy metodického listu. Primárním cílem podpůrných materiálů není to, aby sloužily k samostudiu (ačkoliv po probrání učiva samozřejmě jako takováto opora použity být mohou). Tyto materiály mají sloužit zejména jako vizuální doplněk pro vyučujícího a detailně jsou zpracovány v [2]. Jedná se o materiály následující:

- 1. Soustava souřadnic, souřadnice bodu, vzdálenost dvou bodů
- 2. Vektory
- 3. Součet, rozdíl a násobek vektorů skalárem
- 4. Skalární součin a odchylka dvou vektorů
- 5. Lineární závislost (kombinace) vektorů
- 6. Přímka v rovině
- 7. Vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- 8. Kružnice
- 9. Elipsa
- 10. Parabola
- 11. Hyperbola
- 12. Vzájemná poloha přímky a elipsy (kružnice)
- 13. Vzájemná poloha přímky a paraboly
- 14. Vzájemná poloha přímky a hyperboly

Samotný metodický list pro práci s dynamickým materiálem vytvořeným v GeoGebře je uveden na Obr. 1.

Metodický list č. 3

Název tématu:	**Součet a rozdíl vektorů, násobek vektoru skalárem**
Tematický celek:	Analytická geometrie v rovině – vektorová algebra
Vzdělávací oblast:	Matematické vzdělávání
Vzdělávací obor:	Matematika
Charakteristika:	Metodický materiál je zaměřen na problematiku výpočtu součtu a rozdílu dvou vektorů a násobku vektoru skalární hodnotou s využitím programu Geogebra.
Rozvíjené klíčové kompetence:	kompetence k učení kompetence k řešení problémů kompetence komunikační
Očekávané výstupy:	Studenti budou schopni - vysvětlit postup součtu a rozdílu vektorů, násobek vektoru skalární hodnotou - určit násobek skaláru a vektoru - určit součet a rozdíl dvou vektorů vč. varianty s násobkem skalární veličinou jednoho z nich - určit opačný vektor - sestrojit součet a rozdíl vektorů v SW Geogebra
Požadované znalosti a vědomosti:	znalost základních konstrukcí v SW Geogebra znalost základních pojmů vektorové algebry znalost základních a obecných matematických postupů a výpočtů znalost základů ovládání počítače s OS instalovaným na výpočetní technice školy (MS Windows 10) znalost používání běžných počítačových aplikací (MS Word, MS Excel apod.)
Formy a metody výuky:	Forma výuky - hromadná s prvky individuální výuky - samostatná práce studentů Metody výuky - frontální - názorně-demonstrační a aktivizující metody - metody praktických činností a dovednostně-praktické
Místo realizace výuky	odborná učebna s výpočetní technikou pro každého ze studentů
Délka výuky:	dvouhodinová vyučovací jednotka (2x 45 min.)
Časový rozvrh a fáze výuky:	individuální volba vyučujícího na základě vlastních potřeb a ve vazbě na průběh výuky konkrétní skupiny studentů nebo třídy
Diagnostika znalostí:	Diagnostika úrovně získaných vědomostí je realizována: - prostřednictvím samostatných praktických cvičení - hodnocení vypracovaných zadání domácích cvičení - samostatné nebo skupinové praktické konstrukční testy
Didaktické a materiální prostředky:	***vyučující*** – počítač / notebook s přístupem na internet, dataprojektor, promítací plátno nebo interaktivní tabule / panel, tabule pro zápis poznámek, fixy, SW Geogebra, připravené výukové materiály (prezentace ve formátu PDF nebo PPT, grafické předlohy ve formátu GGB pro prostředí SW Geogebra) ***studenti*** – počítač s přístupem na internet, SW Geogebra, poznámkový sešit, psací potřeby, volitelně USB flash disk pro ukládání vytvořených konstrukcí
Popis využití metodického materiálu	Zpracovaný metodický materiál předkládá konstrukci součtu a rozdílu dvou vektorů. Doplněna je i varianta součtu dvou vektorů, kdy jeden z nich je násobkem skalární hodnotou. Prezentována je varianta vektorového součtu a rozdíl pomocí rovnoběžníkové metody i posunem jednoho z vektorů. Pomocí bodů *A* nebo *B* je možné měnit velikost a směr obou výchozích vektorů *u* a *v*. Ve vazbě na tyto úpravy je prováděn automatický přepočet vektorového součtu a rozdílu. Pomocí posuvníku *k* je možné nastavovat hodnotu pro násobek vektoru skalární hodnotou a ta je využívána ve variantní možnosti součtu dvou vektorů. Současně s grafickými konstrukcemi jsou vypisovány výsledné hodnoty vektorového součtu nebo rozdílu a souřadnice vstupních vektorů (vč. opačného vektoru), popř. další informace. I tyto hodnoty jsou dynamicky aktualizovány ve vazbě na změny velikosti a směru vstupních vektorů. Studenti si mohou pomocí vytvořeného materiálu kontrolovat případné výsledky cvičení realizovaných numerickými metodami. Prostřednictvím aktivních ovládacích prvků (zaškrtávací tlačítka) je možné postupně vypínat nebo zapínat jednotlivé konstruované objekty a textové informace.
Náhled vzdělávacího materiálu:	
Autor:	Ing. Pavel Cimbálník

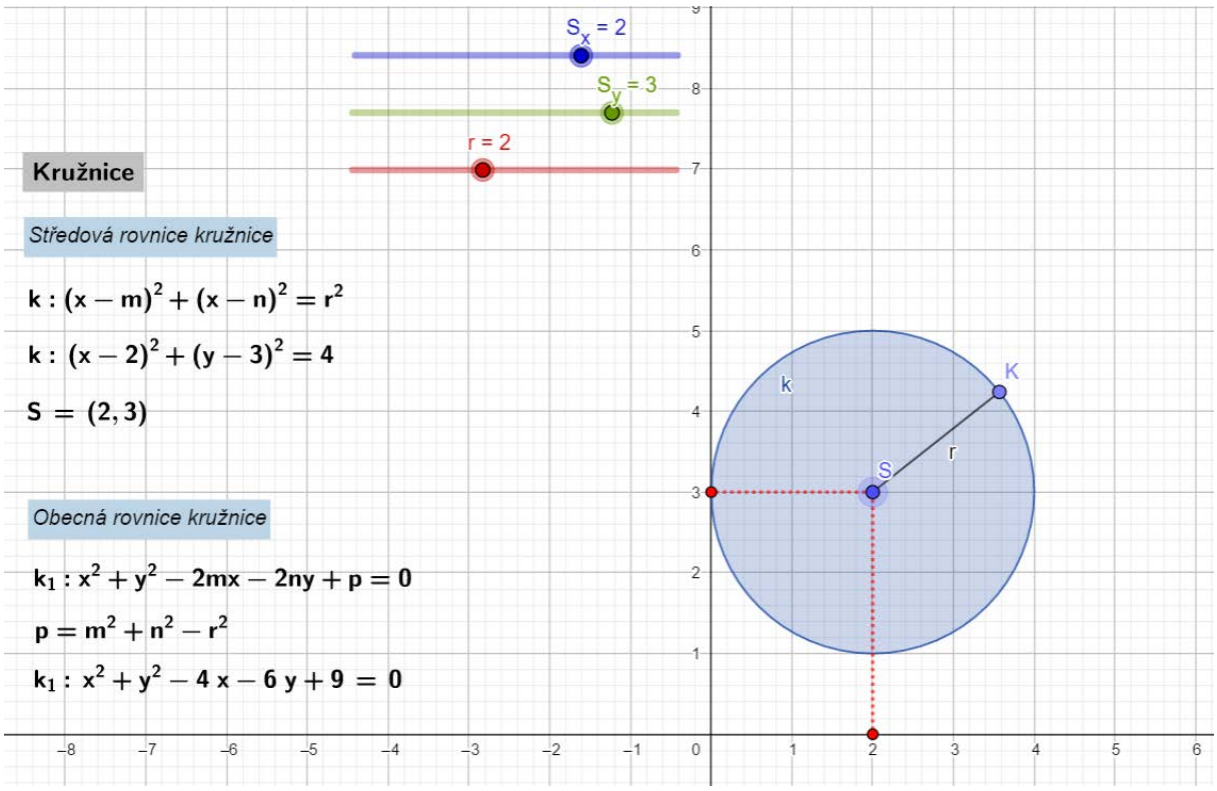
Obrázek 1: Ukázka metodického listu (na příkladu součtu a rozdílu vektorů, násobek vektorů skalárem)

2.1 Vybrané materiály s dynamickými prvky v GeoGebře

2.1.1 Kružnice

Vytvořený materiál je zaměřen na představení charakteristických vlastností kružnice, určení středové a obecné rovnice kružnice včetně její konstrukce a prezentaci změn polohy středu a velikosti poloměru kružnice na tvar rovnice. Pomocí bodu S (střed kružnice) je možné změnit polohu středu kružnice v rámci přednastavených hodnot celých čísel v rozsahu - 5 a 5 v obou směrech os x nebo y. Změnu polohy středu kružnice je možné realizovat rovněž pomocí posuvníků S_x nebo S_y. Bod K, který leží na kružnici je pevně svázán s obvodem kružnice a posuvníkem r. Každá změna z těchto parametrů má vliv na automatickou aktualizaci středové a obecné rovnice kružnice. Materiál předkládá studentům možnost sledovat změnu tvaru obou rovnic v závislosti na změnách uvedených parametrů a uvědomit si tak vliv těchto hodnot na tvorbu jednotlivých rovnic.

Prostřednictvím vytvořeného materiálu studenti získají komplexní přehled o charakteristických vlastnostech kružnice. Pomocí vlastních konstrukcí v prostředí programu GeoGebra si mohou ověřit výsledky vlastních numerických výpočtů zadaných příkladů.



Obrázek 2: Náhled dynamického materiálu na téma kružnice

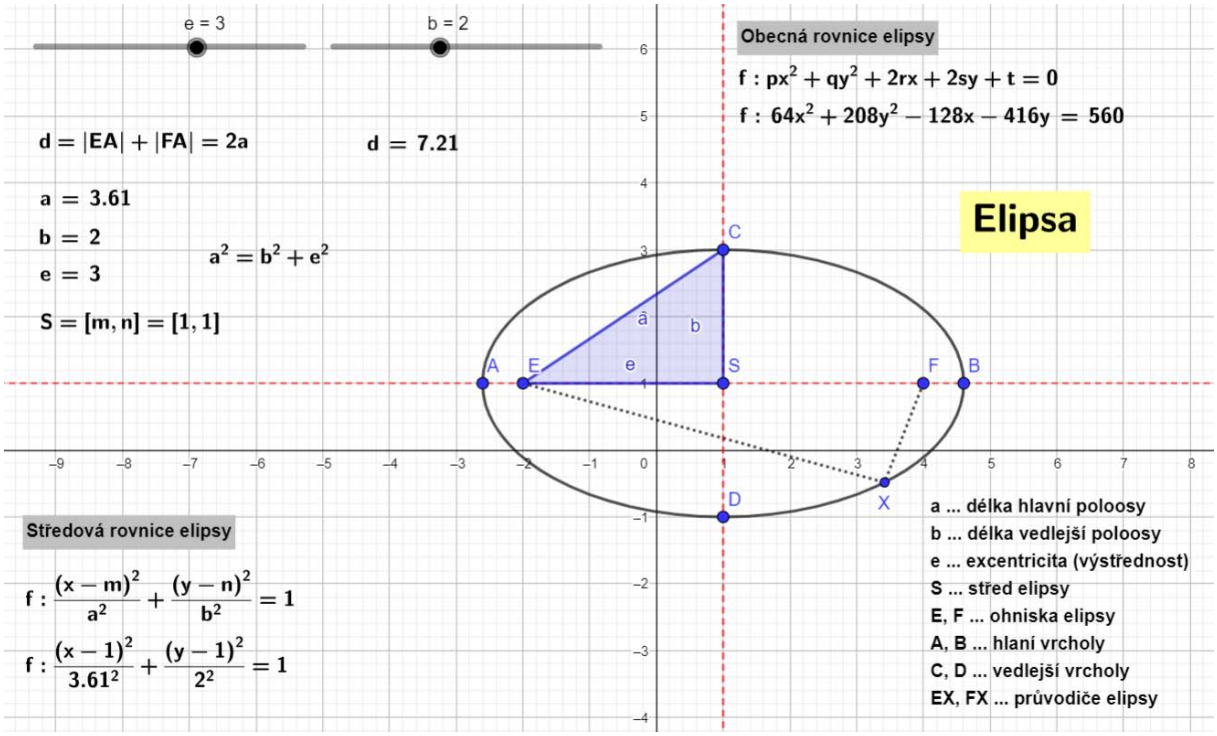
2.1.2 Elipsa

Zpracovaný materiál je určen k prezentaci charakteristických vlastností elipsy a tvarů středové a obecné rovnice elipsy. Pomocí středu elipsy (bod S) je možné změnit polohu středu a sledovat vliv jeho změny na tvar středové a obecné rovnice. Podobně je možné pomocí posuvníku b a e změnit velikost vedlejší poloosy (b) a excentricity (e) a také zde sledovat vliv těchto změn na tvar elipsy a její středové a obecné rovnice. Posuvníky jsou konfigurovány pouze na změny v rámci celých čísel v rozsahu hodnot 0 až 5 (lze však upravit dle vlastních potřeb). Obě rovnice jsou automaticky dynamicky aktualizovány v závislosti na těchto změnách. Při nastavení excentricity (e) na hodnotu 0 je prezentována změna tvaru elipsy na kružnici.

Materiál obsahuje kromě textových, automaticky se aktualizujících informací ve tvaru středové a obecné rovnice, také informace s výpočty součtu vzdálenosti průvodičů, souřadnice středu S a charakteristických parametrů a, b, e. Prezentovány jsou rovněž popisné informace jednotlivých části a charakteristik elipsy

Animací bodu X může vyučující prezentovat jednu ze základních vlastností elipsy, a to, že součet vzdáleností spojnic EX a FX (průvodiče) je v každém bodě elipsy konstantní (prezentováno hodnotou d, které se při animaci nemění).

Prostřednictvím vytvořeného materiálu studenti získají komplexní přehled o charakteristických vlastnostech elipsy. Pomocí vlastních konstrukcí v prostředí programu GeoGebra si mohou ověřit výsledky vlastních numerických výpočtů zadaných příkladů.



Obrázek 3: Náhled dynamického materiálu na téma elipsy

2.1.3 Parabola

Zpracovaný materiál je zaměřen na prezentaci charakteristických vlastností paraboly a tvarů středové a vrcholové rovnice paraboly.

Parabola je konstruována ve standardním tvaru (osa paraboly je rovnoběžná s osou y). Změnou souřadnic ohniska F (přemístění bodů pomocí tažením myší) nebo posunem řídící přímky d, může vyučující prezentovat změnu tvaru paraboly v závislosti na změně velikosti parametru paraboly p a s tím související vzdálenosti ohniska F nebo řídící přímky d od vrcholu V. Zvětšování velikosti parametru p paraboly má za následek její širší tvar a naopak, jeho zmenšováním se tvar paraboly zužuje. Ve vazbě na tyto změny jsou dynamicky aktualizovány oba uvedené typy rovnic paraboly.

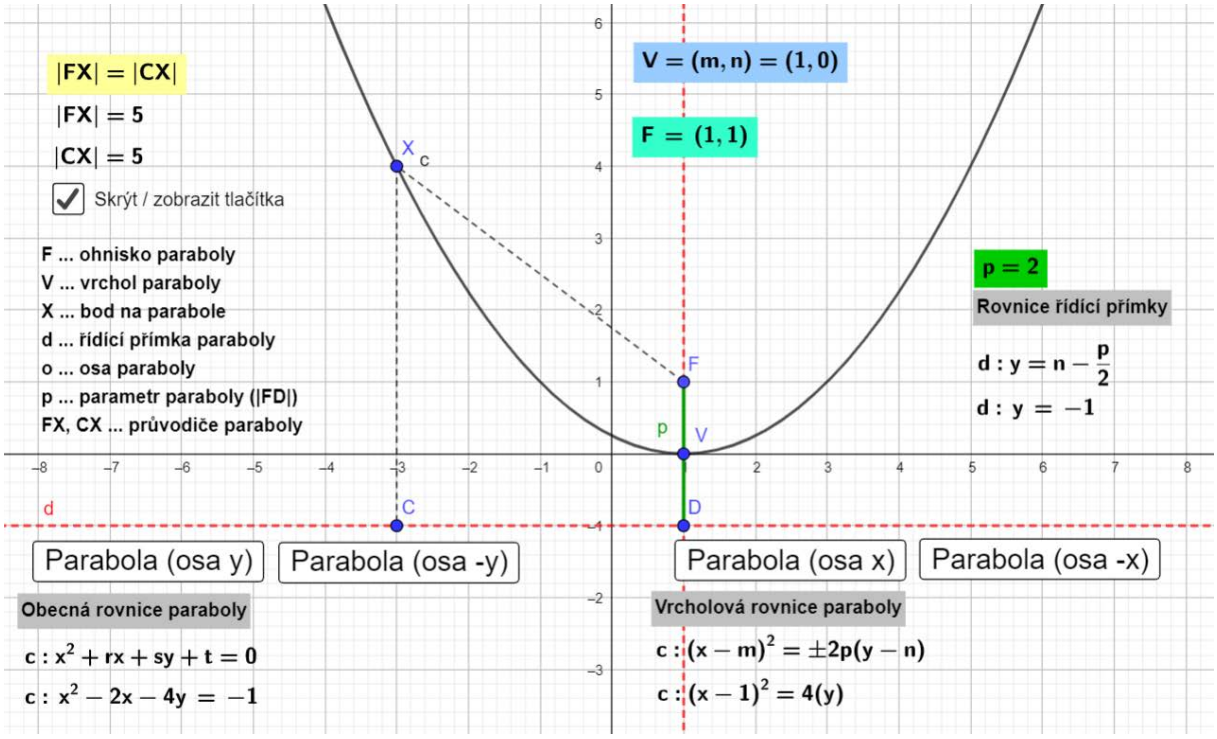
Do materiálu jsou doplněna tlačítka pro změnu základních poloh paraboly. Současně s tím jsou automaticky aktualizovány jednotlivé rovnice. Tutu funkcionalitu je možné pomocí zaškrtávacího tlačítka skrýt pro zpřehlednění zobrazovaných informací.

Vyučující může zároveň demonstrovat vliv velikosti parametru p paraboly (tmavě zelené podkreslení) a souřadnic jejího vrcholu (pomocí změny polohy ohniska F) na tvar rovnice řídící přímky d.

Pomocí bodů A nebo B (ve výchozím stavu jsou skryté) je možné měnit polohu řídící přímky a tím i měnit tvar a polohu (směr) paraboly mimo základní směry vyučované na střední škole.

Animací bodu X (ručně nebo automaticky) může vyučující prezentovat jednu ze základních vlastností paraboly, a to, že vzdálenosti spojnic FX a CX (průvodiče) jsou v každém bodě paraboly stejné.

Prostřednictvím vytvořeného materiálu studenti získají komplexní přehled o charakteristických vlastnostech paraboly. Pomocí vlastních konstrukcí v prostředí programu GeoGebra si mohou ověřit výsledky vlastních numerických výpočtů zadaných příkladů.



Obrázek 4: Náhled dynamického materiálu na téma parabola

2.1.4 Hyperbola

Zpracovaný materiál je zacílen na prezentaci charakteristických vlastností hyperboly a tvarů středové a obecné rovnice hyperboly.

Změnou souřadnic jednoho z ohnisek hyperboly F_1 nebo F_2 a změnou vzdálenosti vrcholů A nebo B od ohnisek (realizovány pomocí změny souřadnic konstrukčního bodu Y) je možné demonstrovat změnu tvaru hyperboly. Pomocí změny polohy hlavní a vedlejší osy je možné realizovat úpravu polohy a tvaru hyperboly na poloze středu S. Ve vazbě na tyto změny jsou automaticky aktualizovány koeficienty obou typů rovnic hyperboly a jejich tvar.

Součástí konstrukce je zároveň prezentace základních popisných informací k jednotlivým částem konstrukce hyperboly a charakteristické výpočty (velikost excentricity, kde se uplatňuje Pythagorova věta, velikost rozdílů průvodičů apod.).

Zkonstruovány jsou rovněž pomocná kružnice a obdélník umožňující na základě zkonstruovaných bodů (C, D, E, F) určit průběh asymptot.

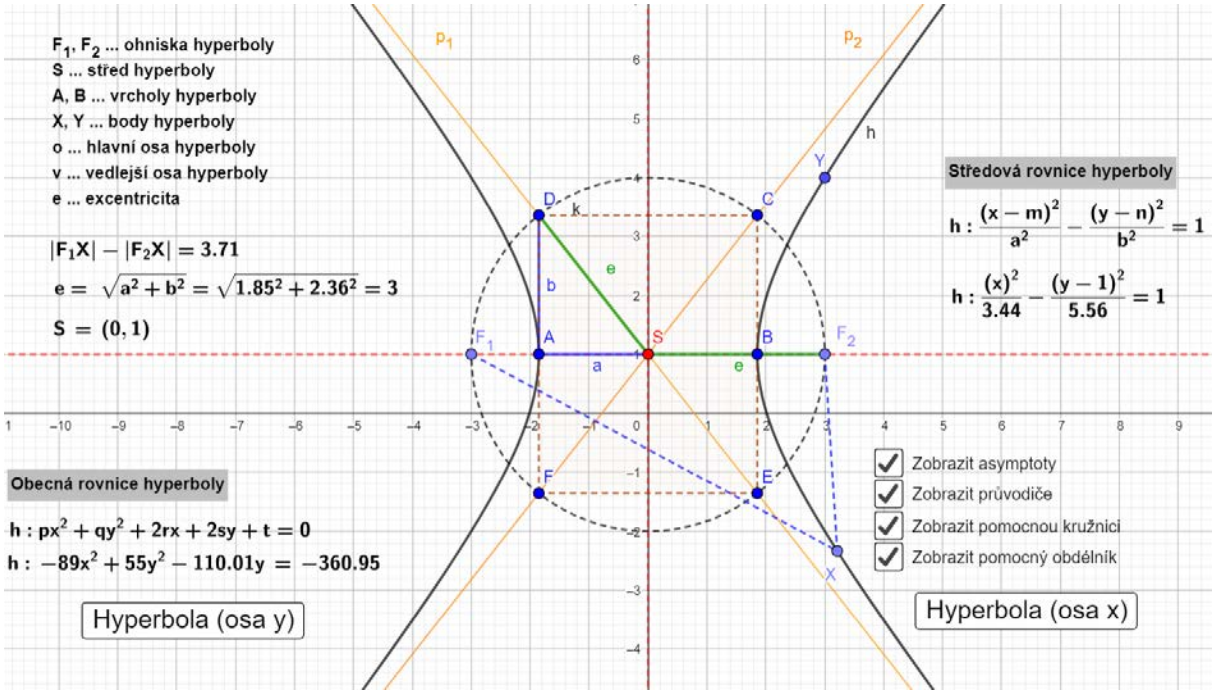
Konstrukce umožňuje rovněž prezentovat základní charakteristickou vlastnost hyperboly, a to, že rozdíl délek jejich průvodičů F_1X a F_2X je v každém bodě konstrukce hyperboly konstantní.

Konstrukce hyperboly je ve výchozím stavu realizována s hlavní osou rovnoběžnou s osou y. Materiál byl současně doplněn o dvě tlačítka umožňující orientaci hlavní osy

hyperboly a její změnu na rovnoběžnost s osou y a naopak. Současně se změnou orientace hyperboly jsou realizovány automatický úpravy rovnic a výpočty jejích koeficientů.

Pro zvýšení přehlednosti je možné vypnout nebo zapnout zobrazování některých částí konstrukce (asymptoty, pomocný obdélník nebo kružnice a další).

Prostřednictvím vytvořeného materiálu studenti získají komplexní přehled o charakteristických vlastnostech hyperboly. Pomocí vlastních konstrukcí v prostředí programu GeoGebra si mohou ověřit výsledky vlastních numerických výpočtů zadaných příkladů.



Obrázek 5: Náhled dynamického materiálu na téma hyperbola

2.1.5 Vzájemná poloha přímky a hyperboly

Podpůrný materiál je zaměřen na grafickou prezentaci všech možností vzájemných poloh přímky a hyperboly.

Červené přímky představuje polohu přímky a hyperboly se dvěma průsečíky. Přímka může být buď sečnou jedné hyperboly nebo může protínat obě hyperboly, každou v jednom bodě. Tyto varianty je možné měnit pomocí změny polohy a směru přímek pomocí neoznačených bodů umístěných na přímkách (nejsou to průsečíky) nebo tažením celé přímky. Zároveň jsou aktualizovány jednotlivé průsečíky a informace o jejich souřadnicích. Pokud je přímka přemístěna do polohy vnější přímky mimo hyperboly, nemá s ní žádné průsečíky a tyto jsou z konstrukce skryty včetně doprovodných informací. Opačnou funkcionalitu má přímka nakreslena černou barvou, která je při spuštění souboru GeoGebry konstruována jako vnější a úpravou její polohy a směru je možné docílit její změny na sečnu nebo přímku procházející oběma hyperbolami.

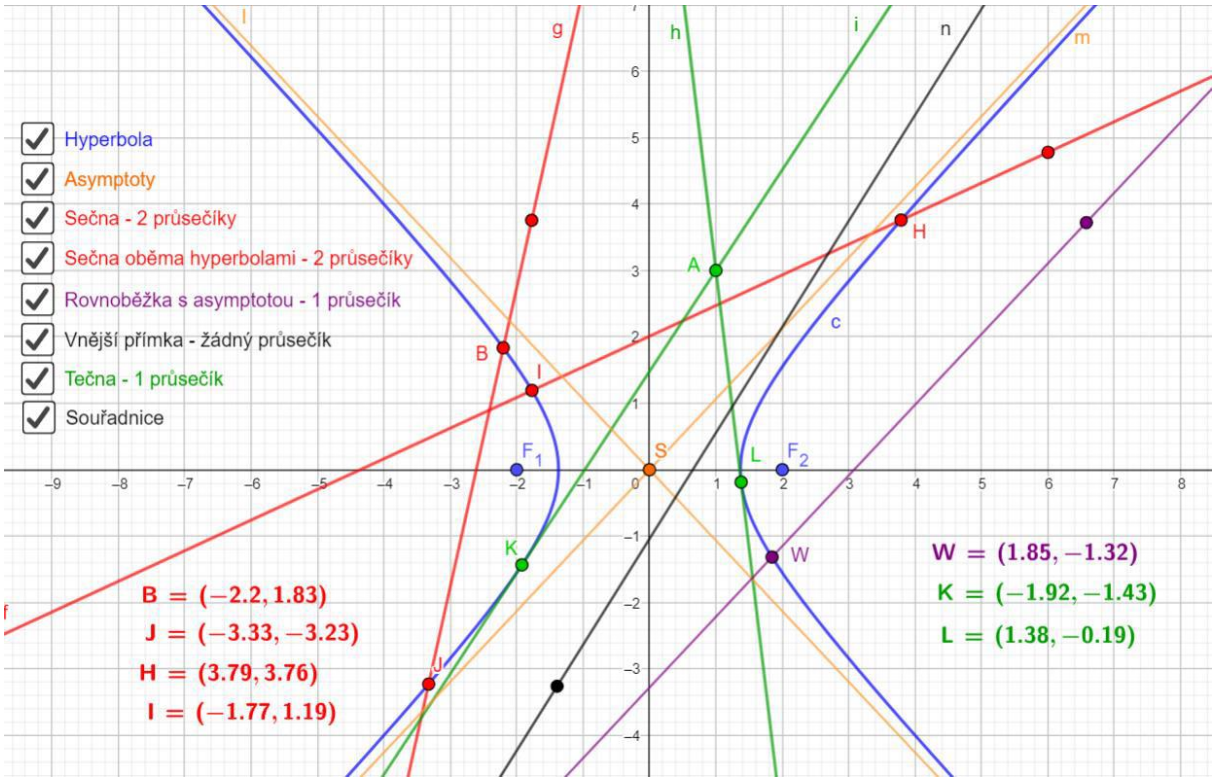
Přímky nakreslené zelenou barvou představují tečny k hyperbole. Jedním vnějším bodem je možné vést dvě přímky s jednou tečnou ke každé z hyperbol.

Fialovou barvou je označena speciální varianta vzájemné polohy přímky a hyperboly, a to přímka rovnoběžná s asymptotou.

Pomocí změny polohy ohnisek F_1 a F_2 na ose x je možné měnit tvar obou hyperbol. Ve vzájemné vazbě na tyto změny je automaticky aktualizováno umístění jednotlivých průsečíků a jejich souřadnic.

Pomocí zatrhávacích boxů je možné skrýt nebo zobrazit konkrétní přímky, popř. hyperbolu a prezentovat tak pouze jednu specifickou variantu vzájemné polohy přímky a hyperboly. Společně s touto funkcionalitou jsou skrývány nebo zobrazovány související průsečíky a souřadnice těchto průsečíků.

Prostřednictvím vytvořeného materiálu studenti získají komplexní přehled o možných typech vzájemných vztahů přímky a hyperboly. Pomocí vlastních konstrukcí v prostředí programu GeoGebra si mohou ověřit výsledky vlastních numerických výpočtů zadaných příkladů.



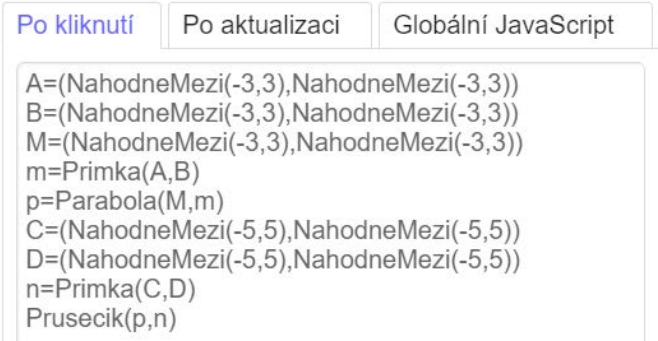
Obrázek 6: Náhled dynamického materiálu na téma vzájemná poloha přímky a hyperboly

2.2 Generování libovolných zadání v GeoGebře

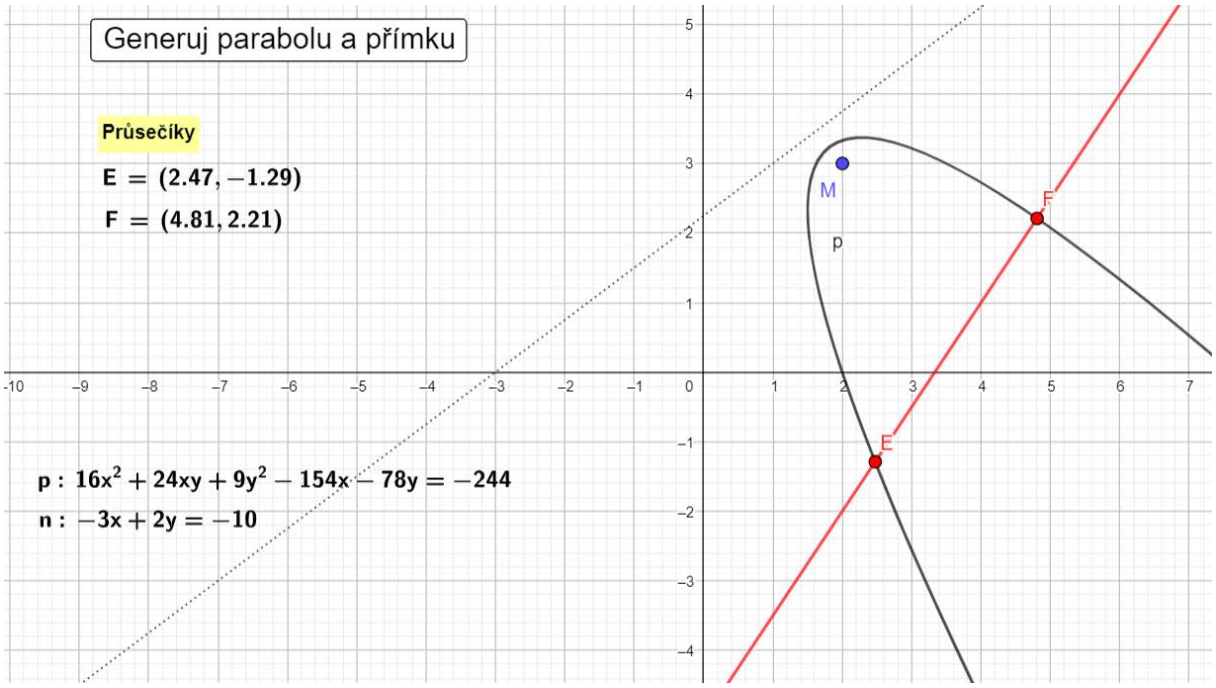
GeoGebra také disponuje podporou skriptování umožňující tvorbu specificky zaměřených a snadno ovladatelných interaktivních materiálů, např. s podporou náhodně generovaných zadání. Skripty představují sekvenci příkazů, které mohou být vykonány postupně jeden po druhém a mohou realizovat požadované činnosti. Vyvolány mohou být např. kliknutím na nějaký objekt GeoGebry (tlačítko), aktivitou (změna pozice bodu geometrické

konstrukce apod.) nebo při nahrávání souboru s konstrukcí. GeoGebra umožňuje tvorbu skriptů pomocí příkazů GGBScript nebo programovacího jazyka Javascript.

Generování konstrukcí nebo příkladů pomocí skriptů je možné využít např. pro automatickou tvorbu zadání příkladů nebo domácích úloh k procvičování probíraných témat. Postup generování je znázorněn na následujících obrázcích:



Obrázek 7: GeoGebra – příklad skriptu



Obrázek 8: GeoGebra – výsledek generování konstrukce pomocí skriptu

Závěr

Vytvořené materiály mají za úkol poskytnout pedagogickým pracovníkům vhodnou a dostatečnou oporu k zabezpečení výuky uvedených témat a usnadnit jim přípravu na vyučovací hodiny i vlastní prezentaci témat. Studentům mohou tyto materiály sloužit k ověření teoretických znalostí získaných v hodinách matematiky a pomoci jim při řešení konkrétních cvičení a kontrole vypracovaných řešení.

Poděkování:

Příspěvek vznikl za podpory SGS01/PřF/2020-2021 Podpora vědecké činnosti studentů v dílčích oblastech matematiky.

Literatura:

[1] FERDIÁNOVÁ, V., PORUBA J.: *New Tools for Monge Projection in GeoGebra.* Proceedings, 16th Conference of Applied Mathematics Aplimat 2017. 1st edition. Bratislava: Slovak university of technology in Bratislava, 2017. p. 527-534. ISBN 978-80-227-4650-2

[2] CIMBÁLNÍK, P.: *Analytická geometrie v rovině pro SŠ s využitím prostředí Geogebra*. Ostrava, 2021. Závěrečná práce studenta celoživotního vzdělávání. Ostravská univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Mgr. Jakub Poruba.

[3] Národní ústav pro vzdělávání: *Rámcové vzdělávací programy* [online]. Praha, 2011-2020 [cit. 2021-11-30]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp

[4] DAVIDOVÁ, E.: *Metodika výuky analytické geometrie lineárních útvarů na SŠ.* [online]. Ostravská univerzita v Ostravě. Ostrava, 2011. [cit. 2021-11-30] dostupné z: https://wigym.cz/wp-content/uploads/2018/09/03_Davidov%C3%A1_Metodika-v%C3%BDuky-analytick%C3%A9-geometrie-kvadratick%C3%BDch-%C3%BAtvar%C5%AF.pdf

[5] POLÁK, J.: *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně.* Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7238-449-5.

PORUBA Jakub, Mgr.
Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita
30. dubna 22
701 03 Ostrava
jakub.poruba@osu.cz

CIMBÁLNÍK Pavel, Ing.
Střední průmyslová škola, Přerov, Havlíčkova 2
Havlíčkova 2
750 02 Přerov
pavel.cimbalnik@sps-prerov.cz

REGIOMONTANŮV PROBLÉM – ŘEŠENÍ UŽITÍM DYNAMICKÝCH APPLETŮ PROGRAMU GEOGEBRA

Kamila Průdková, Roman Hašek

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta

Abstrakt: Příspěvek je věnován problému určení takové vzdálenosti odstupu pozorovatele od sochy umístěné na podstavci, aby ji mohl sledovat v maximálním možném zorném úhlu. Bude ukázáno, jak lze s použitím dynamického geometrického software GeoGebra vhodně a názorně interpretovat různé metody řešení problému a přiblížit ho tak řešitelům na různých stupních vzdělávání, od žáků základních škol až po vysokoškoláky. Řešení problému viditelnosti sochy bude navíc představeno v širším kontextu matematického učiva a jeho aplikací. Jeho součástí tak budou i dílčí úlohy věnované nepřímému určení výšky sochy na podstavci přímo v reálném prostředí, mimo školní třídu.

Klíčová slova: Výuka matematiky, GeoGebra applety, online výukové prostředí.

Regiomontanus' problem – solution using GeoGebra dynamic applets

Abstract: The contribution is devoted to the problem of determining the distance of the observer from the statue placed on the pedestal so that he can observe it at the maximum possible viewing angle. It will be shown how the dynamic geometry software GeoGebra can interpret and illustrate various problem-solving methods and bring it closer to solvers at multiple levels of education, from primary school students to university students. In addition, the solution to the problem of sculpture visibility will be presented in the broader context of the mathematics curriculum and its applications. It will also include partial tasks devoted to indirectly determining the statue's height on the pedestal directly in the natural environment, outside the school classroom.

Keywords: Math teaching, GeoGebra applets, online learning environment.

Úvod

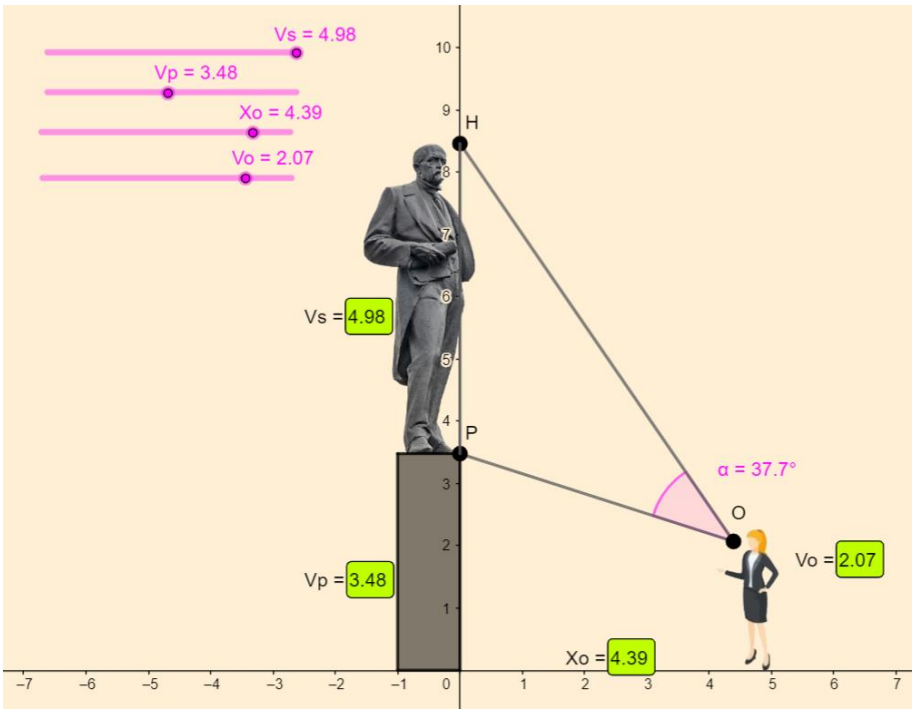
Pod pojmem *Regiomontanův problém* se skrývá úloha věnovaná nalezení optimálního postavení pozorovatele pro dosažení nejlepší viditelnosti určitého objektu umístěného nad úrovní jeho očí, většinou sochy, obrazu, případně svislé tyče [15]. Tuto úlohu poprvé formuloval německý matematik 15. století Johannes Müller, zvaný Regiomontanus [14]. Je zajímavé, že úloha má několik podob zadání, přitom není přesně známo, které z nich je to originální. V [1] je uvedeno, že Regiomontanus napsal dopis svému příteli, kde uvedl následující problém**:** *V jakém bodě na zemi se kolmo zavěšená tyč jeví jako největší?* Stejně je

zadání tohoto problému interpretováno v [2]. Naopak v [15] lze najít zadání, které se týká obrazu: *Na zdi visí obraz známé velikosti. Jak daleko od zdi by měl pozorovatel stát, aby viděl obraz v největším zorném úhlu?* Zcela odlišné kulisy problému jsou nabídnuty v [3], kde je zadán jako otázka nalezení optimálního postavení hráče rugby pro kop po pětce (tzv. konverze) [17].

V tomto článku budeme pracovat s interpretací Regiomontanova problému jako úlohy nalezení místa optimální viditelnosti sochy, konkrétně určení takové vzdálenosti odstupu pozorovatele od sochy umístěné na podstavci, aby ji mohl sledovat v maximálním možném zorném úhlu. Nejprve představíme zadání úlohy, potom se budeme věnovat různým přístupům k jejímu řešení a s tím souvisejícím otázkám využití ve výuce matematiky na základní škole a v přípravě učitelů matematiky, abychom nakonec přidali pár souvisejících problémů, rovněž vhodných pro použití ve výuce. V každé z uvedených fází bude klíčovou roli hrát dynamický geometrický program GeoGebra (https://www.geogebra.org). Jedním z cílů článku je ukázat, že prostředí tohoto programu nám dává možnost volit při řešení i poměrně náročného geometrického problému různé postupy, tak, aby bylo jeho řešení přístupno žákům na různých úrovních matematického vzdělání. Všechny použité materiály jsou dostupné v GeoGebra knize [6]. Problém viditelnosti sochy je v článku ilustrován za využití fotografií sochy T. G Masaryka od Julia Pelikána v Novém Veselí. Všechny fotografie pořídila autorka článku.

1 Zadání úlohy

Viz Obr. 1. Pozorovatel s výškou očí *Vo* sleduje sochu o výšce *Vs* umístěnou na podstavci výšky *Vp*. Naším úkolem je zjistit, v jaké vzdálenosti od podstavce sochy musí pozorovatel stát, aby sledoval sochu v největším možném zorném úhlu.

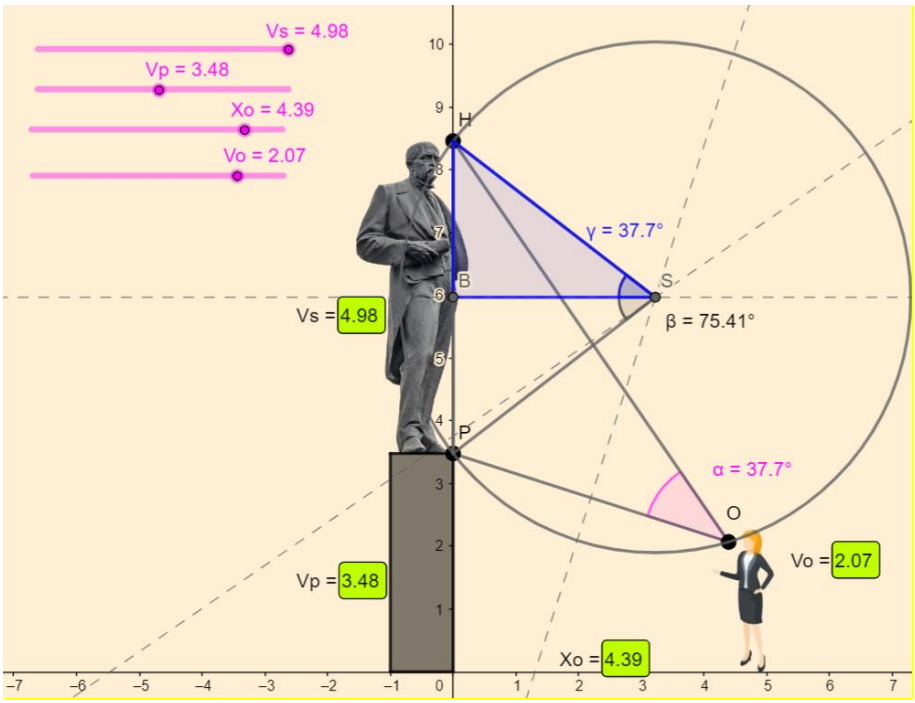


Obr. 1: Regiomontanův problém; náhled GeoGebra appletu [7]

Bod P = [0, v_p] označuje patu sochy, přičemž v_p je výška podstavce. Bod H = [0, v_p+v_s] označuje hlavu sochy, přičemž vs je výška sochy. Bod O = [x_o, v_o] označuje aktuální pozici očí pozorovatele sochy, přičemž x_o je vzdálenost pozorovatele od sochy a v_o je výška očí pozorovatele. Souřadnice bodů *P, H* jsou statické, mění se pouze souřadnice x_o bodu *O* pozorovatele.

2 Řešení pomocí kružnice proložené třemi body

Představené řešení odpovídá úrovni 9. třídy základní školy. Libovolnými třemi body v rovině, jež neleží na společné přímce, můžeme proložit kružnici. V našem případě kružnice prochází body *O, P, H,* viz Obr. 2. Spojnice bodů *OP* a *OH* vymezují zorný úhel, pod kterým pozorovatel vidí sochu v celé její výšce. Z geometrického hlediska jsou spojnice *OP, OH,* ale samozřejmě také úsečka *PH* tětivami kružnice *k*. Jak jsme již zmínili, body *P* a *H* jsou statické a bod *O* mění pouze svoji souřadnici x_o. Znamená to tedy, že kružnice *k,* proložená body *O*, *P, H,* bude měnit svůj poloměr i polohu středu v závislosti na pozici pozorovatele. Jelikož střed kružnice *k* leží na ose statické tětivy *PH*, známe tím souřadnici y_s středu kružnice opsané bodům *O, P, H*. Souřadnice x_s středu kružnice se bude měnit v závislosti na souřadnici x_o pozice pozorovatele. Souřadnice y_s je konstantní, a odpovídá polovině výšky sochy včetně výšky podstavce. Algebraicky vyjádřeno: $y_s = v_p + \frac{v_s}{2}$.



Obr. 2: Zorný úhel jako úhel obvodový [8]

Z Obr. 2 je patrné, že vzhledem ke kružnici *k* je zorný úhel *HOP* obvodovým úhlem příslušným k oblouku *HP* a úhel *HSP* je příslušným úhlem středovým. Platí tedy, že úhel *HSP* je dvakrát větší než úhel *HOP*. Protože osa *BS* tětivy *HP* rozděluje středový úhel na polovinu, je velikost

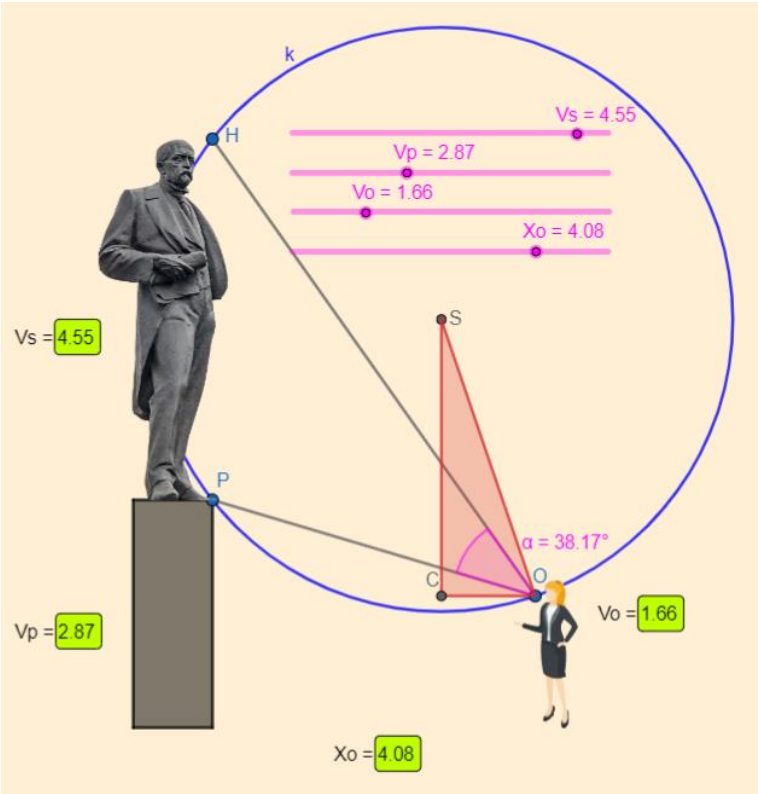
úhlu *HSB* rovna velikosti obvodového úhlu kružnice k, tedy i velikosti zorného úhlu pozorovatele sochy. Pro pravoúhlý trojúhelník *HSB* platí:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sin\alpha = \frac{HB}{r} = \frac{\frac{v_s}{2}}{r},$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{v_s}{2r}\right),\ \alpha = zorný\ úhel,\ v_s = konstanta.$$

Jelikož v_s je konstanta, plyne z dané rovnice, že zorný úhel α je závislý pouze na velikosti poloměru r kružnice k. Rovnice bohužel nevyjadřuje přímou závislost úhlu α na poloměru r kružnice k, nýbrž závislost hodnoty sinu tohoto úhlu na poloměru r kružnice k. Z fyziologického hlediska lidské oko zabírá ve svislé rovině směrem nahoru od horizontálního směru zorný úhel menší než *50°*, pohled výš je znemožněn očním víčkem. Podobně je tomu i ve směru dolů, kde je velikost zorného úhlu přibližně *50°*. Protože u našeho pozorovatele většinu zorného pole ve směru dolů vyplní podstavec sochy, je zorný úhel viditelnosti vlastní sochy rozhodně menší než *90°*. Funkce sinus je v intervalu *0°* až *90°* nelineárně rostoucí, se zvětšujícím se úhlem α se proto zvětšuje i hodnota funkce $\sin\alpha$.

Naším zadáním je zjistit maximální zorný úhel α. Rovnice $\sin\alpha = \frac{v_s}{2r}$ vyjadřuje nepřímou nelineární závislost úhlu α na poloměru r kružnice k. Se zmenšujícím se poloměrem r se velikost úhlu α zvětšuje. Tudíž zorný úhel α bude maximální právě tehdy, když poloměr r kružnice k bude minimální. Nyní vyšetříme, kdy je poloměr r kružnice k minimální.



Obr. 3: Zorný úhel jako úhel obvodový [9]

K tomu použijeme námi vytvořený pravoúhlý trojúhelník *ΔOCS*. Velikost strany $|OS|=r$, kde r je poloměr kružnice k procházející body *O, P, H*. Velikost strany $|OC|=x_o - x_s$, tzn. vzdálenost pozorovatele od sochy mínus x–ová souřadnice středu kružnice k. Velikost strany $|CS|=y_s - v_o=v_p + \frac{v_s}{2} - v_o$, tzn. y–ová souřadnice středu kružnice k mínus výška očí pozorovatele, což lze také zapsat jako součet výšky podstavce a poloviční výšky sochy mínus výška očí pozorovatele.

Nyní použijeme Pythagorovu větu: $r^2 = (x_o - x_s)^2 + \left(v_p - v_o + \frac{v_s}{2}\right)^2$.

Výraz $\left(v_p - v_o + \frac{v_s}{2}\right)^2$ je konstantní. Výraz r^2 bude tedy minimální, pokud bude minimální výraz $(x_o - x_s)^2$. Druhá mocnina rozdílu $(x_o - x_s)$, jež může být kladný i záporný, bude vždy kladná hodnota, a tudíž minimální může být jen v případě, že je rozdíl nulový, tzn. $(x_o - x_s) = 0, tzn. x_o = x_s$.

Pro minimální poloměr r kružnice k pak platí

$$\boldsymbol{r_{min} = v_p - v_o + \frac{v_s}{2}}.$$

Jako poslední krok řešení si ukážeme postup výpočtu maximálního zorného úhlu a ideální vzdálenosti od sochy, abychom ji viděli právě v největším zorném úhlu. K tomu nám poslouží pravoúhlý trojúhelník Δ *SBH,* s nímž jsme již pracovali na začátku. Velikost strany $|SH| = r_{min}$, kde r_{min} je minimální poloměr kružnice k. Velikost strany $|SB| = x_s = x_o$ (pro případ r_{min}). Velikost strany $|BH| = \frac{v_s}{2}$. Použijeme Pythagorovu větu:

$$x_o{}^2 + \left(\frac{v_s}{2}\right)^2 = r_{min}{}^2,$$

$$x_o{}^2 = r_{min}{}^2 - \left(\frac{v_s}{2}\right)^2, \text{ za } r_{min} \text{ dosadíme } \left(v_p - v_o + \frac{v_s}{2}\right)^2,$$

$$x_o{}^2 = \left(v_p - v_o\right)^2 + \left(v_p - v_o\right) \cdot v_s + \left(\frac{v_s}{2}\right)^2 - \left(\frac{v_s}{2}\right)^2,$$

$$x_o = \sqrt{(v_p - v_o) \cdot (v_p - v_o + v_s)}.$$

Zjistili jsme výpočet ideální vzdálenosti pozorovatele od sochy. Dopočítáme ještě největší zorný úhel.

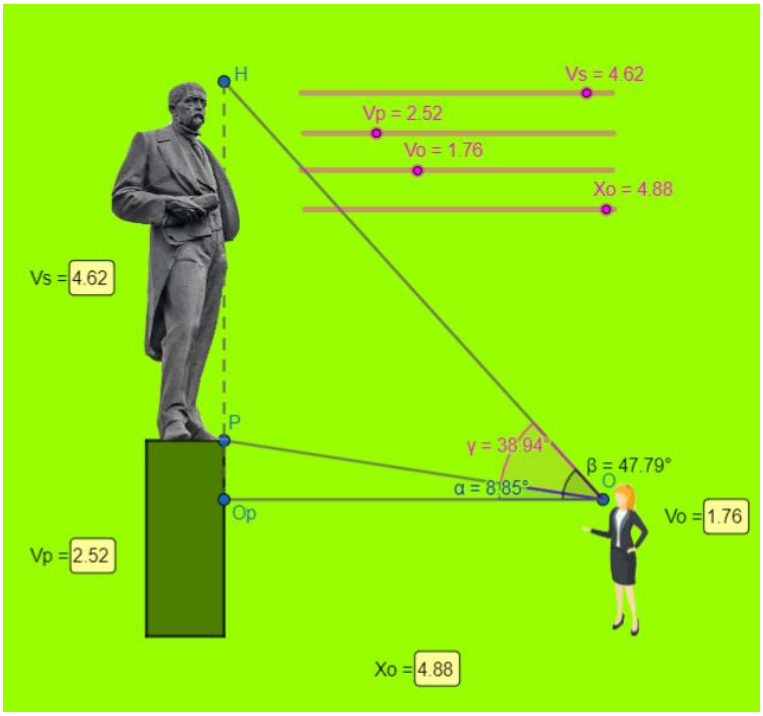
$$\sin \beta_{max} = \sin \alpha_{max} = \frac{|BH|}{|SH|} = \frac{v_s}{2 \cdot r_{min}} = \frac{v_s}{2 \cdot (v_p - v_o) + v_s},$$

$$\boldsymbol{\alpha_{max}} = \sin^{-1}\left(\frac{v_s}{2 \cdot (v_p - v_o) + v_s}\right).$$

S pomocí pravoúhlého trojúhelníku *ΔOCS* a následným výpočtem Pythagorovy věty jsme vyšetřili, kdy je poloměr r kružnice k minimální. Žáci na toto řešení mohou přijít i bez výpočtu, pouze za pomocí GeoGebra appletů, kdy mohou s pozorovatelem sochy libovolně pohybovat a zkoumat, v jaké pozici pozorovatele je zároveň poloměr kružnice minimální. Zjistili by, že poloměr r kružnice k je minimální právě tehdy, když pozorovatel stojí přímo pod středem této kružnice. Následně by si žáci toto zjištění mohli ověřit výpočtem, který jsme uvedli výše.

3 Řešení pomocí extrémů funkcí

K řešení daného problému je samozřejmě možné přistoupit také jako k řešení aplikační úlohy na výpočet extrému funkce. Potom se jedná o využití učiva úvodního vysokoškolského kurzu matematické analýzy. Odvození příslušné funkce provedeme s využitím nákresu na Obr. 4.

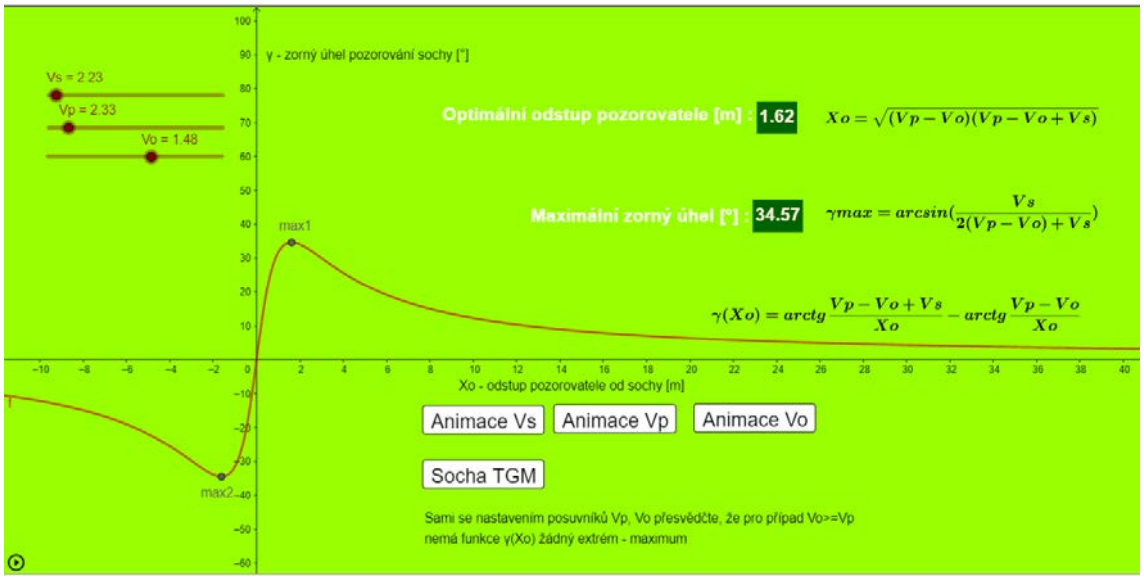


Obr. 4: Závislost zorného úhlu na vzdálenosti pozorovatele od dané sochy [10]

Tangens úhlu alfa je roven poměru délky protilehlé odvěsny ku délce přilehlé odvěsny, tzn. $\tan\alpha = \frac{v_p - v_o}{x_o}$. Tangens úhlu beta spočítáme obdobně, tzn. $\tan\beta = \frac{v_p - v_o + v_s}{x_o}$. Úhel gama se rovná rozdílu úhlů beta a alfa, tj. $\gamma = \beta - \alpha$. Dosazením za α a β z výše uvedených vztahů dostaneme předpis požadované funkce:

$$\gamma = arctg\left(\frac{v_p - v_o + v_s}{x_o}\right) - arctg\left(\frac{v_p - v_o}{x_o}\right).$$

Zobrazení jejího grafu prostřednictvím GeoGebra appletu, který nám dovoluje interaktivně měnit parametry úlohy je zachyceno na Obr. 5.



Obr. 5: Graf závislosti zorného úhlu na vzdálenosti pozorovatele od dané sochy [11]

Pro snazší manipulaci provedeme substituci $u = v_p - v_o + v_s$, $v = v_p - v_o$. Z výsledného předpisu

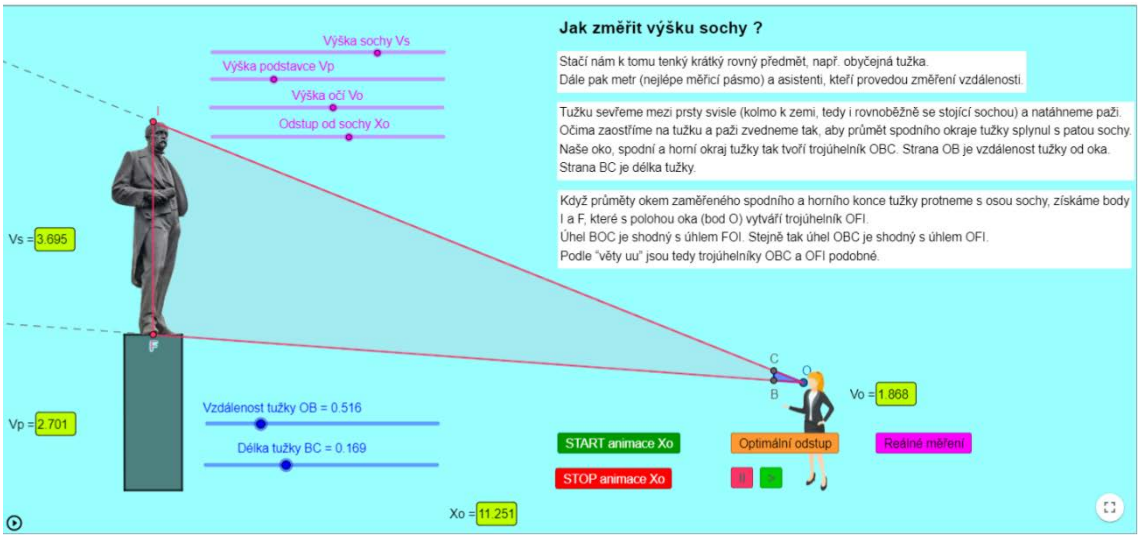
$$\gamma(x_o) = \operatorname{arctg}\frac{u}{x_o} - \operatorname{arctg}\frac{v}{x_o}$$

potom získáme stacionární body $x_o = \pm\sqrt{uv}$ souměrně sdružené podle počátku. Pro další rozbor jsme se omezili pouze na stacionární bod s kladnou x-ovou souřadnicí, neboť záporná hodnota x_o naznačuje, že pozorovatel stojí za zády sochy, což pro nás není nijak zajímavé. S použitím druhé derivace snadno zjistíme, že funkce nabývá v kladném stacionárním bodě maxima.

4 Měření výšky sochy v terénu pomocí tužky a měřícího pásma

Téma samostatně stojící sochy nás může inspirovat k dalším aktivitám, které lze realizovat s žáky formou „terénního matematického cvičení“. Konkrétně se věnujeme určení výšky sochy. K příslušnému cvičení žáky vybavíme tužkou, papírem a měřícím pásmem.

Viz Obr. 6. Pozorovatel drží v natažené paži tužku rovnoběžně se stojící sochou. Současně mění svůj odstup od sochy a úhlový sklon paže tak, aby průmětem tužky na sledovanou sochu splynul její horní konec s hlavou sochy a spodní konec tužky s patou sochy. V takovéto konstelaci vytvoří výška sochy *FI* se vzdáleností paty sochy od oka pozorovatele *OF* a délka tužky *BC* se vzdáleností spodního okraje tužky od oka pozorovatele *OB* strany dvou podobných trojúhelníků.



Obr. 6: Měření výšky sochy [12]

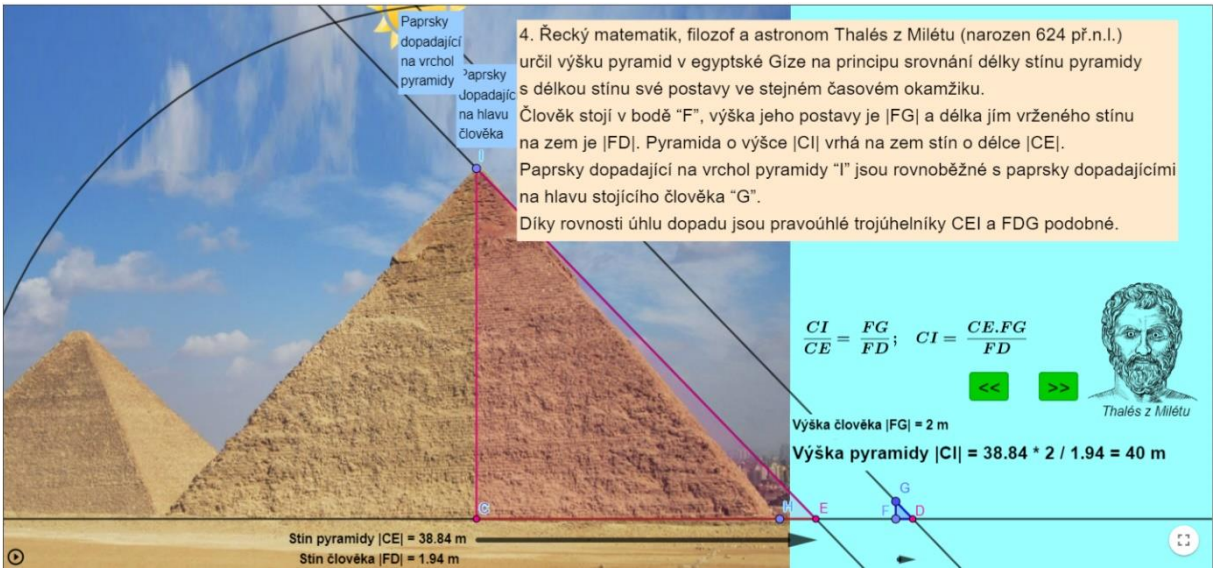
K určení neznámé výšky sochy nám potom stačí znát délku *BC* a příslušné vzdálenosti *OF* a *OB* a vzdálenost paty sochy od oka pozorovatele. Výšku sochy *FI* spočítáme dosazením do vztahu:

$$FI = \frac{OF \cdot BC}{OB}.$$

5 Měření výšky sochy metodou srovnání délky stínů, které vrhají dva výškově rozdílné předměty na zem

K využití této metody je důležité vědět, že výškové předměty vrhají díky rovnoběžně dopadajícím slunečním paprskům na zemský povrch stín, jehož délka je závislá na výšce daného objektu a úhlu dopadajících paprsků. Pokud ve stejném časovém okamžiku změříme délku stínu dvou objektů, z nichž u jednoho známe jeho výšku, můžeme opět na základě podobnosti trojúhelníků dopočítat neznámou výšku druhého objektu.

Metoda určení výšky objektu na principu délky vrhaného stínu není příliš přesná. Nepřesnost nepřináší ani tak předpoklad rovnoběžnosti dopadajících paprsků na měřený a referenční objekt. Vrchol objektu totiž nemá ostrou hranu (např. hlava sochy), paprsky se na něm lámou, a tak je i konec stínu „rozostřený“. Právě toto ztěžuje přesné změření délky stínu.



Obr. 7: Určení výšky pyramidy dle Thaleta [13]

6 Závěr

Program GeoGebra nabízí vhodné prostředí pro modelování matematických jevů i reálných situací. Možnosti webové stránky https://www.geogebra.org programu, spolu s celou infrastrukturou funkcí a nástrojů pak dovolují poskytnout toto prostředí žákům na různých úrovních složitosti jeho ovládání, pro práci ve škole i doma. GeoGebra tak představuje vhodný nástroj pro uplatňování STEM vzdělávání [16] i rozvoj digitální gramotnosti žáků [4]. Sdílení praktických příkladů a zkoumání vlivu takovýchto nástrojů na proces vzdělávání žáků i na kvalitu získaných znalostí a kompetencí si zaslouží pozornost. V článku jsme představili část appletů z komplexního souboru [6] věnovaného uvedenému problému. Následujícím krokem by měl být výzkum dopadů jejich použití, ale i výzkum přijetí takovýchto materiálů žákem a učitelem.

Literatura:

[1] Bellos, A. *Alex's Adventures in Numberland*. London: Bloomsbury Paperbacks, 2011.

[2] Dörrie, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications, 1965.

[3] Eastaway, R., Wyndham, J. *Why do Buses Come in Threes? The hidden mathematics of everyday life*. London: Portico, 2005.

[4] Podpora rozvoje digitální gramotnosti [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://digigram.cz

[5] Průdková, K. *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* (bakalářská práce), Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2021.

[6] Průdková, K. *Regiomontanův problém,* GeoGebra kniha [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pkxcqdpf

[7] Průdková, K. *Regiomontanův problém – úvod,* GeoGebra applet [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/hu2m2v2x

[8] Průdková, K. *Závislost zorného úhlu na poloměru r,* GeoGebra applet [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pkxcqdpf#material/qwdjw3zs

[9] Průdková, K. *Určení minimálního poloměru r,* GeoGebra applet [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pkxcqdpf#material/aar7ugdf

[10] Průdková, K. *Vyjádření funkční závislosti hodnoty zorného úhlu gama na vzdálenosti Xo pozorovatele od sochy,* GeoGebra applet [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pkxcqdpf#material/rr3vckxv

[11] Průdková, K. *Průběh funkce zorného úhlu gama v závislosti na odstupu pozorovatele od sochy Xo,* GeoGebra applet [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pkxcqdpf#material/rb8stsdk

[12] Průdková, K. *Určení výšky sochy metodou průmětu tužky,* GeoGebra applet [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pkxcqdpf#material/zredgckx

[13] Průdková, K. *Měření výšky sochy metodou srovnání délky stínů, které vrhají dva výškově rozdílné předměty na zem*, GeoGebra applet [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pkxcqdpf#material/a8nczf5d

[14] Regiomontanus. In *Wikipedia; The Free Encyclopedia* [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Regiomontanus

[15] Regiomontanus' angle maximization problem. In *Wikipedia; The Free Encyclopedia* [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Regiomontanus'_angle_maximization_problem

[16] Science, technology, engineering, and mathematics. In *Wikipedia; The Free Encyclopedia* [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Science,_technology,_engineering,_and_mathematics

[17] Základní pravidla. In *ARC Iuridica Rugby Chrášťany* [online]. [cit. 15. 12. 2021]. Dostupné z: https://www.arc-rugby.cz/ragby/zakladni-pravidla

Kamila Průdková
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: prudkk00@pf.jcu.cz

Roman Hašek
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: hasek@pf.jcu.cz

VZDĚLÁVACÍ VINĚTY VE VÝUCE MATEMATIKY

Libuše Samková

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Abstrakt: Tento příspěvek představuje tzv. vzdělávací viněty – reprezentace školní praxe, jejichž prostřednictvím můžeme z různých pohledů zkoumat hypotetické výukové situace. Vzdělávací viněty jsou přednostně určené pro použití v profesní přípravě učitelů, ale je možné je využít také ve výuce na základní, střední nebo vysoké škole. V příspěvku představujeme typologii vzdělávacích vinět a podrobně se věnujeme vinětám založeným na komiksových obrázcích.

Klíčová slova: Vzdělávací viněty, Concept Cartoons, obrázkové reprezentace výukových situací, výuka matematiky.

Educational vignettes in mathematics teaching and learning

Abstract: The paper introduces educational vignettes, i.e., representations of school practice, through which we can study and explore hypothetical teaching and learning situations from different perspectives. Educational vignettes are primarily intended for use in teacher education, however, they can be also used with pupils in primary, secondary or tertiary education. In this contribution, we present a typology of educational vignettes and focus in detail on vignettes that are based on comics pictures.

Key words: Educational vignettes, Concept Cartoons, picture-based representations of school practice, mathematics teaching and learning.

Úvod

Nezastupitelnou roli v profesní přípravě učitelů mají reprezentace školní praxe, tedy více či méně autentické záznamy výukových situací, které jsou učitelům předkládány k rozboru a reflexi. Tyto reprezentace mohou mít různou podobu, v zahraničí se pro ně bez ohledu na konkrétní provedení ujal společný název *vzdělávací viněty* (angl. *educational vignettes*) [1]. V České republice mají v tomto kontextu tradici textové záznamy, audiozáznamy a videozáznamy. Zatímco textové záznamy mohou zaznamenávat skutečné i zcela hypotetické výukové situace (do podoby čistého textu je možné snadno zpracovat téměř „cokoliv“), audiozáznamy a videozáznamy se obvykle věnují dění během reálných (někdy spontánních, někdy pečlivě předpřipravených) výukových jednotek.

Rychlý rozvoj grafického hardware a software v posledním desetiletí a jeho dostupnost pro běžnou veřejnost přinášejí do tohoto prostředí nové možnosti a nové příležitosti: audiozáznamy a videozáznamy se snáze pořizují (pokud se zdárně vypořádáme s GDPR), do textových záznamů je možné libovolně vkládat obrázky, jakékoliv záznamy se snadno a rychle dají sdílet (bez ohledu na jejich velikost), dají se snadno a relativně rychle editovat. S širokou dostupností různých grafických nástrojů pak přichází i možnost založit reprezentace školní praxe přímo na obrázcích, tedy nemít obrázek jen jako okrajový doplněk textu, ale jako hlavní nosič informace. Výhodou takového přístupu oproti textovému je jeho stručnost, přehlednost a větší autenticita, výhodou oproti audio a video přístupu je jeho obsahová flexibilita (opět, do podoby obrázku je možné zpracovat téměř „cokoliv"), menší nároky na hardwarové a softwarové vybavení, menší časová náročnost tvorby a flexibilní editace. Pokud jde o autenticitu, nedávné zahraniční výzkumy ukázaly, že při vhodném zpracování mohou obrázkové záznamy výukových situací působit na čtenáře/diváka více autenticky než videozáznamy [2].

V tomto příspěvku si představíme na obrázcích založené vzdělávací viněty podrobněji. Ukážeme si několik konkrétních matematických vinět komiksového typu, s různými aktéry a různým didaktickým zaměřením. Představíme si také projekt *coReflect@maths*, v rámci kterého vzniká digitální prostředí, kde bude možné s komiksovými vinětami pracovat systematicky.

1 Projekt coReflect@maths

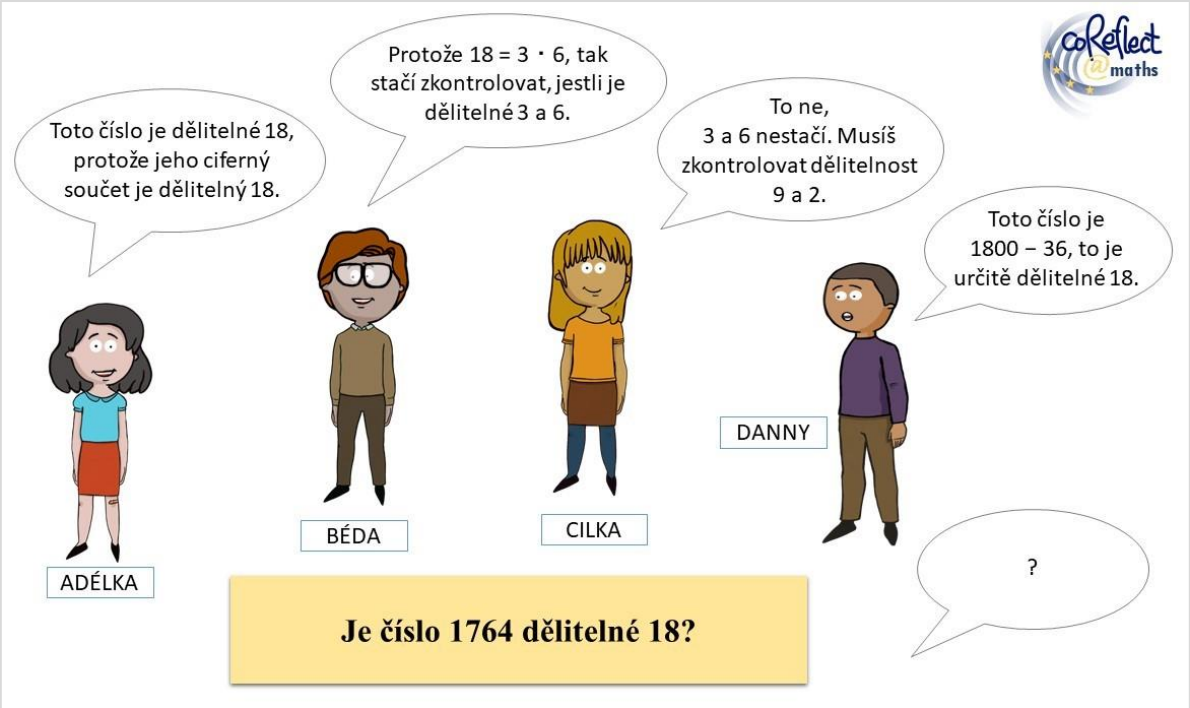
V mezinárodním projektu *coReflect@maths* se věnujeme výše uvedené nové obrázkové perspektivě: studujeme, tvoříme a zkoumáme na obrázcích založené záznamy výukových situací, hledáme různé možné podoby takových záznamů, testujeme možnosti jejich využití v profesní přípravě učitelů matematiky. Z velké části se zaměřujeme na grafické zpracování komiksového typu, tedy na samostatné obrázky či sady obrázků, jež znázorňují několik postav v bublinovém rozhovoru. Plně tak využíváme tři aspekty komiksu podle [3: s. 19–24]: obraz jako dominantní složka vyprávění, fragmentární charakter výpovědi a důraz na očekávanou aktivní spolupráci čtenáře. Vzhledem ke specifické povaze reprezentovaných výukových situací někdy komiksové obrázky doplňujeme textovými záznamy (např. záznamy zadání matematických úloh, doprovodných učebních textů, žákovských řešení úloh). V rámci projektu *coReflect@maths* vyvíjíme digitální nástroj s názvem *DIVER* (*Developing and Investigating Vignettes in Teacher Education and Research*), který nám umožní převést práci s obrázkovými reprezentacemi do interaktivní elektronické podoby.

2 Typy vzdělávacích vinět a jejich ukázky

Studujeme-li vzdělávací viněty z pohledu typologie, je možné na ně pohlížet ze tří různých perspektiv [4: s. 93–94]: míry objektivní autenticity, aktérů výukové situace a způsobu realizace. Nejvíce objektivně autentická je skutečná výuka bez jakéhokoliv vnějšího vlivu (učitel si výuku připravuje sám a nikdo jemu ani žákům neříká, jak se mají chovat, na co se mají ptát, co mají odpovídat). Autenticitu můžeme snížit tím, že učitele nebo žáky necháme postupovat podle předem připraveného scénáře. Nejméně autentická je tzv. inscenovaná výuka, kdy podle scénáře postupují všichni. Aktéry výukové situace mohou být jednotlivci (samotný žák, samotný učitel) i skupiny (několik žáků bez učitele, několik učitelů bez žáků, učitel a žák, učitel a skupina žáků, skupina učitelů a žák). Z hlediska provedení se může jednat o skutečnou

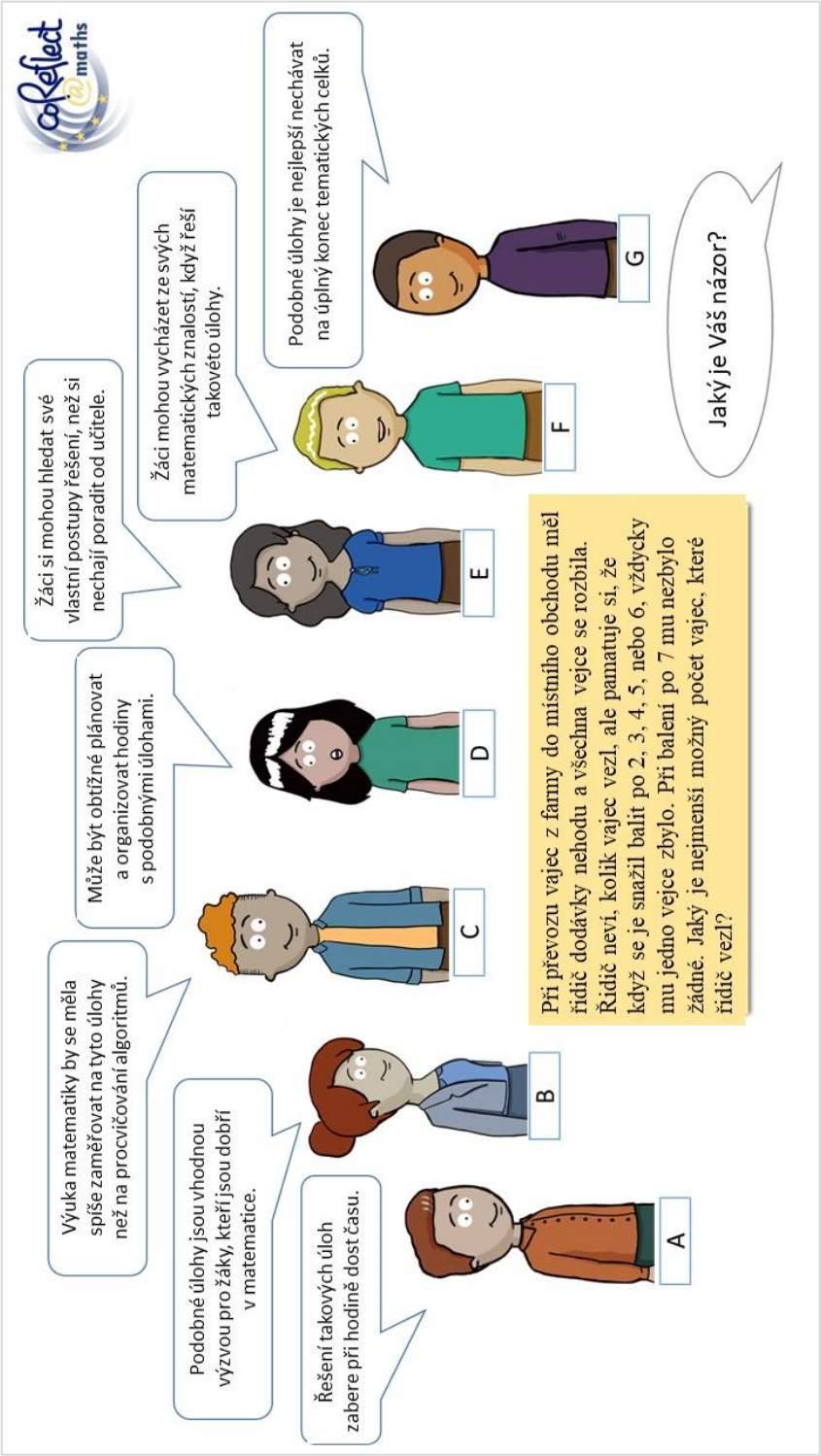
výuku, virtuální realitu, videozáznam, audiozáznam, textový záznam, obrázkový záznam, nebo jejich kombinaci. Jak již bylo řečeno v úvodu, v tomto příspěvku se budeme věnovat různým typům záznamů, jež využívají obrázky.

Mezi obrázkové viněty patří určitě tzv. *Concept Cartoons* [4, 5], samostatné obrázky s bublinovým rozhovorem několika dětí bez učitele. Děti na obrázku vyjadřují různé správné i nesprávné názory a úkolem respondenta je tyto názory posoudit, navrhnout vlastní názor do bubliny s otazníkem, případně názory rozebrat didakticky. Viz Obr. 1.



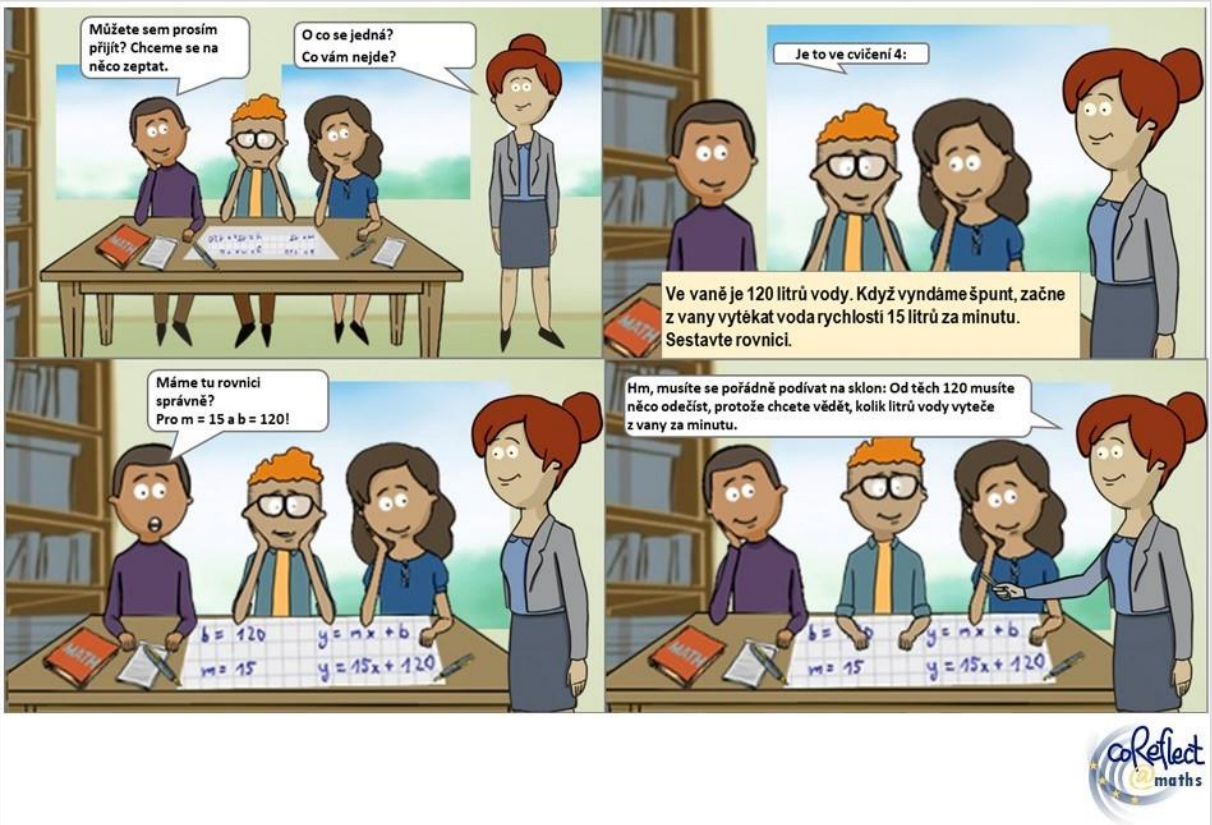
Obrázek 1: Concept Cartoon *Dělitelnost 18 junior*; zdroj: interní materiál projektu *coReflect@maths*, grafické elementy: *DIVER*, vlastní překlad

Základní myšlenku komiksu o jednom obrázku znázorňujícího několik aktérů s názory k posouzení je však možné rozšířit i na skupinu učitelů. Na rozdíl od žáků, kteří na vinětách obvykle diskutují matematické pojmy nebo řešení matematických úloh, se učitelé mohou věnovat různým aspektům souvisejícím se zařazováním takových pojmů nebo úloh do výuky (viz Obr. 2).



Obrázek 2: Vinĕta *Vejce*; zdroj: interní materiál projektu *coReflect@maths*, grafické elementy: *DIVER*, vlastní překlad

Využijeme-li sadu několika na sebe navazujících komiksových obrázků, můžeme vytvořit vinětu v podobě klasického komiksového pásu. Na Obr. 3 uvádíme výřez z pásu tvořeného celkem 8 obrázky, jež zaznamenává průběh rozhovoru mezi skupinou 3 žáků a jejich učitelkou. Respondenti pak posuzují práci učitelky (jak vhodné jsou její odpovědi na dotazy žáků, jak by se dalo reagovat alternativně apod.) i žáků (jestli jejich řešení je správné, co mohlo být zdrojem jejich nepochopení apod.). Díky tomu, že komiksový pás na Obr. 3 obsahuje mnohem více vizuálních informací než viněty na Obr. 1 a Obr. 2, je zde také mnohem více aspektů, které respondenti musí brát v potaz při svém rozboru (mj. i vhodnost formulace zadání úlohy, kterou žáci na obrázku řeší).



Obrázek 3: Viněta *Rovnice*, výřez; zdroj: interní materiál projektu *coReflect@maths*, grafické elementy: *DIVER*, vlastní překlad

Závěr

Vzdělávací viněty mohou najít své uplatnění ve výuce žáků i budoucích učitelů, mj. jako prostředek pro podporu diskuse nad matematickými a didakticko-matematickými tématy [1, 2, 4, 5]. Jak se ukazuje, tento motivační prvek vzdělávacích vinět je možné uplatnit i v distanční výuce [6, 7]. Poznatky nedávno realizovaných empirických výzkumů navíc naznačují, že vzdělávací viněty mají svůj význam také v diagnostice matematických a didakticko-matematických znalostí žáků a budoucích učitelů. V některých případech totiž dokáží odhalit konceptuální neznalosti, jež běžnými písemnými testy spočívajícími v řešení matematických úloh nemusí být odhaleny [4: s. 79–81].

Poděkování

Projekt *coReflect@maths* (2019-1-DE01-KA203-004947) je spolufinancován programem *Erasmus+* Evropské unie. Podpora Evropské komise produkci této publikace nepředstavuje souhlas s obsahem, který odráží pouze názory autorů, a Komise nenese odpovědnost za jakékoli použití informací v publikaci obsažených.

Ráda bych poděkovala svým kolegům z projektu *coReflect@maths* za jejich spolupráci: Sebastian Kuntze a Jens Krummenauer (Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Německo), Marita Friesen a Ralf Erens (Pädagogische Hochschule Freiburg, Německo), Ceneida Fernández, Salvador Llinares a Pere Ivars (Universidad de Alicante, Španělsko), Karen Skilling (University of Oxford, Velká Británie) a Lulu Healy (King's College London, Velká Británie).

Literatura:

[1] Skilling, K., Stylianides, G.: Using vignettes in educational research: a framework for vignette construction. *International Journal of Research & Method in Education*, 2020, roč. 43, č. 5, s. 541–556.

[2] Friesen, M., Kuntze, S.: Competence assessment with representations of practice in text, comic and video format. In O. Buchbinder, S. Kuntze, eds. *Mathematics Teachers Engaging with Representations of Practice*. Cham: Springer, 2018, s. 113–130.

[3] Groensteen, T.: *Stavba komiksu*. Brno: Host, 2005.

[4] Samková, L.: *Metoda Concept Cartoons*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2020.

[5] Keogh, B., Naylor, S.: Concept cartoons, teaching and learning in science: an evaluation. *International Journal of Science Education.* 1999, roč. 21, č. 4, s. 431–446.

[6] Čech, A.: *Úlohy ve formátu Concept Cartoons jako doplněk učebnic matematiky*. České Budějovice, 2021. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta.

[7] Kršková, J.: *Analýza žákovských řešení matematických úloh jako příprava na tvorbu úloh ve formátu Concept Cartoons*. České Budějovice, 2021. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta.

Libuše Samková
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta JU
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: lsamkova@pf.jcu.cz

3D TISK A VÝUKA GEOMETRIE

Petra Surynková

Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova

Abstrakt: Příspěvek se věnuje 3D tisku a jeho využití při výuce eukleidovské prostorové geometrie na střední i vysoké škole. Na modelech lze jednak demonstrovat vlastnosti vybraných těles a ploch, které znázorňují, a jednak přiblížit matematickou a geometrickou podstatu, které se skrývají za tvorbou takových modelů. Modely vytvořené na 3D tiskárně slouží také k procvičování a trénování prostorové představivosti.

Klíčová slova: 3D tisk, výuka geometrie na SŠ a VŠ, stereometrie, plochy stavební praxe, 3D počítačové modelování.

3D printing and geometry education

Abstract: The paper deals with 3D printing and its use in teaching Euclidean spatial geometry at high schools and universities. The models can be used to demonstrate the properties of selected solid figures and surfaces which they represent. On the other hand, we can show the mathematical and geometric nature that lies behind the creation of such models. Models created on a 3D printer are also used to practice and train the spatial imagination.

Key words: 3D printing, teaching geometry at high schools and universities, stereometry, surfaces of building practice, 3D computer modeling.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 29 (2021), No. 1

Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2021_Surynkova.pdf

GEOGEBRA KNIHA „SBÍRKA ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ Z KONSTRUKTIVNÍ GEOMETRIE“

Jan Šafařík, Jana Bulantová, Lucie Zrůstová

Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, Stavební fakulta VUT v Brně

Abstrakt: Příspěvek má za cíl seznámit s novou sbírkou řešených příkladu z Konstruktivní geometrie, jež vznikla na Stavební fakultě Vysokého učení technického v Brně. Sbírka byla vytvořena pomocí dynamického systému GeoGebra, přičemž některé příklady byly vytvořeny pomocí AutoCADu. Sbírka je volně dostupná jako GeoGebra kniha na adrese https://www.geogebra.org/m/ejhn4jay.

Klíčová slova: GeoGebra, AutoCAD, kótované promítání, Mongeovo promítání, kolmá axonometrie, lineární perspektiva, teoretické řešení střech, topografické plochy, Stereografická projekce.

GeoGebra book „Collection of Worked Examples in Constructive Geometry“

Abstract: The aim of the paper is to acquaint with a new Collection of Worked Examples in Constructive Geometry, which was created at the Faculty of Civil Engineering of the Brno University of Technology. The collection was created using the interactive mathematics software suite GeoGebra, while some examples were created using AutoCAD. The collection is freely available as a GeoGebra book at https://www.geogebra.org/m/ejhn4jay.

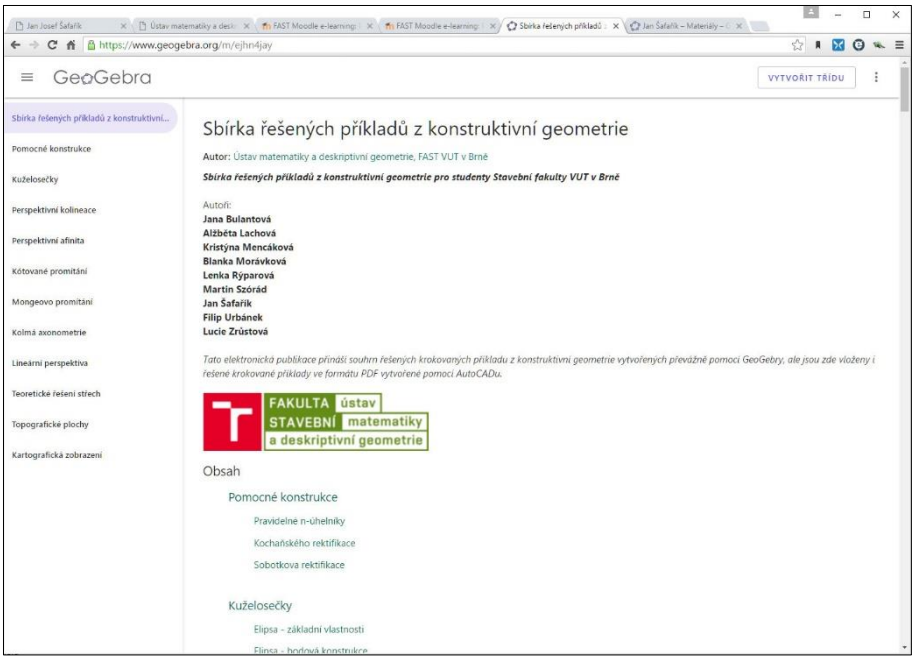
Key words: GeoGebra, AutoCAD, coted projection, Monge projection, orthogonal axonometry, linear perspective, theoretical solution of the roof, topographic surfaces, Stereography projection.

Úvod

Cílem příspěvku je seznámit s novými výukovými materiály pro předměty Konstruktivní geometrie a deskriptivní geometrie na Stavební fakultě VUT v Brně. Jedná se o sbírku řešených krokovaných příkladů, které byly vytvořeny s využitím dynamického systému GeoGebra, přičemž několik příkladů bylo vytvořeno i pomocí AutoCADu. Sbírka je sestavena jako GeoGebra kniha a je dostupná na adrese https://www.geogebra.org/m/ejhn4jay.

1 Historie vzniku sbírky

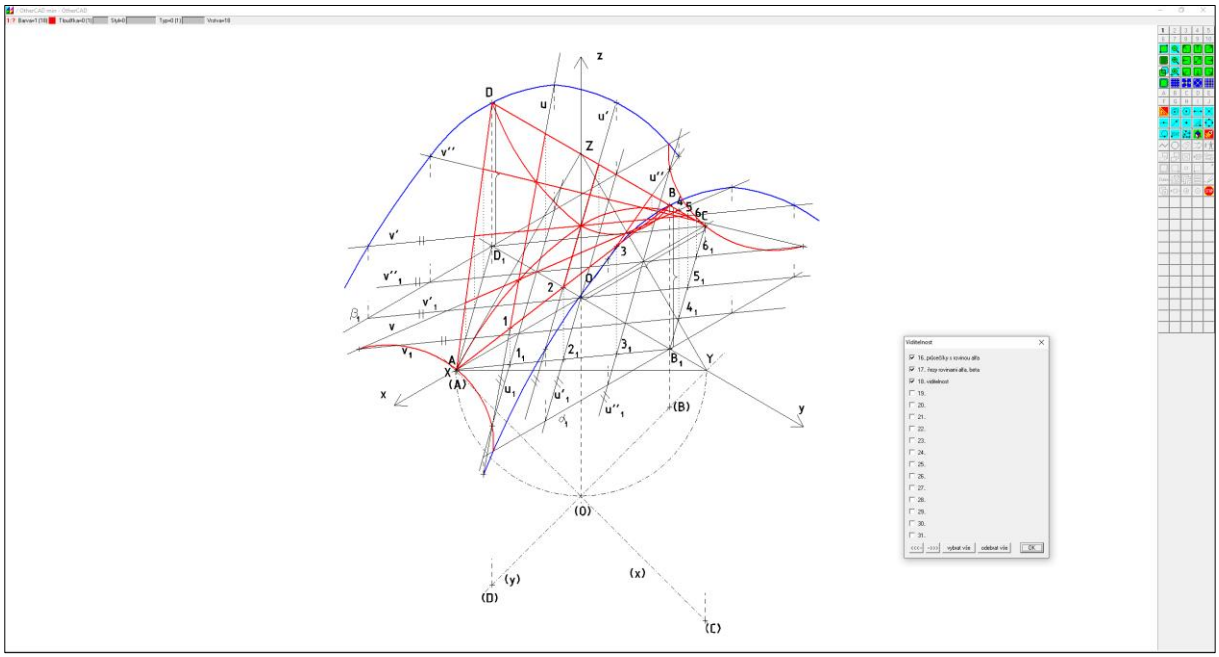
Již před dvaceti lety vzniklo na Stavební fakultě VUT první multimediální CD Deskriptivní geometrie [1]. Poté vyšla nová verze, která obsahově pokrývala tehdejší osnovy a byla uzpůsobena i pro formu distanční výuky [2]. Kromě toho vzniklo i několik doplňujících materiálů - Sbírka řešených příkladů [3] a Sbírka zkouškových příkladů [4], o kterém jsme referovali na jedné z předešlých konferencí [5].



Obrázek 1: Úvodní stránka Sbírky řešených příkladů z konstruktivní geometrie.

Texty multimediálního CD byly vytvořeny v programu Zoner Context, který byl ve své době výkonný a univerzální autorský nástroj pro elektronické publikování. Podporoval vlastní pokročilou hypertextovou technologii, umožňující spojit širokou škálu dat – text a tabulky, grafiku, kresby, obrázky a multimédia. Vlastní plnohodnotný hypertextový „WYSIWYG“ editor. Umožňoval přehlednou stromovou strukturu obsahu, vyskakovací (pop-up) okna, tvorbu rejstříku klíčových slov, vytváření systémových odskoků, spouštění externích aplikací, kontroly hypertextových vazeb a vložených souborů, automatické generování matrice pro duplikaci CD-ROM. Krokované příklady pak byly vytvořeny pomocí programu OtherCAD, jednalo o původní český grafický systém firmy ALPRO, s.r.o. a jeho minimální verze byla doplněná o slideshow od Petra Slepičky. OtherCAD umožňoval práci s vektorovou i rastrovou grafikou. Jednalo se o modulární grafický systém, který nekladl velké nároky na počítač ani na kapacitu disku. K základnímu systému šlo doplnit velké množství profesních knihoven a nadstaveb.

Obrázek 1: Výsledný vzhled CD-Romu Deskriptivní geometrie vytvořený pomocí Zoner Contextu.

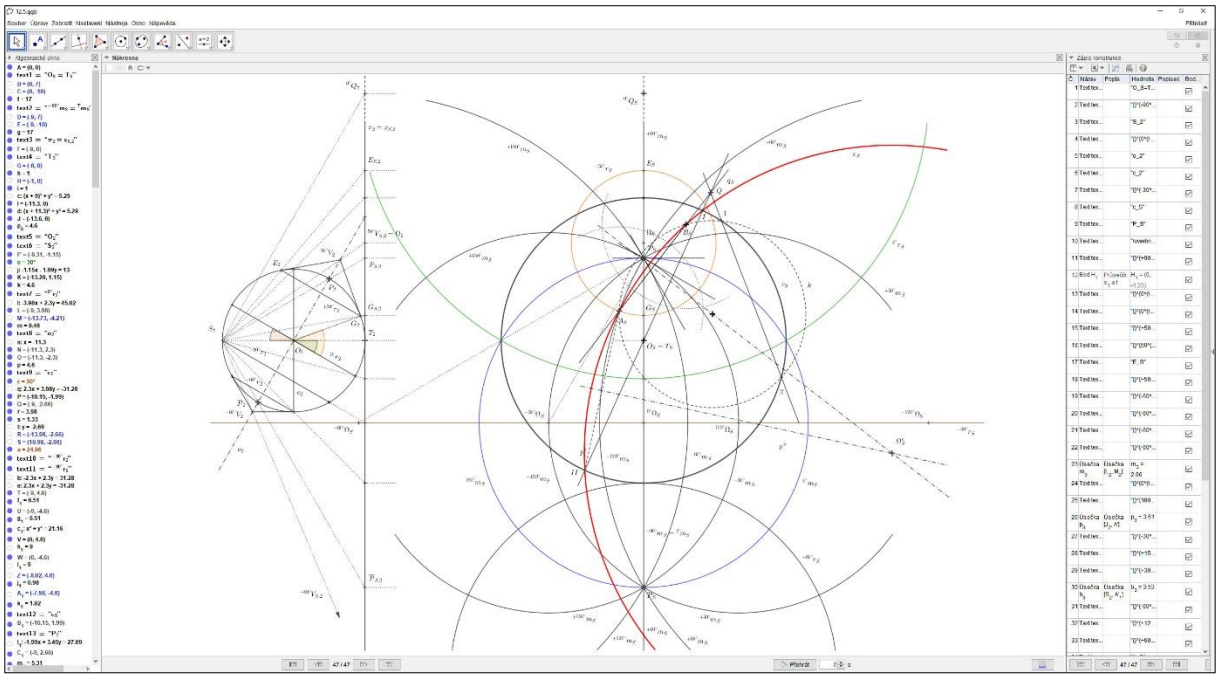


Obrázek 2: OtherCAD.

S průběhem let však došlo k poměrně velikým změnám osnov předmětu Konstruktivní (dříve Deskriptivní) geometrie a bylo třeba na tyto změny reagovat. Rovněž programu OtherCad, ve kterém byly krokované příklady v učebním textu vytvořeny, skončila podpora. Bylo tedy nutné

poohlédnout se po vhodné alternativě. Jako dobrou volbou se jeví volně dostupný program GeoGebra [6], [7].

Během posledních let vytvořili vyučující Konstruktivní geometrie na Fakultě stavební VUT v Brně poměrně velké množství příkladů pomocí programu GeoGebra, které jsou dostupné na webových stránkách Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie – https://math.fce.vutbr.cz/studium.php [8], [9]. Hlavním důvodem pro vznik nové sbírky byla snaha všechny tyto již vzniklé příklady uspořádat do jednoho učebního celku a dále ho rozšířit a doplnit o velké množství nových příkladů tak, aby skladba příkladů pokrývala problematiku celého učiva předmětů Konstruktivní geometrie pro všeobecné bakalářské programy a Deskriptivní geometrie pro obor Geodézie a kartografie. Především šlo o to vytvořit nové příklady na aplikace deskriptivní geometrie – teoretické řešení střech, topografické plochy a kartografická zobrazení.



Obrázek 3: Pracovní prostředí GeoGebry.

2 GeoGebra

Tvůrcem GeoGebry je Markus Hohenwarter. Jedná se o volně šiřitelný multiplatformní dynamický software pro všechny úrovně vzdělávání. Spojuje geometrii, algebru, tabulky, znázornění grafů, statistiku a infinitezimální počet. Instalace GeoGebry není nutná, plnou verzi programu lze kdykoliv spustit v internetovém prohlížeči. Instalace o online verze jsou nenáročné na hardware. Prostředí GeoGebry obsahuje několik edukačních prostředí – Nákresna, Algebraická prezentace objektu, Tabulka, CAS (Computer Algebra System) a další. Prezentace problémů v různých modelech, jako je grafický, algebraický, numerický nebo symbolický, pomáhá pochopení souvislostí mezi různými přístupy k matematickým objektům. Program poskytuje autorizační nástroje k vytvoření výukového materiálu na webové stránce.

3 Obsah sbírky

Sbírka v současné době obsahuje více jak 250 příkladů rozdělených do následujících kapitol:

- ***Kapitola 1: Pomocné konstrukce*** – konstrukce pravidelných mnohoúhelníků, rektifikace kružnice
- ***Kapitola 2: Kuželosečky*** – ohniskové vlastnosti kuželoseček, konstrukce kuželosečky ze zadaných prvků
- ***Kapitola 3: Perspektivní kolineace*** – bod, přímka, obraz n-úhelníků
- ***Kapitola 4: Perspektivní afinita*** – bod, přímka, obraz n-úhelníku a kružnice
- ***Kapitola 5: Kótované promítání*** – jednoduché konstrukce potřebné pro řešení střecha topografických ploch
- ***Kapitola 6: Mongeovo promítání*** – základní úlohy, sestrojení těles, řezy těles včetně sítí
- ***Kapitola 7: Kolmá axonometrie*** – základní úlohy, řezy těles a průsečíky přímky s tělesem
- ***Kapitola 8: Lineární perspektiva*** – konstrukce v základní i svislé rovině, sestrojení kružnice, perspektiva daného objektu
- ***Kapitola 9: Teoretické řešení střech*** – řešení střech s okapovými hranami v jedné rovině, zakázané okapy
- ***Kapitola 10: Topografické plochy*** – napojení vodorovných i stoupajících cest a plošin s terénem, vrstevnice jsou přímky nebo křivky
- ***Kapitola 11: Kartografická zobrazení*** – Stereografická projekce – polární, rovníková, obecná, loxodroma, ortodroma

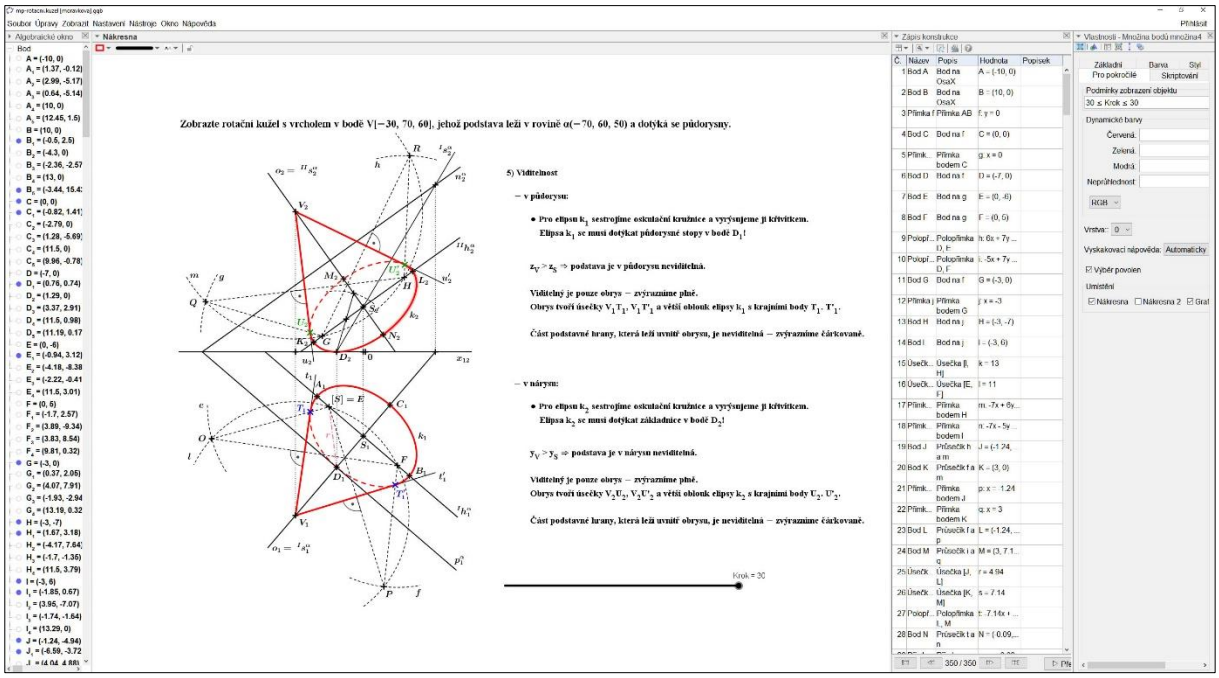
Do budoucna bychom ještě rádi přidali kapitolu týkající se obecného středového promítání, především příklady na konstrukce těles ve středovém promítání. Tato kapitola by byla přínosem převážně pro studenty oboru geodézie a kartografie.

4 Krokování příkladů

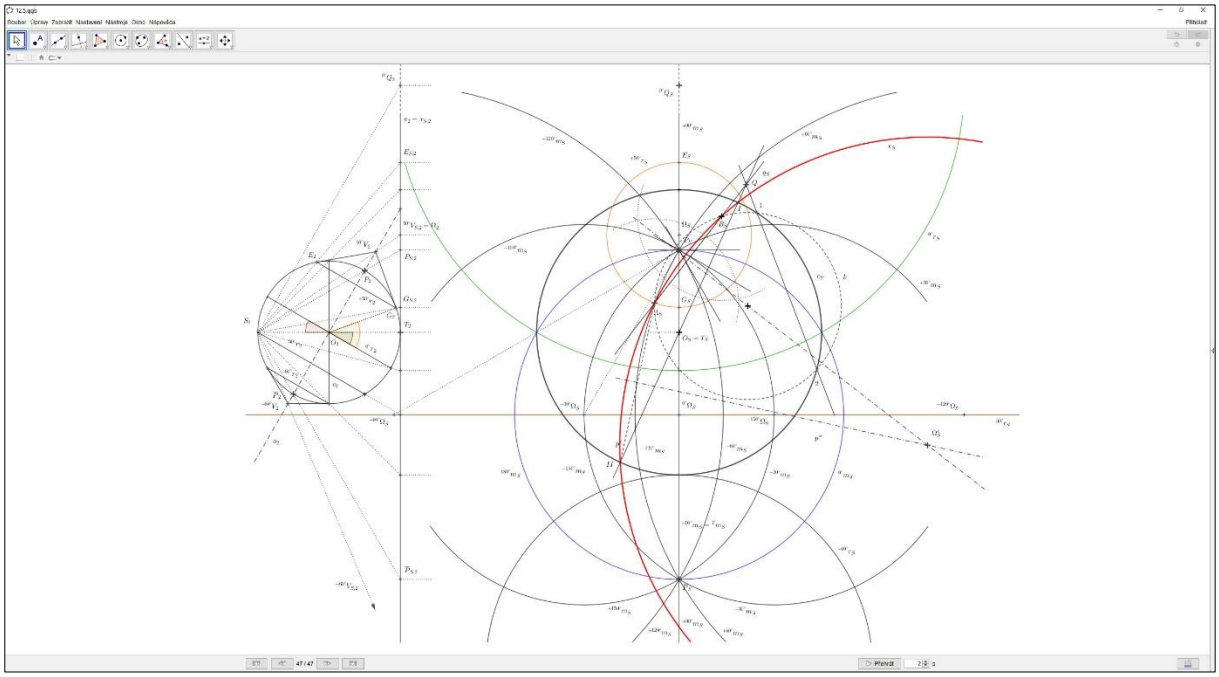
Velkou výhodou programu GeoGebra je, že umožňuje příklad rozložit do více kroků. To studentovi umožňuje snadnější se vyznat v provedených konstrukcích. K sestrojení krokovaných příkladů jsme využívali dvou základních metod.

První metodou je spojení funkce „Posuvník“ a „Podmínky zobrazení objektu“, kdy podmínky jsou klasické matematické nerovnosti vymezující zobrazení a skrytí objektů, přičemž je možný pomocí logických operátorů víckrát po sobě zobrazovat a skrývat dané objekty. K vytváření těchto příkladů sestavil student 4. ročníku Stavební fakulty, který se na Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie jako „studentská pedagogicko-vědecká síla“ podílel na

vytváření modelů pro výuku Konstruktivní geometrie, podrobný manuál pro vytváření interaktivních příkladů v programu GeoGebra [7].

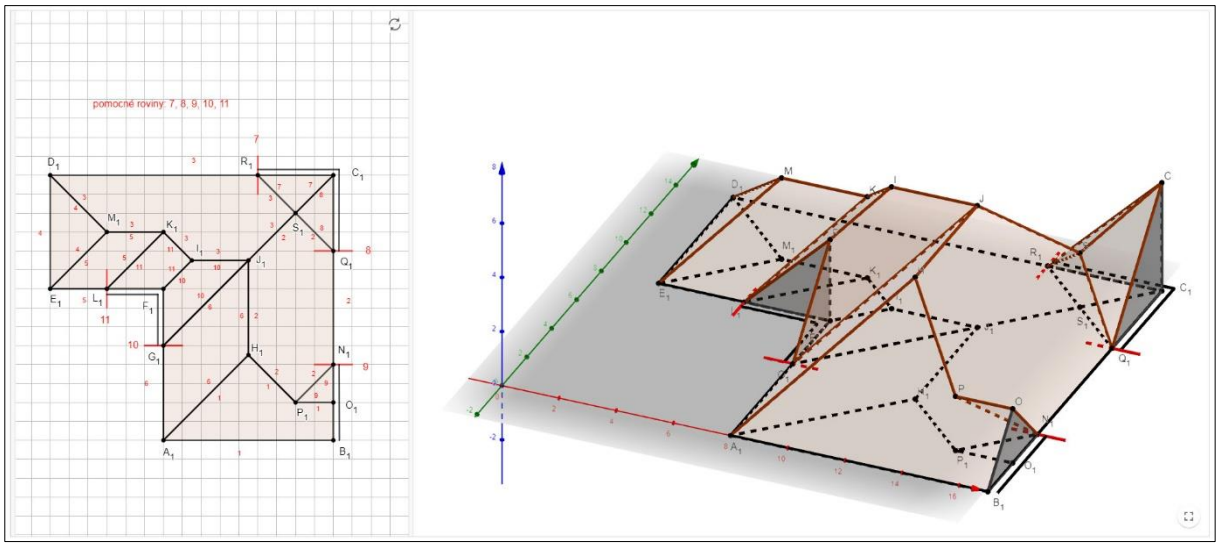


Obrázek 4: Krokování pomocí posuvníku.

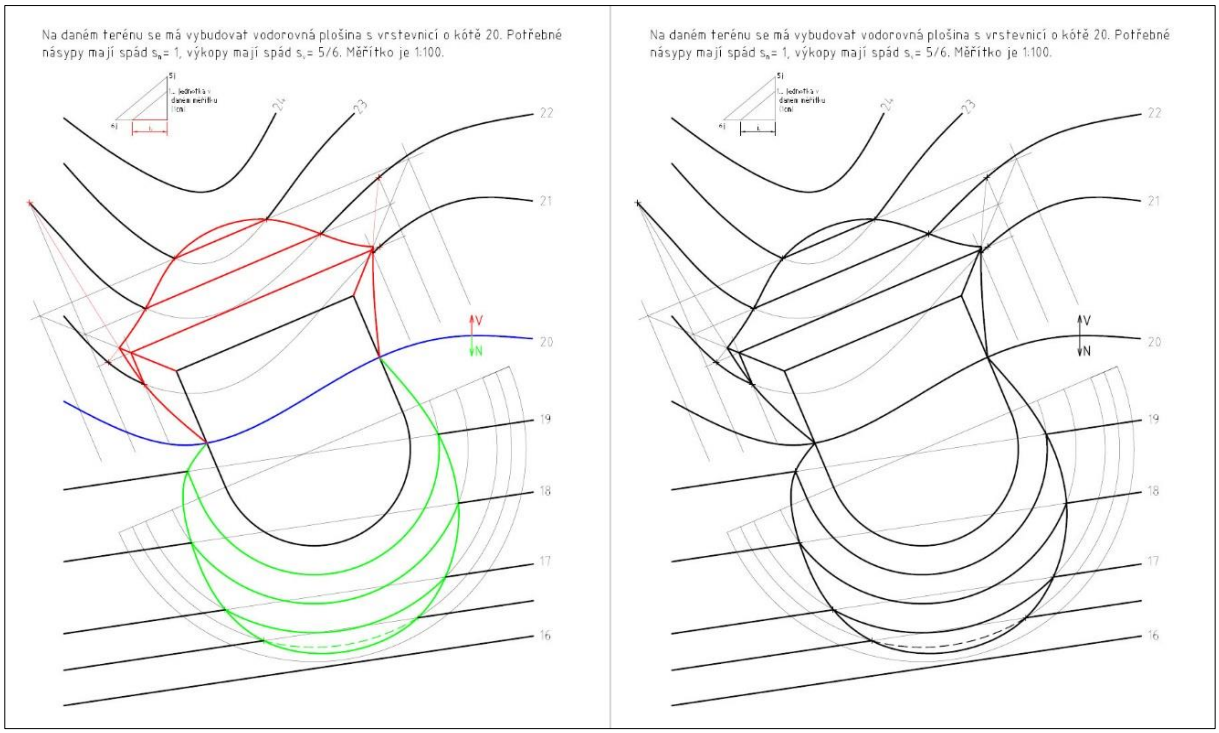


Obrázek 5: Krokování pomocí navigačního panelu.

Druhou metodou je pro krokování použít v „Nastavení“ – „Pro pokročilé“ zapnutí navigačního panelu pro krokování konstrukce, s případným nastavením bodů zastavení.



Obrázek 6: 3D modely teoretického řešení střech a okapů.



Obrázek 7: Ukázka krokovaného příklady na topografické plochy, vytvořený pomocí AutoCADu.

Závěr

Příspěvek seznamuje s novým výukovým materiálem do předmětu Konstruktivní geometrie na Stavební fakultě VUT v Brně a současně ukazuje možnosti programu GeoGebra pro tvorbu studijních materiálů. Tyto materiály jsou veřejně dostupné a je možné je využít i pro studenty nebo učitele jiných vysokých a středních škol.

Poděkování:

Tento článek vznikl za podpory *Institucionálního plánu VUT – Vnitřní soutěž 2021*.

Literatura:

[1] Moll, I., Prudilová, K., Puchýřová, J., Roušar, J., Slaběňáková, J., Slatinský, E., Slepička, P., Šafařík, J., Šafářová, H., Šmídová, V., Švec, M., Tomečková, J.: *Deskriptivní geometrie*, verze 1.0 -1.3 pro I. ročník Stavební fakulty Vysokého učení technického v Brně, Fakulta stavební VUT v Brně, 2001-2003. ISBN 80-86433-08-0

[2] Bulantová, J., Hon, P., Prudilová, K., Puchýřová, J., Roušar, J., Roušarová, V., Slaběňáková, J., Šafařík, J., Šafářová, H., Zrůstová L.: *Deskriptivní geometrie*, verze 2.0 až 4.0 pro I. ročník Stavební fakulty Vysokého učení technického v Brně, Soubor CD-ROMů Deskriptivní geometrie, Fakulta stavební VUT v Brně, 2008 – 2012. ISBN 978-80-7204-626-3

[3] Bulantová, J., Prudilová, K., Puchýřová, J., Roušar, J., Roušarová, V., Slaběňáková, J., Šafařík, J., Šafářová, H., Zrůstová L.: *Sbírka řešených příkladů z deskriptivní geometrie pro I. ročník Stavební fakulty Vysokého učení technického v Brně*, Fakulta stavební VUT v Brně, 2006-2007.

[4] Bulantová, J., Prudilová, K., Roušar, J., Šafařík, J., Zrůstová, L.: *Sbírka zkouškových příkladů z deskriptivní geometrie pro I. ročník Stavební fakulty Vysokého učení technického v Brně*, Fakulta stavební VUT v Brně, 2009.

[5] Šafařík, J., Zrůstová, L.: *Multimediální sbírka zkouškových příkladů z deskriptivní geometrie*, 4. ročník konference Užití počítačů ve výuce matematiky, České Budějovice, 5. – 7. listopad 2009, ISBN: 978-80-7394-186-4.

[6] GeoGebra [online]. [cit. 2021-10-10]. Dostupné z: < https://www.geogebra.org>

[7] Šafařík, J., Slaběňáková, J., Sivčák, J.: *Výuka deskriptivní geometrie na Stavební fakultě VUT a nové studijní materiály vytvářené v dynamickém systému GeoGebra*. In 37. konference o geometrii a grafice, Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics 2017. Bratislava: Slovak Society for Geometry and Graphics / Czech Society for Geometry and Graphics, 2017, ISBN: 978-80-89597-78-9, pp.153-162.

[8] Bulantová, J., Lachová, A.: *Teoretické řešení střech s Geogebrou*, Proceedings of the Czech-Slovak conference on geometry and graphics 2020. First. Plzeň: Vydavatelský servis, 2020, ISBN: 978-80-86843-71-1, pp.71-74.

[9] Urbánek, F., Zrůstová, L.: Přehled základních konstrukcí lineární perspektivy v programu GeoGebra, Proceedings of the Czech-Slovak conference on geometry and

graphics 2020. First. Plzeň: Vydavatelský servis, 2020, ISBN: 978-80-86843-71-1, pp.183-186.

[10] Bulantová, J., Lachová, A., Mencáková, K., Morávková, B., Rýparová, L., Szórád, M., Šafařík, J., Urbánek, F., Zrůstová, L.: Sbírka řešených příkladů z konstruktivní geometrie, [online]. GeoGebra. 2021 [cit. 2021-10-10]. Dostupné z < https://www.geogebra.org/m/ejhn4jay>

Jan Šafařík
Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, Stavební fakulta VUT v Brně
Veveří 331/95, 602 00 Brno
safarik.j@fce.vutbr.cz

Jana Bulantová
Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, Stavební fakulta VUT v Brně
Veveří 331/95, 602 00 Brno
bulantova.j@fce.vutbr.cz

Lucie Zrůstová
Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, Stavební fakulta VUT v Brně
Veveří 331/95, 602 00 Brno
zrustova.l@fce.vutbr.cz

POMŮCKA PRO VÝUKU ŘEZŮ TĚLES

Radek Šmíd

Gymnázium Jana Keplera

Abstrakt: Příspěvek je věnován vývoji a použití pomůcky určené primárně pro výuku řezů těles. Použité nástroje pro vývoj (3D modelování) pomůcky jsou volně dostupné, díky čemuž mohou sloužit i pro další vývoj. Součástí příspěvku je také sada úloh pro použití pomůcky, které vedou jednak k přímé ukázce podoby řezu krychle rovinou, ale i k myšlence konstrukce řezu stejným způsobem jako v promítání do roviny tak, jak je popsána v učebnicích.

Klíčová slova: Stereometrie, řez tělesa, 3D modelování, manipulativní prostředí.

Instrument for teaching body sections

Abstract: The article dels with explanation of the development and use of a tool designed primarily for teaching intersections between plane and solid. The tools used for the development (3D modeling) of the instrument are freely available and can also be used for further development. The article also includes a set of tasks for the use of the instrument. Tasks lead to demonstration of the shape of intersection of cube and planeand to the idea of the construction of the intersection as in the classic projection.

Key words: Stereometry, intersection of plane and solid, 3D modeling, manipulative instruments.

Úvod

Při výuce stereometrie je častou překážkou absence prostorové představivosti. S inspirací v manipulativních prostředích používaných na nižších stupních, zejména geoboardu pro geometrii na mřížových bodech, vznikla s využitím 3D modelování a 3D tisku pomůcka, která by mohla žákům usnadnit nahlédnutí této problematiky. Zjednodušeně řečeno jde o drátěný model se záchytnými body na hranách, mezi kterými jde natahovat gumičku. Kromě samotné pomůcky, kterou již úspěšně použilo několik vyučujících při výuce stereometrie a specificky tématu řezů těles, bude představena i sada úloh částečně specifických pro tuto pomůcku. Některé z těchto úloh byly společně s prvními exempláři pomůcky představeny již na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky v Praze 2020 a další vznikly jako reakce na připomínky i z potřeby použití přímo ve výuce.

1 Vývoj pomůcky

Pro vývoj pomůcky bylo rozhodujících několik impulzů. Mezi hlavními byla možnost využití školní 3D tiskárny a obeznámenost s technologií 3D tisku, dále pak znalost manipulativních prostředí, zejména geoboardu, z Hejného matematiky a v neposlední řadě aktuální potřeba vycházející z osnov a aktuální inspirace.

1.1 Krátce o 3D tisku

Technologie 3D tisku se v současnosti významně prosazuje a pravidelně se objevuje v novinových článcích a na výstavách[3]. Přesto se ukazuje, že označení této technologie jako jedné z těch, které měly změnit svět v posledních deseti letech [1], bylo přinejmenším předčasné. Již relativně dlouho funguje mnoho FDM tiskáren pracujících na principu protlačování plastové struny skrz nahřátou trysku podobně jako v tavné pistoli, akorát vše je výrazně tenčí. Pohyb trysky řídí počítač a rychlost je omezena rychlostí všech zúčastněných motorů (jak těch, které zajišťují vzájemný pohyb trysky a tištěného objektu, tak motoru tlačícího strunu do trysky) a rychlostí zahřívání. Pro efektivní 3D tisk je proto důležitý nejen tvar modelu splňující naše představy, ale také přizpůsobení pro samotný tisk.

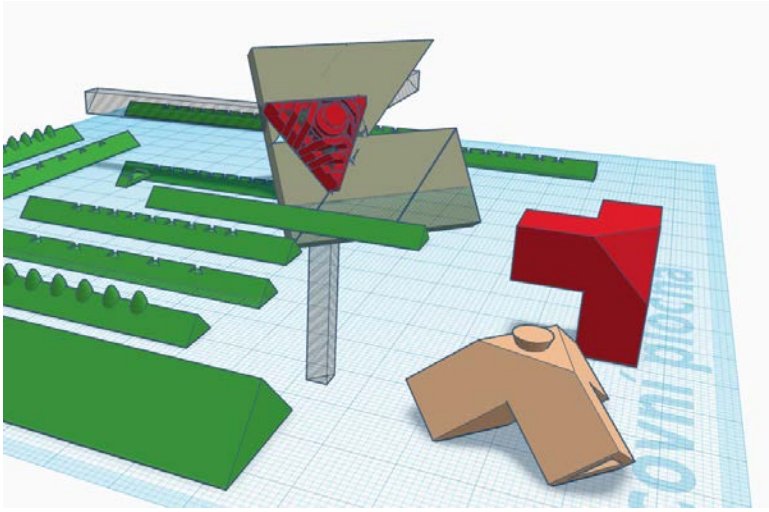
1.2 Manipulativní prostředí

Obecně se jedná o názorné pomůcky, na kterých lze ilustrovat nebo i objevovat matematické jevy přímou manipulací s danou pomůckou. Příkladem jsou algebraické dlaždice, dřívka (sirky), parkety (z Hejného matematiky) a také již zmiňovaný geoboard. Geoboard je deska s 9 (nebo i více) kolíky rozmístěnými typicky do čtverce 3×3 (4×4, 5×5, ...). Na kolíky pak žáci natahují barevné gumičky a tvoří tak různé obrazce podobně jako při kreslení na čtverečkovaný papír. Manipulace je velmi účinným nástrojem učení, jak dokázal už Piaget (uvedeno v [2]).

1.3 Modelování

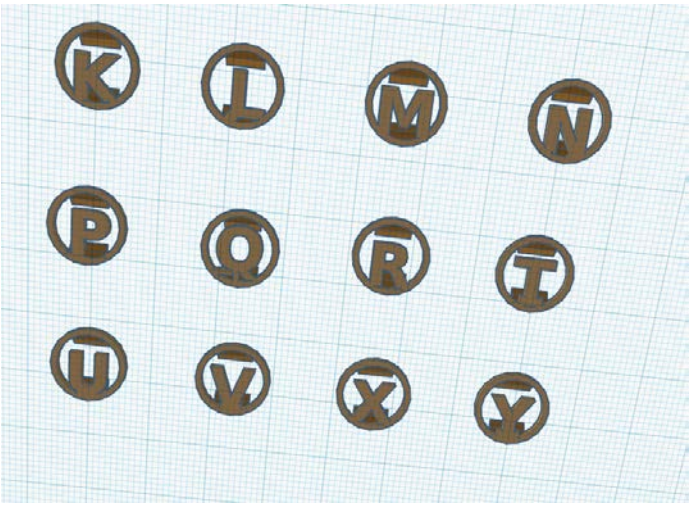
Od geoboardu již byl jen krůček k představované pomůcce. Hlavní částí tohoto krůčku se ukázalo být vytvoření 3D modelu, který bude odpovídat požadavkům na efektivní tisk a funkčnost. Pomocí on-line aplikace Tinkercad [**?**] bylo vytvořeno několik prototypů, z nichž nejlepším se ukázal být model složený z „vrcholů“ a „hran“ s prohlubněmi, který poskytoval nejlepší průhled modelem, velikost modelu, možnost ucycení gumiček a pevnost jednotlivých částí při minimalizaci času potřebného na tisk. Samotné „vrcholy“ jsou pak uzpúsobeny k zasunutí „hran“ i k zachycení napínané gumičky, což je umožněno složením několika tvarů, z nichž některé jsou označeny jako díra – na Obrázku 1 viditelně ční „hrany“ z „vrcholu“ uprostřed.

Pro vytištění byly použity různé materiály a zejména různé barvy. Při používání se ukázalo jako užitečné mít nějakým způsobem krychli označenou, což bylo věřešeno barevným odlišením vrcholu A a hrany AB. Dalším vzniklým požadavkem bylo označení



Obrázek 1: Ukázka aplikace Tinkercad s vymodelovanými díly.

body na hranách, pro které byly domodelovány posuvné značky připevnitelné na hrany (viz. Obrázek 2). Od myšlenky označení všech vrcholů bylo upuštěno z důvodu stability při rozkládání a opětovném skládání.

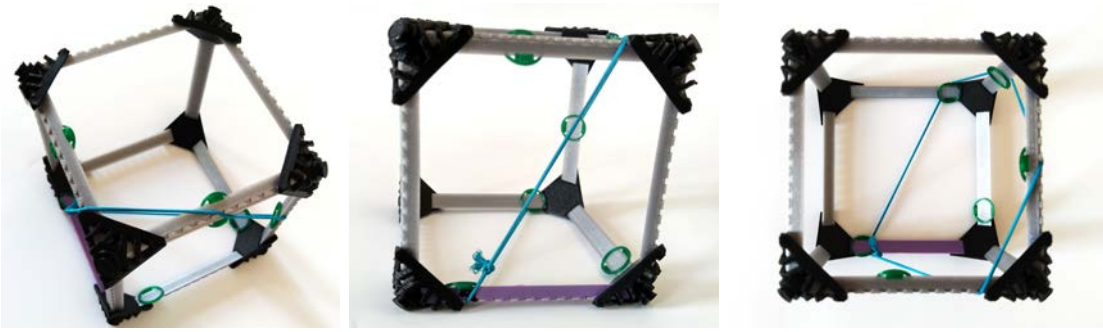


Obrázek 2: Pohled zdola na model značek připevnitelných na hrany.

2 Použití pomůcky

Hlavním účelem pmůcky je použití pro úlohy v tématu řezů těles, speciálně krychle (případně kvádru se zásobou různě dlouhých hran, výhledově i dalších těles, pro která budou namodelovány vrcholy), pro které je navržena a konstruována. Tyto úlohy lze řešit

jak konstrukčně pomocí prodlužování přímek (například pomocí špejlí), tak čistě intuitivně , protože na natažené gumičce je vidět, zda celá leží v jedné rovině – v takovém případě jde sice o konstrukci přibližnou, ale výrazně jednodušší a rychlejší, odhad se realizuje pomocí pohledů z rúzných úhlů, kdy se natahovaná gumička musí sama překrývat, aby vizuálně tvořila úsečku (viz Obrázek 3), je tedy vhodná pro experimentování i obecné pochopení pojmu řez tělesa rovinou.



Obrázek 3: Řez krychle rovinou konstruovaný odhadem. Zleva dva úhly pro odhad, zda se jedná o rovinu, vpravo pohled shora, na kterém je vidět tvar řezu.

Druhou možností je simulovat konstrukci řezu tělesa rovinou tak, jak je konstruován tradičně. Příkladem instrukcí pro takovou konstrukci jsou následující věty pro konstrukci řezů, jak jsou uvedeny v učebnici pro gymnázia Pomykalová [4]:

Lemma 2.1. *Leží-li dva různé body v rovině, pak i přímka jimi určená leží také v této rovině.*

Lemma 2.2. *Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.*

Lemma 2.3. *Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice.*

Pro hledání řezu jsou tyto věty použity při hledání průsečíků řezné roviny s přímkami, na kterých leží hrany tělesa. Typicky se tedy prodlužuje jedna již známá úsečka řezu a jedna hrana a od jejich průsečíku se hledá další průsečnice řezné roviny a stěny tělesa.

Po seznámení s úlohami z tématu řezů krychle bude představeno i další možnosti a směry dalších využití, tentokrát už bez ukázek, formulace úloh z dalších témat je ponechána laskavému čtenáři.

2.1 Doporučené úlohy

Pro úlohy je možné volit téměř libovolné řezy, nicméně může být matoucí, když řez prochází příliš blízko vrcholu. Ještě před samotným hledáním konkrétních řezů je možné položit několik otázek, které podnítí experimentování s pomůckou a obecnější přemýšlení o řezech těles:

Příklad 1. *Jaký tvar může mít řez krychle rovinou?*

Tuto otázku lze zároveň využít k opakování typů čtyřúhelníků, můžeme se speciálně ptát, jestli žáci dokáží složit lichoběžník, deltoid, obdélník apod.

Příklad 2. *Jaké pravidelné n-úhelníky mohou vzniknout jako řez krychle rovinou?*

Zde je zřejmé, že lze vytvořit čtverec (řez rovinou rovnoběžnou s některou stěnou), není těžké objevit rovnostranný trojúhelník (pak se lze ptát, jaký největší může být – nalezneme jednu ze stěn čtyřstěnu vepsaného do krychle) a pokud vybereme středy správné šestice hran, vznikne pravidelný šestiúhelník. Zajímavá může být také argumentace, proč nemůže vzniknout pravidelný pětiúhelník.

Příklad 3. *Řez jakou rovinou bude mít největší obsah?*

U této otázky nebude těžké věřit úhlopříčně nastavenému obdélníku, těžší bude to dokázat. Pro kvádr může být otázka zajímavější ve volbě mezi třemi obdélníky.

Další úlohy jsou koncipovány na krychli s běžným označením vrcholů $ABCDEFGH$ (kde $ABCD$ je „spodní“ čtverec a $EFGH$ „horní“, se svislými hranami AE, BF atd.) a tedy při nastavení jinak zbarvenou hranou k sobě dole a vrcholem A vlevo není problém se orientovat v názvech hran a umístění bodů na nich.

Příklad 4. *Dány body* $K \in AB \wedge 3|AK| = |BK|$ *(první zářez u A),*
$L \in CG \wedge |CL| = |GL|$ *(pátý zářez),*
$M \in FG \wedge |FM| = |GM|$ *(pátý zářez)*
a $N \in CD \wedge 2|CN| = |DN|$ *(třetí zářez od C).*

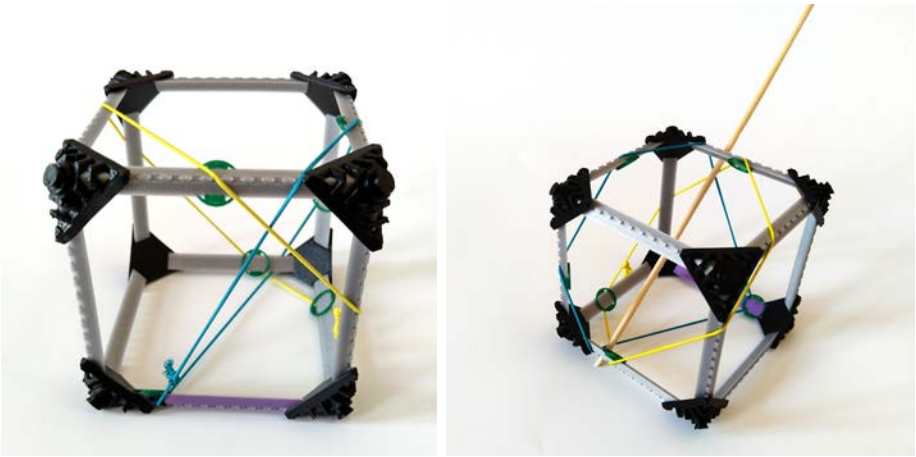
1. KLM
2. KEM
3. KNH
4. LMN

Příklad 5. *Dány body* $P \in EF \wedge |EP| = |FP|$ *(pátý zářez),*
$Q \in BC \wedge |BQ| = 2|CQ|$ *(třetí zářez od C),*
$R \in CD \wedge 2|CR| = |DR|$ *(třetí zářez od C, tedy* $R = N$ *z předchozí úlohy)*
a $S \in DH \wedge |DS| = |HS|$ *(pátý zářez).*

1. PQR
2. PQH
3. EQS
4. QRS
5. PQS

2.2 Další možnosti

Libolné dvě nerovnoběžné roviny mají průsečnici. Pokud tato prochází krychlí, můžeme na jejím povrchu najít průsečíky průsečnice s povrchem krychle (tam, kde se protínají natažené gumičky). Například na obrázku 4 jsou nataženy gumičky ukazující řez krychle rovinami KLM a PQR z předchozích úloh.



Obrázek 4: Řez krychle rovinou konstruovaný odhadem. Zleva dva úhly pro odhad, zda se jedná o rovinu, vpravo pohled shora, na kterém je vidět tvar řezu.

Pomůcka může být dále využita i v dalších tématech, která s řezy krychle nesouvisí. Při zachování jednoho odlišného vrcholu a jedné odlišné hrany (nebo zvýšení tohoto počtu) se lze například ptát, kolik různých krychlí lze složit. Oblast kombinatoriky obecně poskytuje mnoho potenciálních úloh. Rovněž by na pomůcce mohl být naznačen vzorec pro třetí mocninu dvojčlenu.

3 Závěr

Pomůcka zatím nebyla nijak vědecky zkoumána, lze se tedy opřít jen o ohlasy z konferencí, na kterých byla ukázána přítomným kolegům a samozřejmě o ohlasy studentů a kolegů na vlastní škole. Soudě podle opakovaného užívání pomůcky ve vzácných chvílích prezenčního vzdělávání se zdá, že s problémy, pro které byla konstruována, skutečně pomáhá, nebo alespoň žáky zaujme. Kromě případného výzkumu se snad v budoucnu rozšíří počet dostupných těles.

Literatura:

[1] BORT, Julie a Jan MAZAL. 10 technologií, které změní svět v příštích 10 letech. *ChannelWold.cz* [online]. [cit. 2021-12-10]. Dostupné z: `https://channelworld.cz/clanky/10-technologii-ktere-zmeni-svet-v-pristich-10-letech-4547`

[2] Fuchs, E., Lišková, H., Zelendová, E. (eds.): *Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost*, JČMF Praha, 2014. Dostupné z: https://www.svetgramotnosti.cz/Material/File?fileId=608

[3] PRŮŠA, Josef. Budoucnost výroby je tady: V Dubaji prezentujeme naši automatizovanou tiskovou farmu! *Prusaprinters blog* [online]. [cit. 2021-12-10]. Dostupné z: https://blog.prusaprinters.org/cs/

[4] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

[5] *Tinkercad* [online]. Autodesk [cit. 2021-12-10]. Dostupné z: https://www.tinkercad.com/

Radek Šmíd
Gymnázium Jana Keplera
Parléřova 118/2
169 00, Praha 6
e-mail: smid@gjk.cz

3D GEOMETRIA

Daniela Velichová

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta STU v Bratislave

Abstrakt: Príspevok je informáciou o novej digitálnej učebnici pre výučbu predmetov pojednávajúcich o geometrii priestoru. Učebnica je podpornou študijnou literatúrou, ktorá obsahuje množstvo animovaných dynamických ilustrácií a stereoskopických zobrazení útvarov trojrozmerného priestoru uľahčujúcich študentkám a študentom hlbšie porozumenie priestorových vzťahov a relácií, vybudovanie lepšej geometrickej a priestorovej predstavivosti.

Kľúčové slová: geometria trojrozmerného priestoru, útvary priestoru, zobrazovacie metódy.

3D GEOMETRY

Abstract: Paper brings information about new digital textbook for teaching subjects related to space geometry. Textbook is a supportive instructional material that contains many animated dynamic illustrations and stereoscopic views of the 3D space figures helping students to acquire deeper understanding of spatial relations, and to develop better geometric and spatial abilities.

Key words: geometry of three-dimensional space, spatial figures, projection methods.

Úvod

Jedným z mocných nástrojov v každej tvorivej vedeckej alebo technickej inžinierskej a dizajnérskej činnosti je geometria trojrozmerného priestoru, ktorá je dôležitou zložkou štúdia matematiky zastúpenou v obsahu predmetov najmä technicky a prírodovedne zameraných študijných programov univerzít. Základné geometrické súvislosti, klasifikácia geometrických objektov, ich vlastnosti a analytické vyjadrenie, zobrazovanie priestorových objektov a riešenie rôznych priestorových úloh sú integrálnou súčasťou matematického vzdelávania. Geometria je však považovaná za jednu z najnáročnejších častí matematiky, pričom geometrická a priestorová predstavivosť sú základným predpokladom matematickej tvorivosti a imaginácie. Rozvíjanie priestorovej predstavivosti patrí k dôležitým aspektom vzdelávacieho procesu, najmä z dôvodu praktickej aplikácie nadobudnutých kompetencií v reálnom živote.

Cieľom predstavovanej 3D učebnice geometrie je pomôcť študentkám a študentom technických univerzít rozvinúť a prehĺbiť ich schopnosti priestorového myslenia a podporiť ich matematickú tvorivosť a kompetencie, ktoré sú často požadované pri riešení problémov z reálnej praxe. Správne vnímanie priestorových súvislostí a vzťahov tiež prispeje k lepšiemu porozumeniu súvislostí a aplikácií matematických pojmov, relácií a vzťahov reprezentovaných

pomocou dvoch základných interpretácií - syntetickej a analytickej v iných disciplínach, prostredníctvom interpretácie pojmov a názornej demonštrácie správnosti uvádzaných tvrdení.

Pod priestorovou predstavivosťou rozumieme intelektovú schopnosť vybavovať si objekt priestoru na základe jeho rovinného obrazu, alebo reálne neexistujúci objekt trojrozmerného priestoru na základe jeho slovného či symbolického matematického opisu – rovnicou, vzorcom, vzťahom, apod. Geometrická predstavivosť sa vo všeobecnosti považuje za širší pojem, ktorý zahŕňa aj priestorovú predstavivosť, chápanú ako súbor predstáv o tvaroch a útvaroch a o vzájomných vzťahoch medzi geometrickými útvarmi priestoru a súbor schopností mentálne manipulovať s geometrickými útvarmi a ďalšími geometrickými predstavami v mysli. Je to schopnosť nielen vidieť v priestore, ale aj vedieť rekonštruovať priestorové objekty z ich rovinných priemetov. Táto schopnosť je dôležitá rovnako profesionálne ako aj pre praktické potreby každodenného života. Dá sa rozvíjať riešením vhodných úloh, a to u kohokoľvek, bez rozdielu rodu či úrovne vzdelania. Možno ju nadobudnúť aj životnými skúsenosťami a praktickými cvičeniami, a v každom veku.

Vizualizácia a dynamika

Všeobecne akceptovaným vymedzením pojmu vizualizácia je nasledujúca definícia.

Vizualizácia je schopnosť, proces a produkt tvorby, interpretácie, použitia a reflexie obrazov, zobrazení a schém v našom mozgu, na papieri alebo pomocou nových technologických nástrojov, s cieľom opísať a sprostredkovať informácie, rozvíjať nové, doteraz neznáme myšlienky a nápady, hlbšie im porozumieť a šíriť ich ďalej.

Význam vizualizácie a grafickej interpretácie v matematike bol demonštrovaný v mnohých štúdiách už koncom minulého storočia, pozri [1] - [4]. Nové formy organizácie vzdelávacieho procesu významne ovplyvňujú tiež spôsoby získavania vedomostí, mieru porozumenia novým poznatkom a hĺbku vedomostí nadobudnutých študentkami a študentmi. Vizualizácia matematických pojmov a priame manipulácie s týmito abstraktnými modelmi v prostredí dynamických matematických softvérov predstavujú nové formy aktívnych metód učenia.

Prvé pokusy použiť nové technológie vo výučbe matematiky a zaviesť inovatívne učebné stratégie sa objavili už pred 20-timi rokmi. Dreyfus uviedol už v roku 1991, pozri [5], množstvo príkladov poukazujúcich na mocnosť vizualizácie v matematickom uvažovaní a porozumení. Uvádza, že aktívna manipulácia s virtuálnymi modelmi môže pozitívne ovplyvniť analytické uvažovanie a zovšeobecňovanie výsledkov, čo je mimoriadne dôležité najmä vo výučbe matematiky. Upozornil však tiež na možné problémy súvisiace s nesprávnym chápaním a interpretáciou matematických pojmov, spôsobené nevhodnými vizuálnymi modelmi.

Norma Presmeg opísala v roku 2006 výsledky svojho výskumu, pozri [6], kde klasifikovala rôzne mentálne predstavy ľudského mozgu:

Konkrétne obrazy v mysli

Statické kópie obrazov, ktoré si pamätáme po ich zahliadnutí v tlačených materiáloch, v digitálnej forme z on-line zdrojov, alebo obrazy zapamätané v našej mysli z rôznych vizuálnych zdrojov - film, video, prezentácie.

Pamäťové záznamy vzorov
Mentálne vizualizácie vzorov (logá), vzorcov alebo schém zapamätané z tlačených alebo digitálnych zdrojov, z rôznych prezentácií, napr. plagátov, alebo napísané na tabuli.

Kinestetické obrazy
Vizuálne podnety generované, transformované a vnímané pri fyzikálnom pohybe.

Dynamické obrazy
Mentálne scény s pohybujúcimi sa objektami alebo časti týchto scén, ktoré podporujú mentálne schopnosti transformovať alebo premiestňovať získané vizuálne obrazy.

Obrazy vzorov
Vizuálne schémy reprezentujúce abstraktné relácie, akési grafické reprezentácie významu, ktoré sú najabstraktnejším typom vizualizácie a najdôležitejšou mentálnou predstavivosťou pre porozumenie matematickým vzťahom.

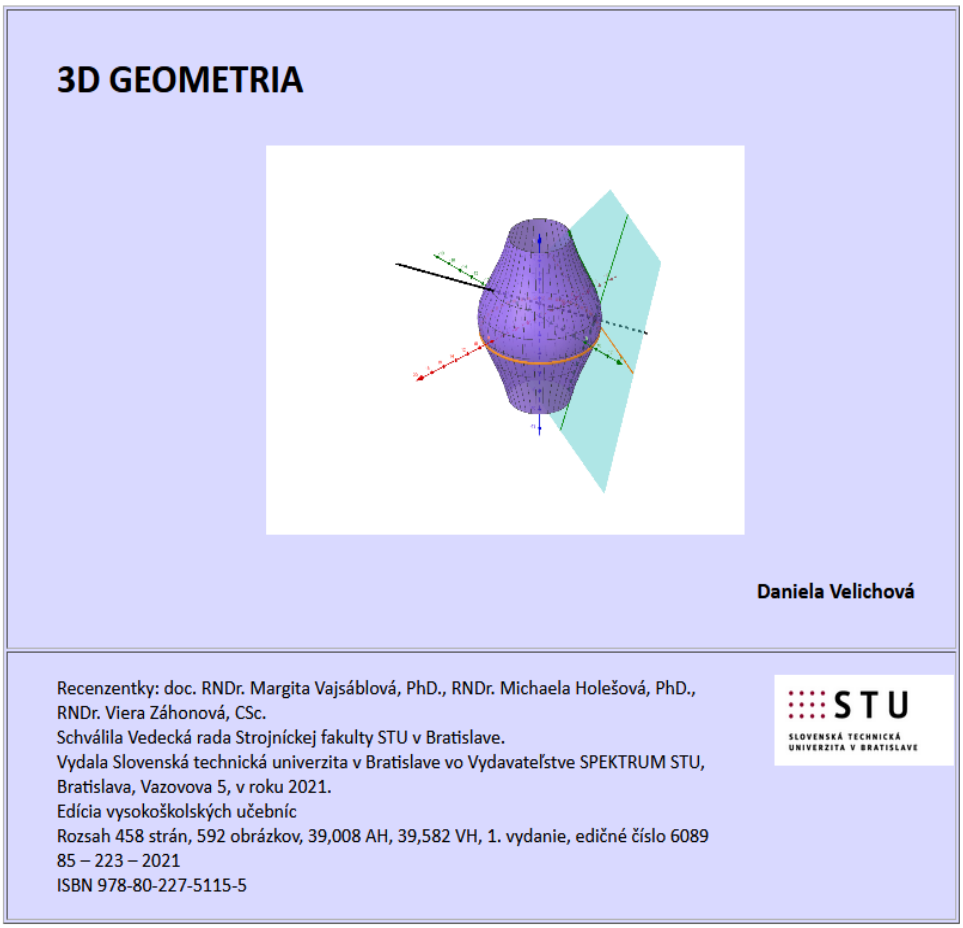
Ľudský mozog uchováva informácie, poznatky a dáta v dvoch základných formách:

1. Graficky
   tvary a znaky (geometrické a numerické)
   schémy, grafy a diagramy
   symbolické reprezentácie (matematické formule)
   vzory, piktogramy, ikony
   logá, info-grafiky
   kresby, obrazy, náčrty a mapy
2. Slovne

Didaktické metódy používané vo vzdelávacom procese, ktoré sú orientované na dynamický rozvoj oboch uvedených foriem uchovávania poznatkov – graficky aj slovne, môžu významne ovplyvniť kvalitu a hĺbku porozumenia a trvalú udržateľnosť nadobudnutých vedomostí.

Dynamika otvára cestu k objavovaniu kontextu a k chápaniu súvislostí a vzťahov. Dynamická práca, aktívne manipulácie s virtuálnymi objektami umožňujú nadobudnúť hlbšie porozumenie a schopnosti používať technológie pri analýze a riešení problémov. Súčasný výskum ukazuje, že počítačovo podporované manipulatívne techniky a nástroje sú ešte efektívnejšie ako použitie reálnych objektov – 3D modelov, ako uvádza [6]. Existuje mnoho faktorov, ktoré svedčia v prospech týchto tvrdení, pričom medzi najrelevantnejšie z nich patria nasledujúce: dynamika a interakcia virtuálneho prostredia, dve rôzne a súčasne prezentované interpretácie predstavovaných pojmov – analytická a syntetická, vzťahy a súvislosti medzi týmito interpretáciami, aktívne objaviteľské metódy aplikované na virtuálne existujúce entity, heuristické objavovanie a modelovanie počas procesu nadobúdania vedomostí, [7] - [10].

Obsah učebnice



Obr. 1. Úvodná stránka učebnice 3D geometria.

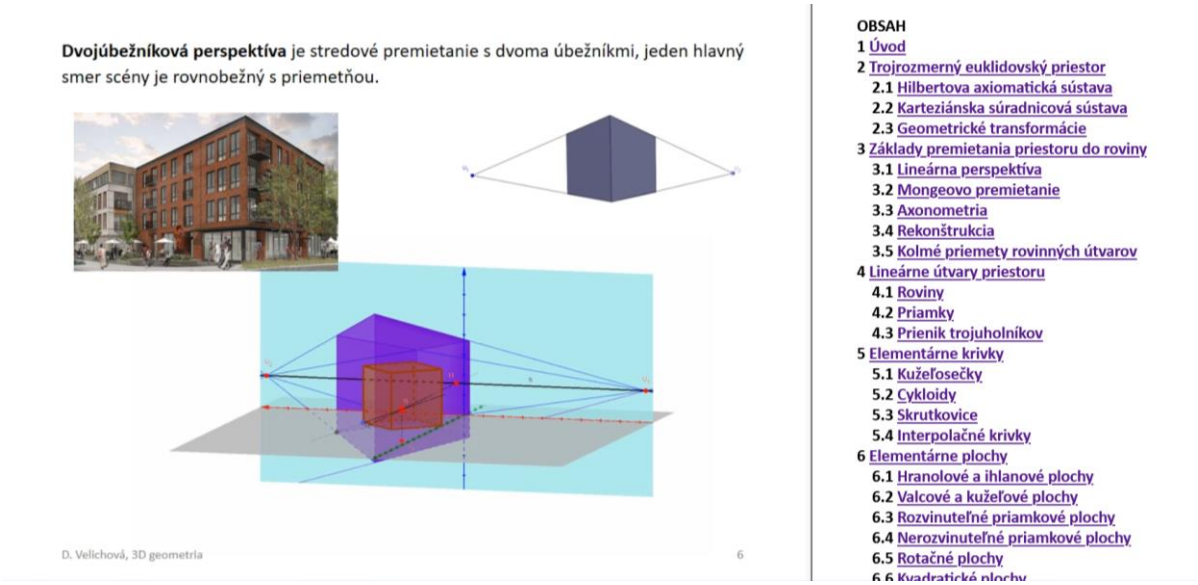
Prezentovaná učebnica je primárne podpornou študijnou literatúrou pre predmet Konštrukčná (Deskriptívna) geometria na technických univerzitách. Úlohou a zmyslom tohto predmetu je stimulovať priestorovú predstavivosť študujúcich (priestorové videnie), rozvíjať schopnosť mentálne manipulovať s geometrickými útvarmi a ďalšími geometrickými predstavami v mysli, a taktiež vybudovať a upevniť zručnosti potrebné na zobrazovanie priestorových objektov pomocou štandardných zobrazovacích metód a ich rekonštrukciu z rovinných priemetov.

Učebnica je koncipovaná ako on-line učebný materiál pripravený vo forme webstránok a edukačných videí s množstvom dynamických animácií jednotlivých geometrických konštrukcií a zobrazení, a obsahuje stereoskopické dvojfarebné zobrazenia útvarov pre 3D vnem. Je dostupná na internete pre študujúcich na Slovenskej technickej univerzite v Bratislave, a je možné zakúpiť ju na DVD pamäťovom médiu vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU na adrese https://www.vydavatelstvo.stuba.sk/obchod/3d-geometria .

Úvodné kapitoly učebnice sa zaoberajú axiomatickou výstavbou geometrie trojrozmerného priestoru, uvedená je úplná Hilbertova axiomatická sústava so zmienkou o neeuklidovských

geometriách, zavedená je karteziánska súradnicová sústava a euklidovská metrika priestoru a predstavené sú základné operácie s vektormi. Ďalej pokračuje kapitola so stručnou klasifikáciou euklidovských geometrických transformácií, kde je detailne uvedený opis transformácií otáčanie okolo priamky v priestore a skrutkový pohyb.

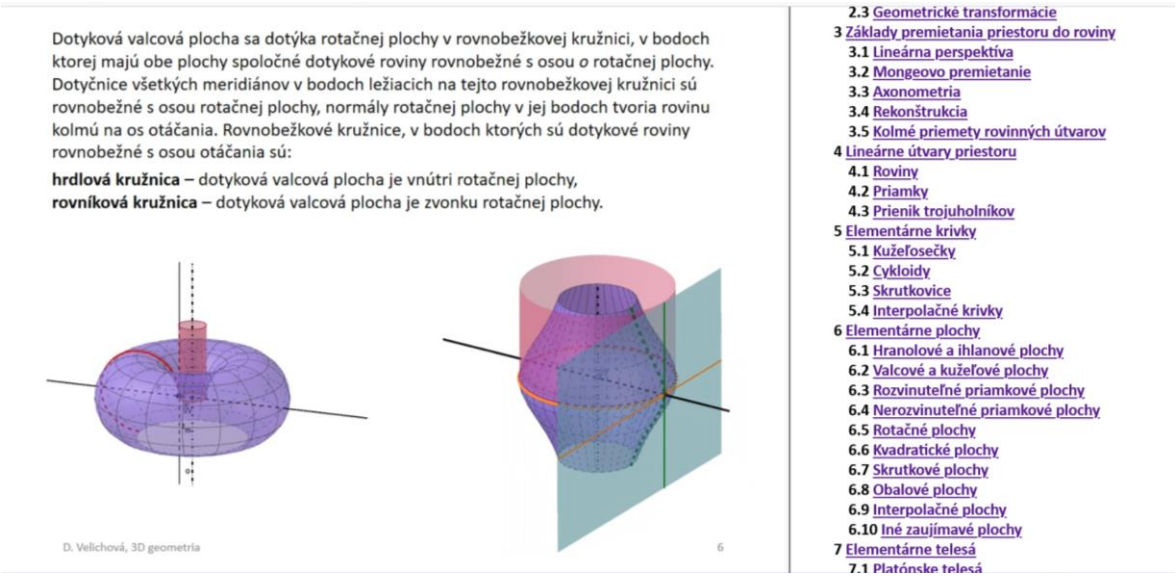
Nasledujúca kapitola približuje základy premietania priestoru do roviny, dynamicky sú tu predstavené základné zobrazovacie metódy – Lineárna perspektíva, Mongeovo premietanie, axonometria. Dynamicky ilustrovaná je tiež rekonštrukcia priestorového objektu z jeho kolmých priemetov a konštrukcia kolmých priemetov jednoduchých rovinných útvarov.



Obr. 2. Ukážka z videa Lineárna perspektíva.

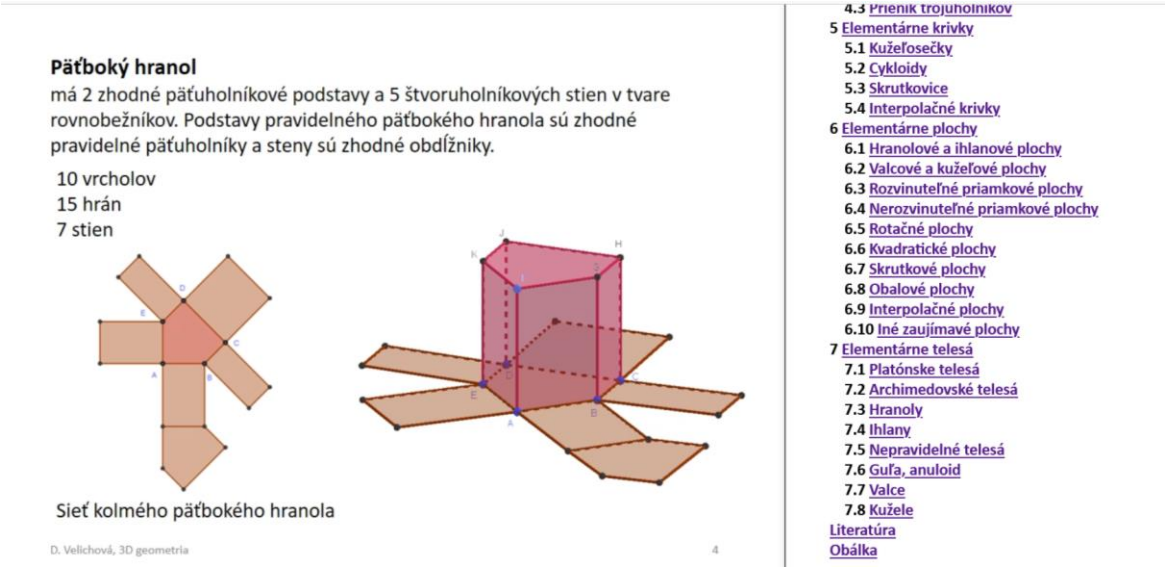
V ďalších kapitolách sú opísané (analyticky aj synteticky) lineárne útvary priestoru - roviny a priamky a ich vzájomná poloha. Prienik dvoch rovín je ilustrovaný na prieseku a záseku dvoch trojuholníkov. Nasledujúca kapitola je venovaná elementárnym krivkám a ich vlastnostiam. Po všeobecnom úvode so základnými definíciami a opisom vnútorných geometrických vlastností kriviek pomocou metód diferenciálnej geometrie sú detailne spracované vlastnosti, základné konštrukcie a zobrazenie kriviek – kužeľosečky, cykloidy, skrutkovice a interpolačné krivky.

Kapitola elementárne plochy opisuje všeobecné vlastnosti najznámejších používaných plôch, obsahuje podkapitoly: hranolové a ihlanové plochy, valcové a kužeľové plochy, rozvinuteľné piamkové plochy, nerozvinuteľné priamkové plochy, rotačné plochy, kvadratické plochy, skrutkové plochy, obalové plochy, interpolačné plochy. Okrem zobrazení, dynamických konštrukcií približujúcich výtvarné zákony predstavovaných kriviek a plôch priestoru sú dôsledne uvedené vždy aj analytické reprezentácie prezentovaných útvarov, ich rovnice a vlastnosti. Stereoskopické priemety týchto priestorových objektov poskytujú čitateľkám a čitateľom realistický trojrozmerný vnem. Predstavované abstraktné geometrické útvary ožívajú pomocou virtuálnej reality v stereoskopicky zobrazených trojrozmerných scénach. Všetky takéto ilustrácie sú viditeľne označené znakom dvojfarebných červeno-modrých okuliarov, pomocou ktorých je potrebné obrázky čítať, aby sa dostavil náležitý očakávaný 3D efekt.



Obr. 3. Ukážka z videa Rotačné plochy.

Záverečná kapitola je venovaná klasifikácii elementárnych telies a konštrukcii plášťov niektorých z nich. Pojednáva postupne o vlastnostiach pravidelných Platónskych telies a polopravidelných Archimedovských telies, nasledujú podkapitoly o všeobecných *n*-bokých hranoloch a ihlanoch, o nepravidelných hranatých telesách, ktoré vzniknú zrezaním pravidelných telies, resp. výbermi z týchto telies, ďalej o valcoch a kužeľoch, o guli a anuloide. Uvedené sú tiež základné vzorce pre výpočet objemov a obsahu povrchov elementárnych telies.



Obr. 4. Ukážka z videa Hranoly.

Záver

Vizualizáciu možno považovať za určitú formu aplikácie teoretického poznatku. Tvorba vizuálneho modelu je tiež istá forma overenia hĺbky porozumenia danému pojmu a schopnosti aplikovať tento poznatok v inom kontexte. Je zároveň konsolidáciou nadobudnutých vedomostí, priamym použitím daného poznatku a transferom poznatkov do iného kontextu. Tvorba dynamických modelov slúži tiež ako inšpirácia používať IKT zmysluplne, ako nový didaktický nástroj oslovujúci mladú generáciu. Nástroj, ktorým môžeme motivovať študentky a študentov, podnietiť ich aktívny záujem o štúdium geometrie a ponúknuť im vhodný prostriedok pre realizáciu ich vlastných tvorivých nápadov a inšpiratívnych myšlienok.

Dynamika otvára cestu k objavovaniu kontextu, chápaniu súvislostí a vzťahov, čo je často v matematike – geometrii omnoho dôležitejšie ako detailné ale nesúvislé čriepky vedomostí.

Autorka verí, že predstavená dynamická on-line učebnica zaujme nielen študentky a študentov technických univerzít, ale aj širšiu verejnosť, a bude prínosom k lepšiemu pochopeniu poslania geometrie a jej užitočnosti. Rozvíja nielen schopnosť vidieť v priestore, ale aj vedieť rekonštruovať priestorové objekty z ich rovinných priemetov. Táto schopnosť je dôležitá rovnako profesionálne, ako aj pre praktické potreby každodenného života.

Literatúra:

[1] Bishop, A. Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship. *Research in Education*. 1973, vol. 9, issue 1, p. 43-49.

[2] Bishop, A. Spatial Abilities and Mathematics Education: A Review. *Educational Studies in Mathematics*. 1980, vol.11, issue 3, p.257-269.

[3] Krutetskij, V. A. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1976. 417 p.

[4] Lean, G. A., Clements, K. Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, no. 3, p. 267-299.

[5] Dreyfus, T. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *Proceedings of the 15th PME International Conference,* Vol. 1. USA: ERIC, 1991. ED 352 274, pp. 33-48.

[6] Presmeg, N. C. Research on visualization in learning and teaching mathematicse. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (Boero eds.), Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2006, p. 205-235.

[7] Velichová, D. Dynamic Visualizations in Education of Mathematics. *Proceedings of the SITE 2018 Conference*, Washington D.C. USA, pp. 1858-1863.

[8] Velichová, D. Visualization in teaching = activation of students. *Aplimat 2020 Proceedings*, Bratislava 2020, pp. 1098-1106.

[9] Velichová, D. Visualization in Geometry Using Educational Videos. *Proceedings of EDULEARN20 Conference*, Palma di Malorca 2020, pp. 0016-0024.

[10] Velichová D. The role of visualization in mathematics. *The 20th SEFI MWG Seminar on Mathematics in Engineering Education*, Proceedings, Kristiansand 2021, Norway, pp. 63-68.

Daniela Velichová
Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta STU v Bratislave
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovensko
daniela.velichova@stuba.sk

POČÍTAČEM PODPOROVANÉ HODNOCENÍ V MATEMATICE

Klára Vocetková

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Ekonomická fakulta

Abstrakt: Poslední rok přesunul prezenční školní výuku do online prostředí a studenti museli začít využívat digitální materiály v různých e-learningových systémech ze svých domovů. Otázkou je, zda jsou online materiály pro studenty, kteří je využívají k samostudiu, stejně přínosné jako jejich papírové protějšky. Tento příspěvek představuje výzkum zaměřený na práci studentů s interaktivní a tištěnou variantou učebnice z matematiky.

Klíčová slova: Khanova škola, Tištěná vs. digitální učebnice, Technologie ve vzdělávání, University student learning,

Computer Aided Assessment in Mathematics

Abstract: Last year, he moved full-time schooling into an online environment. Students had to start using digital materials in various e-learning systems from their homes. The question is whether the online materials are as beneficial as their paper-based counterparts for the students using them for self-study purposes. This paper presents research focused on students' work with an interactive and printed variant of a mathematics textbook.

Key words: Khan Academy, Printed versus digital learning, Technology of Education, University student learning

Úvod

Informační a komunikační technologie (ICT) ve vzdělávání jsou dnes již nepostradatelnou součástí vyučovacího procesu. Školství v posledním roce zaznamenalo obrovský nárůst poptávky v této oblasti. Zatímco dříve byla interaktivní výuka považována jako metoda, jejíž hlavním cílem bylo nabídnout zábavnější a méně stereotypní formu výuky a zvýšit motivaci k učení, dnes se stala díky distančnímu vzdělávání všudypřítomná. Na výuku pomocí ICT museli přejít i vyučující, kteří do této doby striktně zastávali tradiční výklad výuky za pomocí tabule, papíru a tužky. Dovednost pracovat s ICT ve vzdělávání se v průběhu tohoto roku stala nepostradatelnou součástí vyučovacího procesu a zároveň novou podmínkou, která je od každého vyučujícího požadována.

1 Počítačem podporované hodnocení

Na jaře roku 2020 nabídly výukové portály po dobu nutného distančního vzdělávání jejich používání zdarma, a učitelé se začali s digitálním prostředím seznamovat. Pro mnohé to určitě nebylo jednoduché. Díky online výuce se museli vyučující naučit narychlo ovládat různé počítačové programy a aplikace. Distanční výuka pokračovala i v následujícím školním roce, a zde dokonce naši žáci a studenti byli u obrazovek počítačů nejdéle z celé Evropy. Učitelé tedy museli postupně pomocí PC nejen vyučovat, ale i testovat a klasifikovat.

Gueudet a Trouche (2009) uvádí, že je třeba vhodně při jakémkoliv testování v matematice propojit tři důležité komponenty: materiální složku (papír, počítač), složku matematického obsahu (pojmy, úkoly a techniky) a didaktickou složku (organizační prvky a správné rozplánování probírané látky). Z celé řady matematických výzkumů (Abedi a Lord, 2001; Fang a Schleppegrell, 2010; Nebeský, 1982) je zřejmé, že úspěšnost správného vyřešení matematických úloh je spojena s jazykovou vybaveností a složitost textu hraje významnou roli při jejich řešení. Dále je patrné, že nepřesná či nejednoznačná otázka nebo pouze povrchní zpracování problému mohou být mnohdy problémem aktuální pedagogiky v matematice a že existuje několik ovlivňujících faktorů, které musí být zváženy i v nově vznikajících médiích.

Problémem také je, že nelze vždy jednoduše všechny matematické úlohy přenést z tradičních tištěných materiálů do digitálního prostředí, neboť jsme omezeni charakteristikou nabízených úloh a metodami testování (Lenhard, Schroeders & Lenhard, 2017). Důsledkem toho může být jednak menší rozmanitost banky úloh, ale také povrchní řešení problému. Také Noyes a Garland (2008) zmiňují, že dosažení rovnocennosti v úlohách založených na papíře či na počítači představuje obtížný problém a vždy budou existovat úlohy, kde přenositelnost nebude možná. Naopak výsledky studie Sangwin a Köcher (2016) ukazují, že přenositelnost je proveditelná pro významnou část testovaných otázek. Jako největší překážku při používání automatického vyhodnocování testů uvádí požadavek zkoušejících, aby studenti vyučujícím doložili, že příklad opravdu spočítali správnou metodou. Pokud se dále zamýšlíme nad přenositelností jednotlivých úloh z papírové do digitální podoby, je třeba si uvědomit, že naopak v digitálním prostředí budou vznikat nové typy úloh. Jedná se například o tzv. přetahovačky. Stacey a Wiliam (2012) zmiňují, že počítače poskytují řadu příležitostí pro vývoj interaktivnějších, autentičtějších a poutavějších testů.

Kromě přenositelnosti testovacích úloh z papíru do počítače je třeba zohlednit i další faktory. Mezi ty patří pochopitelně technické možnosti a kvalitní internetové připojení. Dalším faktorem, který je třeba zohlednit je nastavení časového rámce. Zde záleží opět na typu testovací otázky a na složitosti odpovědi, kterou je třeba do testovacího prostředí zadat. Je třeba si uvědomit, že ne všichni studenti umí rychle vkládat mocniny či různé závorky. Právě používání správné syntaxe je u některých typů matematických otázek jedním z dalších důležitých faktorů.

Výhodou digitálního testování je bezesporu rychlé vyhodnocení testu a okamžitá zpětná vazba. Bohužel systémy nepodají studentům žádné vysvětlení, proč je odpověď špatně. Také hodnotí pouze konečný výsledek, nikoliv postup. Další výhodou je možnost opakovaného procvičování. Tato výhoda se může stát nevýhodou, pokud studenti řeší úlohy stylem „pokus-omyl“. Burch a Kuo (2010) upozorňují, že opakované vkládání odpovědi může vést k tomu, že si student místo

důkladného přemýšlení osvojí strategii „pokus-omyl“. Axtell a Curran (2011) u této nevýhody zmiňují, pro hlavním problémem je, že student může získat falešný pocit porozumění látky. Součástí některých interaktivních výukových je „Přehled výkonů“, který nezapočítává špatně zodpovězenou otázku a student musí pokračovat znovu s nově vygenerovaným příklady.

Přínosem počítačem podporovaného hodnocení ve vysokoškolské výuce matematiky se zabývala ve své případové studii Jahodová Berková (2017). Zjistila, že pozitivním efektem počítačem podporovaného hodnocení je, že je odbourána diskuze zaměřená na nespokojenost studentů s hodnocením učitele, jelikož je zodpovědnost za hodnocení přenesena na počítač. Na druhou stranu někteří studenti začali přikládat počítači přílišný význam, a dokonce v řadě případů technologie utlumila postavení učitele ve výuce. Faktor „Podvádění“ zmiňovali studenti v průběhu studie Jahodové Berkové (2017) jako výhodu i jako nevýhodu. Výhodou bylo myšleno, že pokud má každý student, díky variabilitě testů, jinou otázku, je obtížnější podvádět a musí příklad počítat sám. Naopak, díky internetovému připojení, lze snadno podvádět s podporou například matematického programu Wolfram. Pokud ale zvolíme počítač k formativnímu testování, předpokládáme, že studenti nemají potřebu podvádět, protože získané znalosti využijí při závěrečném testování.

2 Digitální výukové materiály v matematice

Nabídka digitálních výukových materiálů v matematice se rozšiřuje dvojím způsobem. Na jedné straně postupně přibývají nakladatelství, která kromě tištěných učebnic začali vydávat i I-učebnice. Jedná se na první pohled o stejnou verzi učebnice, která je doplněna řadou multimediálních a interaktivních prvků. Na straně druhé se rozrůstá nabídka samostatných interaktivních výukových portálů.

Na českém trhu existuje celá řada dalších výukových portálů, jejichž shrnutí nalezneme například na stránkách „Vzdělávání *#NaDálku"*[1] což je rozcestník MŠMT s nástroji pro online vzdělávání. Při realizaci studie jsme se opřeli již vytvořené digitální výukové materiály a digitální výukové materiály selektovali na základě těchto požadavků:

- budou v češtině,
- budou obsahovat krokované nápovědy,
- budou obsahovat testy s automatickým vyhodnocením,
- budou pokrývat látku letního semestru.

Po prostudování digitálních výukových materiálů splňovala naše požadavky jen *Khanova škola.* Příklady, které jsme pro studenty vybrali, byly typu *Multiple Choice Question*[2], kdy student vybíral z předem nabízených odpovědí, z nichž je jedna nebo více odpovědí správně. Tento typ testovací úlohy má své pro i proti. Z jedné strany je právě kladena důležitost na správně označenou odpověď, zatímco hlubší pochopení testované látky není ověřováno

[1] https://nadalku.msmt.cz/cs/vzdelavaci-zdroje/matematika

[2] Označované také jako MCQ (Multiple Choice Question).

(Sangwin, 2013). Z druhé strany MCQ vyloučí případy, kdy student příklad spočítá správně, ale program s jeho odpovědí nesouhlasí, neboť právě MCQ vyloučí problémy spojené se špatnou syntaxí.

3 Analytická část

Pro analytickou část práce jsme vypracovali totožné materiály v tištěné i interaktivní variantě, přičemž jsme tištěné materiály vytvářeli na základě digitálních, včetně všech nápověd. Celkem se jednalo o 111 úloh, které byly zpracovány do 27 sad úloh. Studenti si v rámci osvojování učiva mohli vybrat mezi tištěnou a interaktivní variantou učebnice, vyplňovali záznamové archy, které jsme následně zpracovali jak kvantitativně, tak kvalitativně. V případě tištěné varianty obdrželi tři samostatné PDF soubory. V prvním měli zadání všech úloh, v druhém souboru krokované nápovědy ke všem úlohám a ve třetím souboru si mohli zkontrolovat správnost výpočtů. V případě interaktivní varianty učebnice studenti obdrželi odkaz na interaktivní cvičení, kde kromě zadání mohli na stejné stránce zažádat o nápovědy a na závěr si nechali výsledek automaticky zkontrolovat. V případě interaktivní varianty mohli studenti při nepochopení látky též zhlédnout video a u některých příkladů rozkliknout i tzv. mezivýpočty. Pro výpočet mohli použít i přiloženou kalkulačku.

Hlavním cílem výzkumu bylo komparací tištěné a interaktivní varianty učebnice analyzovat strukturní komponenty (dílčí prvky učebnice) v nových médiích. Z pohledu kvantitativního výzkumu bylo našim cílem zjistit rozdílné aspekty mezi tištěnou a interaktivní variantou učebnice pro vybrané kapitoly matematiky při osvojování učiva. Sledovanými aspekty byly chybovost studenta, použitý počet nápověd k vyřešení úloh a čas potřebný k vyřešení úloh. Z pohledu kvalitativního výzkumu bylo našim cílem zjistit preference studentů při výběru varianty učebnice a využitelnost strukturních komponent v nových médiích při osvojování učiva.

Výzkumu se zúčastnilo 157 studentů. Vypracovávání a odevzdávání úloh bylo zcela dobrovolné, sloužilo k osvojování učiva získaného na online přednáškách a nemělo vliv na výslednou známku. Také bylo na každém studentovi, jakou zvolí k procvičování variantu učebnice. Výsledky studenti zaznamenávali do záznamových archů, které vkládali do prostředí *LMS Moodle*.

3.1 Kvantitativní část výzkumu

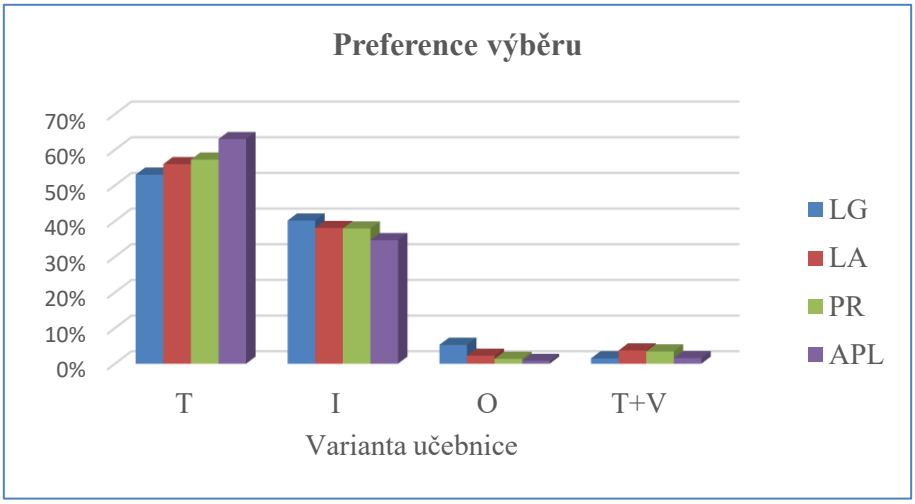
Pokud student nepotřeboval žádnou nápovědu, protože znal postup, ale přesto se při výpočtu dopustil nějaké chyby, počítal úlohu znovu. V obou variantách učebnic zaznamenávali studenti svou **chybovost**. V rámci jedné úlohy mohli studenti chybovat i vícekrát. Druhým sledovaným aspektem byl **použitý počet nápověd.** Počítáme zde s hodnotou, kterou jsme získali podílem použitého počtu nápověd k maximálnímu počtu nápověd v každé sadě úloh. Jednotlivé hodnoty použitého počtu nápověd mohou nabývat hodnot z intervalu od nuly do jedné, přičemž nula znamená výpočet úloh bez použití jakékoliv nápovědy, naopak hodnota jedna znamená použití všech dostupných nápověd v rámci sady úloh. Třetím sledovaným aspektem byl **čas** potřebný k vyřešení úloh. Čas byl měřený v sekundách.

Vyplněné formuláře jsme nejdříve vyhodnotili v programu *Excel.* Zjistili jsme, že chybovost studentů, používajících interaktivní variantu, je vyšší. Celkově tomu tak bylo ve 26 z 27 úloh. Ve všech 27 sadách úloh bylo zjištěno, že střední hodnota použitého počtu nápověd je pro interaktivní variantu nižší. Znamená to, že studenti využívající interaktivní variantu nevyužívají tolik nápověd při řešení úloh a snaží se úlohy vyřešit spíše bez nich. Ve 23 sadách úloh bylo zjištěno, že studentům používajícím interaktivní variantu učebnice stačí k vyřešení sad úloh méně času. Všechny zjištěné výsledky jsme ověřili i statisticky. Pro statistické zpracování dat jsme použili programy *Statistica* a *R-studio*. V programu *Statistica* jsme provedli logistickou regreci a následně *Bonferroniho korekci*, v programu *R-studio* jsme použili náhodný smíšený model (tzv. *Random mixed model*). Podrobněji je kvalitativní výzkum práce popsán v již publikovaném příspěvku v časopise *Mathematics in Education, Research and Applications* (Vocetková a Šulista, 2021).

3.2 Kvalitativní část výzkumu

Druhým hlavním cílem našeho výzkumu bylo zjistit preference při výběru varianty učebnice. Při zadávání úloh jsme se domnívali, že si studenti vyberou tištěnou či interaktivní variantu učebnice. Při zpracovávání dat jsme ale zjistili, že nemálo studentů volilo další přístup k práci s výukovými materiály. Někteří studenti totiž kombinovali obě varianty učebnice, někteří preferovali tištěnou variantu, ale z různých důvodů nakonec použili i interaktivní variantu a poslední část studentů preferovala sice také tištěnou variantu, ale nestačily jim k pochopení látky nápovědy, tak použili videa přiložená k interaktivní variantě učebnice. Tudíž jsme preference studentů rozdělili do následujících skupin: tištěná varianta, interaktivní varianta, obě varianty a tištěná varianta + video.

Následující graf uvádí preference studentů při výběru učebnice. Z dat vidíme, že v průběhu celého testování rostl zájem o tištěnou variantu učebnice na úkor interaktivní varianty. V tabulkách pak shrnujeme odůvodnění a komentáře studentů, na základě kterého si vybrali variantu učebnice. Každý student napsal svůj osobní názor, přičemž mohl uvést i více důvodů.



Graf 1 – Preference výběru varianty učebnice v průběhu testování

Médium	Důvod výběru	Počet
Tištěné	Lepší orientace, přehlednost	28
	Rozepsaný postup, možnost dopisování poznámek	24
	Osobní preference – práce s papírem	14
	Tištěný materiál poslouží jako materiál k učení, ke zkoušce	8
	Zadání všech příkladů vidím před sebou	4
	Nemusím si zadání příkladů přepisovat	4
	Nepotřebuji připojení k internetu, neřeším technické problémy	2
	Zvyk ze školy	1
	Nevím	4

Tabulka 1 – Důvody výběru tištěné varianty učebnice

Důvod výběru	Komentáře studentů
Přehlednost	*„Lepší orientace ve výpočtech a tak.“*
Poznámky	*„Tištěnou variantu jsem zvolila z důvodu, že mám raději si daný materiál vytisknout a vpisovat si do něj své poznámky a poznatky z výpočtů, které si následně mohu barevně zvýraznit.“*
Osobní preference	*„Lépe se mi učí z tištěných materiálů a raději s nimi pracuji v tištěné formě.“*
Materiál ke zkoušce	*„Až si budu chtít látku zopakovat před testem či zkouškou, budu mít dobře zpracované a přehledné poznámky.“*
Zadání před sebou	*„U tištěné varianty vím příklady dopředu a vidím, co je přede mnou a za mnou za cvičení.“*
Není třeba nic přepisovat	*„Tištěnou variantu jsem si vybrala, jelikož si ráda vše píšu. Je to pro mě lepší na počítání a nemusím si to opisovat.“*
Technika	*„Z důvodů možných problémů s připojením k internetu jsem si vybrala tištěnou variantu.“*
Zvyk	*„Na univerzitě také počítáme v tištěné formě.“*
Nevím	*„Nevím, bylo to první.“*

Tabulka 2 – Komentáře studentů k výběru tištěné varianty učebnice

Médium	Důvod výběru	Počet
Interaktivní	Přehlednější, vše na jednom místě, snazší manipulace	19
	Dostupné odkazy k dalším materiálům, k videím	18
	Jednodušší, jednoduchý způsob korekce	14
	Rychlejší	12
	Šetření papírem	8
	Osobní preference – práce s PC	8
	Dostupnější, nepotřebuji tiskárnu	4
	Nemusím nic psát	2
	Nemám možnost se předem dívat do výsledků	1

Tabulka 3 – Důvody výběru interaktivní varianty učebnice

Důvod výběru	Komentáře studentů
Přehlednost	*„Elektronická varianta je pro mě mnohem lepší z důvodu, že nemusím mít u sebe mnoho papírů a mám vše uložené v jedné složce a vždy to najdu.“*
Odkazy + videa	*„Hned poté, co jsem si pustila odkazy na Moodle, všimla jsem si, že ne této stránce jsou také jiná cvičení, videa a spousty dalších pomůcek k pochopení látky. Rovnou jsem tedy u elektronické varianty zůstala a neměla důvod použít tištěnou variantu.“*
Kontrola výsledků	*„Jednodušší. Líbí se mi, že každé cvičení vyhodnotí sám program.“*
Rychlost	*„Vybral jsem si elektronickou variantu z důvodu rychlejšího přístupu k videím a nápovědám.“*
Úspora papíru	*„Nechci zbytečně tiskat papíry, když můžu mít materiál elektronicky.“*
Osobní preference	*„Raději pracuji v online prostředí než na papíře, je to pro mě pohodlnější.“*
Dostupnost	*„Nemám momentálně přístup k tištěné verzi.“*
Není nutné psát	*„Použití elektronické varianty je pro mě lepší, protože nemusím nic psát.“*
Poctivost v počítání	*„Nemám možnost se dívat do výsledků předem, takže musím pracovat poctivě.“*

Tabulka 4 – Komentáře studentů k výběru interaktivní varianty učebnice

Médium	Důvod výběru	Počet
Obě	Testy jsou lepší elektronicky, tištěný materiál poslouží k učení	4
	U kapitoly limit jsou zde čitelnější znaménka	3
	Čím více opakování, tím lépe	2
	Zvědavost	2

Tabulka 5 – Důvody používání obou variant učebnice

Důvod výběru	Komentáře studentů
Výhoda obou variant	*„Elektronická varianta je velmi dobře zpracovaná a dobře se mi v ní orientuje. Tištěnou verzi jsem si také vyplnila a založila, abych měla studijní materiál pro zkoušku.“*
Nečitelnost	*„Preferuji tištěnou verzi, ale musela jsem použít i elektronickou kvůli znaménkům v indexech (zleva, zprava). V tištěné verzi jsou rozpoznat hůře.“*
Více opakování	*„Používám obojí pro lepší procvičení.“*
Zvědavost	*„Chtěl jsem vyzkoušet obě varianty.“*
Tištěná + video	*„Používám tištěnou variantu, protože je mi tento způsob příjemnější. Avšak pokud mi i přes nápovědy není příklad jasný, použiji odkaz na přiložené video.“*

Tabulka 6 – Komentáře studentů k výběru obou variant učebnice

4 Diskuse

4.1 Rozdílné aspekty v nových médiích

Provedený výzkum odhalil, že studenti, kteří pracují s interaktivní variantou, mají statisticky výrazně vyšší chybovost než ti, kteří pracují s tištěnou verzí. Výsledek potvrdily i obě statistické metody. Dalším sledovaným aspektem byl použitý počet nápověd. Zde jsme zjistili, je u interaktivní varianty učebnice nižší než u tištěné varianty, což statisticky potvrdil i Random mixed model. Posledním sledovaným aspektem byla celková doba nutná k řešení předložených matematických úloh. I když dle průměrných hodnot potřebného času k vyřešení úloh se potvrdilo ve 23 sadách, že studentům používajícím interaktivní variantu učebnice stačí k vyřešení úloh méně času, statisticky se nám tento rozdíl potvrdil pouze v případě Bonferroniho korekce.

Lenhard et al. (2017) také pracovali s pojmem míra chybovosti a dospěli ke stejnému závěru. Ve své studii definovali míru chybovosti jako počet chyb dělený počtem dokončených položek.

Žáci pracující s digitálním materiálem fungovali rychleji, ale na úkor přesnosti. Autoři zmiňují důvody, které mohou vyšší chybovost u digitálních materiálů způsobit. První odůvodnění souvisí s hraním jednoduchých počítačových her, kde k vítězství je často důležitější rychlost než přesnost. Druhým důvodem špatné odpovědi může být práce s myší. Zatímco označení odpovědi tužkou vyžaduje pohyb celé ruky nebo dokonce paže, myš potřebuje jen nepatrný pohyb prstu. V souladu s tím může být snadno označená jiná odpověď než zamýšlená. Stejně tak v případě změny odpovědi. Zastavení zahájeného špatného pohybu a označení alternativní odpovědi je u tištěných materiálů oproti digitálním snadné.

Podrobnější diskuse ke kvalitativnímu výzkumu práce je opět popsána v již publikovaném příspěvku v časopise *Mathematics in Education, Research and Applications* (Vocetková a Šulista, 2021).

4.2 Výběr varianty učebnice

Důkladnou analýzou kvalitativní části výzkumu, proč právě studenti volili tu či onu variantu jsme došli k závěru, že tištěná a elektronická varianta učebnice jsou dvě neoddělitelné složky. Velká část studentů, kteří pracovali s elektronickou variantou, si tištěnou variantu vytiskla k následnému procvičování. Naopak celá řada studentů volila tištěnou variantu, ale zároveň používala dostupná videa. Výběrem formátu učebnice se zabývalo i několik dalších autorů.

Studie preferencí digitálního čtení, kterou provedli Ackerman a Goldsmith (2011) naznačuje, že většina čtenářů dává přednost čtení dlouhého akademického textu v tištěné podobě. Také Baron, Calixte a Havewala (2017) ve své studii odhalili nesrovnatelně vyšší poptávku na tištěné knihy a výukové materiály. Více než čtyři pětiny uvedly, že pokud budou náklady stejné, upřednostní tisk jak pro školní, tak pro zábavné čtení. Ze studie také vyplynulo, že cena učebnice je jedním z rozhodujících faktorů pro výběr formátu. K závěru, že cena je primárním hlediskem při rozhodování dospěl ve svém výzkumu i Rockinson-Szapkiw et al. (2013).

Gilbert a Fister (2015) provedli studii, ve které zjistili, že studenti, kteří pro výzkumné účely používali elektronickou knihu, pocházeli převážně z výtvarného umění a z přírodovědných fakult. Podobných výsledků dosáhla i studie mezi studenty vysokých škol, ve které bylo zjištěno, že elektronickou knihu pro akademické účely používali častěji studenti přírodovědných a technických oborů oproti studentům veterinární medicíny, biomedicíny a aplikovaným lidským službám (McLure & Hoseth, 2012). Výsledky výzkumů spolu mohou souviset. Texty, s kterými studenti pracují v medicíně, jsou jiného charakteru než texty přírodovědných či technických oborů. Použitelností a užitečností e-knih se zabývali ve svém kvalitativní studii Lam et al. (2009) a také dospěli k závěru, že chápání digitálního textu je náročné a že překonat malé technické výzvy dokázali lépe studenti z inženýrských oborů. I v našem výzkumu jsme se setkali s několika případy, kdy studenti potřebovali čas na zorientování se v interaktivní učebnici.

Z výsledků naší kvalitativní studie je patrné, že nepřevažuje zájem o interaktivní variantu učebnice, což bychom vzhledem k současnému digitálnímu světu očekávali. Naopak v průběhu výzkumu přecházelo stále více studentů od interaktivní k tištěné variantě. Tištěnou variantu volili studenti hlavně z důvodu, že si mohli materiál vytisknout, vpisovat si do něj poznámky z výpočtů, barevně ho zvýrazňovat, a tím pádem si vytvářet vhodný materiál jako přípravu pro

následnou zkoušku. Stejný závěr studie zdůrazňuje i Axtell a Curran (2011). Pokud si studenti nenechají své poznámky z řešení úloh, nejsou pak schopni použít domácí úkoly coby nástroj, který jim pomůže při studiu.

Závěr

Počítačem podporovaného hodnocení jsme v naší studii využili k formativnímu testování a zajímala nás využitelnost a rozdílnost strukturních komponent v nově vznikajících médiích. Studenti si vybírali dle individuálního přístupu k učení variantu učebnice, s kterou chtěli pracovat. Z pohledu kvantitativního výzkumu byly sledovanými aspekty chybovost, použitý počet nápověd a čas potřebný k vyřešení úloh. Oba dva statistické přístupy (Random mixed model a Bonferroniho korekce) nám potvrdily statistickou významnost ve větší chybovosti studentů, kteří používají interaktivní variantu učebnice. Cílem kvalitativního výzkumu práce bylo zjistit preference studentů dle přístupu k učení. Tato část výzkumu potvrdila výsledek z kvantitativní části práce. Studenti označují práci s interaktivní variantou učebnice jako rychlejší, což se nám v případě Bonferroniho korekce potvrdilo i statisticky. Studenti používající digitální výukové materiály pracují rychleji, ale na úrok chybovosti.

Závěrem můžeme říct, že tištěné a interaktivní učebnice umožňují dva velmi odlišné způsoby učení. Každému studentovi vyhovuje jiný přístup k výuce, jiná varianta učebnice. Důvody jsou různé. Proto se domníváme, že nelze jednoznačně vyzdvihnout, která varianta učebnice je lepší či přínosnější, ale jediným řešením, jak uspokojit širokou škálu studentů, je hybridní učebnice, která podporuje odlišné přístupy k učení a nabízí více formátů pro různorodé požadavky studentů.

Literatura:

[1] Abedi, J., & Lord, C. (2001). The Language Factor in Mathematics Tests. *Applied Measurement in Education*, *14*(3), 219–234. Dostupné z: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1207/s15324818ame1403_2

[2] Ackerman, R., & Goldsmith, M. (2011). Metacognitive regulation of text learning: On screen versus on paper. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, *17*(1), 18–32. Dostupné z: https://iipdm.haifa.ac.il/images/publications/Morre_Goldsmith/Ackerman%20&%20Goldsmith%20(2011%20JEP%20Applied)Metacognitive%20Regulation%20of%20Text%20Learning%20on%20Screen%20vs%20on%20Paper.pdf

[3] Axtell, M.; & Curran, E. (2011) The effects of online homework in a university finite mathematics course. In: *Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1,* 16–25. Dostupné z: http://sigmaa.maa.org/rume/RUME_XIV_Proceedings_Volume_1.pdf

[4] Baron, N. S., Calixte R. M., & Havewala, M. (2017). The persistence of print among university students: An exploratory study. *Telematics and Informatics*, *34*(5), 590–604. Dostupné z: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0736585316305378

[5] Burch, K. J. & Kuo, Y. J. (2010). Traditional vs. online homework in college algebra. *Mathematics and Computer education*, *44*(1), 53–63. Dostupné z: http://media.web.britannica.com/ebsco/pdf/058/48082058.pdf

[6] Fang, Z., & Schleppegrell, M. (2010). Disciplinary literacies Across content areas: Supporting secondary reading through functional language analysis. *Journal of Adolescent & Adult Literacy*, *53*(7), 587–597. Dostupné z: https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/88105/JAAL.53.7.6.pdf?sequence=1

[7] Gilbert, J., & Fister, B. (2015). The perceived impact of e-books on student reading practices: A local study. *College and Research Libraries*, *76*(4), 469–489. Dostupné z: https://crl.acrl.org/index.php/crl/article/viewFile/16438/17884

[8] Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 199–218. Dostupné z: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-008-9159-8

[9] Jahodová Berková, A. (2017). *Přínos systému počítačem podporovaného hodnocení pro výuku vysokoškolské matematiky.* Disertační práce. Hradec Králové: Univerzita Hradec Králové, Pedagogická fakulta. Dostupné z: https://theses.cz/id/pubo3m/

[10] Lam, P., Lam, S. L., Lam J., & McNaught, C. (2009). Usability and usefulness of eBooks on PPCs: How students' opinions vary over time. *Australasian Journal of Educational Technology*, *25*(1), 30–44. Dostupné z: https://ajet.org.au/index.php/AJET/article/view/1179/407

[11] Lenhard W., Schroeders U., & Lenhard A. (2017). Equivalence of Screen Versus Print Reading Comprehension Depends on Task Complexity and Proficiency. *Discourse Processes*, *54*(5–6), 427–445, Dostupné z: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0163853X.2017.1319653

[12] McLure, M., & Hoseth, A. (2012). Patron-driven e-book use and users' e-book perceptions: A snapshot. *Collection Building*, *31*(4), 136–147. Dostupné z: https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/01604951211274043/full/html

[13] Nebeský, L. (1982). O jazyce matematického textu. *Slovo a slovesnost*, *43*(2), 88–92. Dostupné z: http://sas.ujc.cas.cz/archiv.php?art=2815#_ftnref1

[14] Noyes J. M., & Garland K. J. (2008). Computer vs. paper-based tasks: Are they equivalent? *Ergonomics*, *51*(9), 1352–1375. Dostupné z: https://www.notis-consulting.net/wp-content/uploads/2015/04/computer-vs-paper.pdf

[15] Rockinson-Szapkiw, A., Courduff, J., Carter, K., & Bennett, D. (2013). Electronic versus traditional print textbooks: A comparison study on the influence of university students' learning. *Computers and Education*, *63*, 259–266. Dostupné z: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360131512002953?casa_token=R_CXwj9951kAAAAA:Lqk1In0E92INAcvPQCPGbr3B1BWPHWfIiaHXgMXJY_SxSEPd1QiWiRtX6r9DmrSxV2D6vUhqFDY

[16] Sangwin, Ch. J. (2013). *Computer aided assessment of mathematics*. Oxford University Press.

[17] Sangwin, Ch. J. & Köcher N. (2016). Automation of mathematics examinations. *Computers & Education*, *94*, 215–227. Dostupné z: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360131515300865

[18] Stacey, K. & Wiliam, D. (2012). Technology and assessment in mathematic, In *Springer International Handbooks of Education, 27*, 721–751, New York: Springer.

[19] Vocetková, K., & Šulista, M. (2021). Differences in the use of electronic and printed versions of a university mathematics workbook. *Mathematics in Education, Research and Applications, 7*(1), 33–49. Dostupné z: http://meraa.uniag.sk/docs/2021-01/vocetkova-sulista.pdf

Mgr. Klára Vocetková
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Ekonomická fakulta
Studentská 787/13, 370 05 České Budějovice
e-mail: kvocetkova@ef.jcu.cz

ONLINE VÝLETY S GEOGEBROU

Šárka Voráčová

Ústav aplikované matematiky, Fakulta dopravní ČVUT v Praze

Abstrakt: Spolu s online kalkulátory a Excelem patří GeoGebra k nejvýznamnějším nástrojům, které nám mohou pomoci při prezenční i online výuce matematiky. Tyto technologie mohou obohatit výukový proces nejrůznějšími způsoby. Jedním z nejdůležitějších kritérií dobrého užití software ve výuce je míra zapojení žáku a jejich motivace. Během workshopu společně podnikneme několik výletů, při nichž budeme hledat odpovědi na tradiční úlohy netradiční cestou. Objevitelská cesta vyžaduje nerutinní úsilí, je delší a pro učitele náročnější. Je to ale jediná cesta k matematickému uvažování, protože podstatou matematiky není následování již vytvořených postupů, ale vytváření postupů nových.

Klíčová slova: GeoGebra, Dynamická geometrie, Symetrie, Ornament, 3D tisk.

Online trips with GeoGebra

Abstract: GeoGebra, online calculators, and spreadsheets calculators are the most helpful applications in both online and proximate learning. These tools can be utilized in a variety of ways to improve and enhance math teaching. One of the important prerequisites for the quality of integration technology into mathematics teaching is the activity and motivation of the students. During the workshop, we'll go in search of traditional problems with original solving methods. Individual discovery of solving methods is a slow and difficult way, but it's the only way for mathematical comprehension. Pupils actively construct or make their knowledge, and bring their own unique experiences to the classroom every day.

Key words: GeoGebra, Dynamic Geometry Software, Symmetry, 3D print.

Článek je publikován v časopise *South Bohemia Mathematical Letters*, Vol. 29 (2021), No. 1

Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/2021_Voracova.pdf

Název:	Sborník příspěvků 10. konference Užití počítačů ve výuce matematiky
Vydavatel:	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Editor:	Roman Hašek
Vydání:	1.
Počet stran:	200
Rok vydání:	2021
ISBN	978-80-7394-906-8